máquinas eléctricas

Sexta edición

Jesús Fraile Mora



Mc Graw Hill

MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Sexta edición

MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Sexta edición

Jesús Fraile Mora

Catedrático de Electrotecnia
E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos
U.P.M.

Mc Graw Hill

MADRID • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

MÁQUINAS ELÉCTRICAS. Sexta edición

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A. U.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

ISBN: 978-84-481-6112-5
Depósito legal: M.

Editor: José Luis García Jurado
Técnico Editorial: Blanca Pecharromán Narro
Preimpresión: Nuria Fernández Sánchez
Diseño cubierta: Corporación Gráfica
Preimpresión: MonoComp, S. A.
Impreso en

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Contenido

Acerca del autor

Natural de Ayerbe (Huesca). Perito Industrial, Rama Eléctrica, por la Escuela Técnica de Peritos Industriales de Zaragoza, 1965 (en la actualidad: E.U. de Ingeniería Técnica Industrial). Ingeniero de Telecomunicación, Rama Electrónica, por la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid, 1970. Doctor Ingeniero de Telecomunicación por la Universidad Politécnica de Madrid, 1974. Licenciado en Ciencias, Sección de Físicas, por la Universidad Complutense de Madrid, 1976.

Maestro de Laboratorio de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid, 1967-71. Profesor Encargado de Curso y de Clases Prácticas de Electrotecnia en la Escuela anterior, 1970-72. Profesor Encargado de Laboratorio de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid, 1972-74. Profesor Adjunto de Laboratorio de Electrotecnia en la misma Escuela, 1974-75. Catedrático de Electrotecnia de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica de Obras Públicas de Madrid, 1972-78. Profesor Adjunto de Máquinas Eléctricas de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, 1975-78. Catedrático de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad de Santander, 1978-80. Catedrático de Electrotecnia de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid, desde 1980, continuando en la actualidad. Profesor Encargado de la asignatura Instrumentación y Control de la Carrera de 2.º Ciclo de Ingeniero de Materiales de la UPM durante los Cursos 1995 a 1998.

Director del Departamento de Energética de la Universidad de Santander, 1978-80. Secretario General de la Universidad de Santander, 1979-80. Secretario de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, 1981-82. Subdirector de Investigación y Doctorado de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Madrid, 1983-86. *Member* del IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineers*) desde 1972, recibiendo el grado de *Senior Member* en 1985. Director del Departamento de Ingeniería Civil: Hidráulica y Energética de la UPM, 1994-2004. Premio de la Fundación General de la UPM a la labor docente desarrollada por un profesor en su vida académica, año 1991. Medalla de Oro de la Asociación Española para el Desarrollo de la Ingeniería Eléctrica, año 2005.

Autor de diversos libros de texto y artículos en el Área de Ingeniería Eléctrica. Premio de la Fundación General de la Universidad Politécnica de Madrid al mejor libro de texto escrito por un profesor de la UPM por el libro *Electromagnetismo y Circuitos Eléctricos*, año 1993. Ha impartido gran número de Seminarios y Cursos de Doctorado en diversas Universidades Españolas. También ha dirigido o participado en numerosos Cursos de Formación y de Reciclado para diversas Empresas e Instituciones. La labor investigadora desarrollada incluye los temas de estabilidad de sistemas eléctricos de potencia; comportamiento transitorio de máquinas síncronas; regulación electrónica de velocidad de motores de inducción trifásicos; sistemas de almacenamiento de energía eléctrica mediante bobinas superconductoras SMES; tecnologías de velocidad variable y control inteligente en la generación hidroeléctrica y también sobre historia de la ingeniería eléctrica.

Prólogo

La excelente acogida que se ha venido dispensando a las cinco primeras ediciones de este libro de Máquinas Eléctricas, obligaban necesariamente a preparar esta sexta edición en la que se ha hecho un gran esfuerzo editorial para mejorar su calidad y presentación. El texto trata de los principios y aplicaciones de las máquinas eléctricas que todo ingeniero, cualquiera que sea su especialidad de origen, empleará a lo largo de toda su vida profesional, merced a su aplicación en las diferentes fases de los procesos productivos. El libro es el fruto de casi cuarenta años de experiencia en la enseñanza de las máquinas eléctricas dentro de los Cursos de Electrotecnia impartidos por el autor en diferentes Escuelas Técnicas Españolas de Ingeniería Superior y de Ingeniería Técnica. En la actualidad, gran parte del texto es utilizado por el autor para explicar la segunda parte de la asignatura Electricidad y Electrotecnia en la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid.

El Capítulo 1 se refiere a los circuitos magnéticos y a los principios básicos de la conversión de energía en el que se explican las leyes de los circuitos magnéticos, los imanes permanentes, las pérdidas en los materiales ferromagnéticos y también se deducen las expresiones de las fuerzas en sistemas de traslación, y las del par en sistemas de rotación. Se incluyen ejemplos de aplicación en los que se calculan los pares de diversas máquinas eléctricas desde un punto de vista unificado.

El Capítulo 2 se dedica a los principios generales de las máquinas eléctricas. Se explican los conceptos básicos comunes a las máquinas tales como: estátor, rotor, inductor, inducido, tipos de colectores, devanados, etc. Se analizan las f.m.m.s. producidas por diferentes configuraciones de devanados, haciendo especial hincapié en el teorema de Ferraris que constituye el principio de funcionamiento de las máquinas de c.a. Se estudia de una forma general la generación de f.e.m. en una máquina eléctrica, explicando también la creación del par electromagnético desde el punto de vista de interacción de las f.m.m.s. del estátor y rotor. El capítulo finaliza con un análisis cualitativo de las principales máquinas eléctricas, de tal modo que el estudiante pueda identificarlas con facilidad y conozca desde el principio las máquinas existentes y su funcionamiento básico.

El Capítulo 3 se refiere a los transformadores. Se detallan los aspectos constructivos y el principio de funcionamiento del transformador ideal. A continuación se señalan los efectos reales que tienen lugar en esta máquina y se desarrollan los circuitos equivalentes del transformador de potencia, junto con los ensayos que se precisan para determinar los parámetros que intervienen en el circuito final. Este esquema organizativo es el que se sigue en el libro para estudiar el funcionamiento de todas las máquinas eléctricas.

El Capítulo 4 está dedicado a las máquinas asíncronas o de inducción. Fundamentalmente el tema se refiere a los motores trifásicos, en el que se explican el principio de funcionamiento, circuito equivalente y ensayos necesarios para la determinación del mismo. Se estudia el balance de potencias en estas máquinas y se determina la ecuación general del par de rotación. Se analiza más tarde el proceso de arranque de los motores trifásicos y los diversos

métodos existentes para lograrlo. Se explica también el motor de inducción monofásico y se describen algunas máquinas asíncronas especiales como: el regulador de inducción, los ejes eléctricos y el motor de inducción lineal.

El Capítulo 5 se refiere a las máquinas síncronas, que en su funcionamiento como generador es la máquina principal por antonomasia en las centrales eléctricas. Se explica el funcionamiento del alternador en vacío y en carga, destacando el fenómeno de la reacción del inducido y la obtención del circuito equivalente. Se estudia el régimen de funcionamiento de un alternador tanto en una red aislada como conectado a una red de potencia infinita. Se analiza el motor síncrono y también el diagrama de límites de funcionamiento de una máquina síncrona.

El Capítulo 6 se dedica a las máquinas de c.c.; se inicia el tema explicando los aspectos constructivos y el principio de funcionamiento que incluye el fenómeno de la reacción de inducido y la conmutación en estas máquinas. Se estudia el funcionamiento de la máquina en régimen generador y motor; en este caso se explica con detalle la regulación de velocidad que ofrecen, haciendo una referencia especial al sistema de regulación Ward-Leonard. También se explican los métodos de frenado de los motores de c.c. por procedimientos clásicos y el funcionamiento de la máquina de c.c. en cuatro cuadrantes. Se incluye también un epígrafe para comentar el funcionamiento de los motores de c.c. sin escobillas *(brushless motors).*

El Capítulo 7 se dedica a los accionamientos eléctricos cuya importancia es cada vez mayor en la industria moderna. Es una materia interdisciplinar entre el mundo de la electrónica y el de la electrotecnia. Se explica de una forma sencilla el principio de funcionamiento de los semiconductores, describiendo los diversos tipos de convertidores electrónicos utilizados en la regulación de las máquinas eléctricas. Se describen luego los accionamientos eléctricos tanto con motores de c.c. como con motores de c.a. En ambos casos se incluyen notas informativas de su aplicación específica a la tracción eléctrica española, por lo que será de gran interés para aquellos ingenieros que desarrollan su labor en los talleres de mantenimiento de ferrocarriles eléctricos y trenes metropolitanos.

Se han incluido en el libro tres apéndices; el primero explica el desarrollo histórico de las máquinas eléctricas. En un principio el autor quería incorporar este apéndice como capítulo 0, a modo de introducción del libro, pero se consideró más tarde que era demasiado especializado para empezar el texto y por ello se ha dejado en este lugar. Esperamos fervientemente que este apéndice sea de utilidad para los profesores de ingeniería eléctrica. Es opinión del autor, que los profesores de Universidad estamos obligados a dar una formación más humanística a los alumnos y que debemos enseñarles cómo ha ido progresando la ciencia y la tecnología, y el porqué se ha avanzado en una dirección y no en la otra, porque esto ayuda a conocer las relaciones entre las diferentes ramas científicas. A guisa de ejemplo, podemos indicar que el desarrollo de la electrónica no hubiera sido posible sin un adelanto suficiente de la electrotecnia, y de un modo análogo, el progreso de los ordenadores únicamente se puede justificar por un avance espectacular de la electrónica.

En el Apéndice 2 del libro se hace un repaso de las series de Fourier, cuyo conocimiento es necesario para estudiar los armónicos de campo en el entrehierro de las máquinas eléctricas y también los armónicos de tensión producidos por los convertidores electrónicos utilizados en los diversos accionamientos eléctricos. En el Apéndice 3 se estudia el sistema por unidad que representa una normalización que se emplea frecuentemente en el análisis de sistemas eléctricos de potencia y que en el caso de las máquinas eléctricas constituye un método muy útil para comparar los parámetros de máquinas de diferentes potencias nominales.

En cada capítulo del libro se han incluido una gran variedad de ejemplos de aplicación con su solución completa, facilitando por una parte la labor del profesor que lo utilice en su

asignatura, ya que podrá dedicar menos tiempo a la tediosa manipulación numérica y más a las deducciones básicas. Por otra parte, estos ejercicios facilitan el autoaprendizaje del alumno, ya que cada nuevo concepto que se introduce, va seguido de unos ejemplos de aplicación que le servirán para comprender mejor la teoría presentada, lo que permite afianzar las ideas de un modo progresivo sin dejar lagunas en la interpretación de los conceptos implicados. Al final de cada capítulo se han incluido entre veinte y treinta problemas en los que se da únicamente la respuesta final. Con ello se pretende ayudar al profesor en la búsqueda de nuevos problemas para realizar en clase y facilitar el trabajo del alumno, para que pueda comprobar su propio progreso y nivel de conocimientos. Teniendo en cuenta los ejemplos resueltos a lo largo de cada capítulo y los problemas finales, el libro contiene cerca de trescientos problemas que facilitan el aprendizaje de esta materia.

Algunos epígrafes llevan un asterisco y están escritos con una letra de menor tamaño, para reconocer en seguida aquellos temas más especializados que pueden suprimirse en una primera lectura del texto. Por otro lado en cada capítulo se presentan con frecuencia anécdotas, comentarios prácticos y secciones de ampliación de conocimientos, que son puntos sugerentes de reflexión, que incentivan la lectura del libro, debido a su curiosidad y a los problemas a veces confusos que surgen en la práctica industrial. Se incluye también al final de cada capítulo una amplia bibliografía de ampliación de los temas estudiados en la lección, que puede ser útil para aquellos estudiantes que deseen una mayor profundización de los conceptos estudiados; representan parte de las referencias que ha utilizado el autor en la redacción de la obra. También se adjuntan diversas biografías de científicos, ingenieros y profesores que han contribuido directa o indirectamente al desarrollo de la ingeniería eléctrica. Ha sido una tarea bastante ardua encontrar algunas de estas reseñas, pero se ha hecho un gran esfuerzo para que el estudiante conozca los protagonistas de la historia eléctrica, a quienes con esta semblanza el autor rinde su homenaje. La lectura de estas gestas suavizará la lectura del libro y ayudará al estudiante a conocer las aportaciones más importantes que realizaron estos ingenieros, a los que la humanidad les debe por ello respeto y gratitud.

Se ha intentado en la redacción del texto, conseguir la mayor claridad que ha sido posible; para ello el autor ha estado atento a todas las preguntas que le hacían los alumnos dentro y fuera del aula, comprobando qué partes de cada lección encerraban mayores dificultades para ellos y observando con detenimiento los errores que se producían con más frecuencia en los exámenes y evaluaciones. Los profesores de la asignatura prestaron una ayuda valiosísima, dando ideas para modificar los planteamientos iniciales. Todas estas observaciones aconsejaron tener que efectuar diversos cambios; en algunos casos, se prepararon más figuras para facilitar una mejor comprensión; en otros, hubo que incluir más ejemplos de aplicación que ilustrasen con mayor vigor los conceptos teóricos.

No sé si la obra que se ofrece al lector merecerá su aprobación, lo único que puede decir el autor, es que se ha puesto todo el empeño, para que el texto tuviera una alta calidad didáctica, en el que se combinasen de un modo adecuado la teoría y la práctica, facilitando a los estudiantes su estudio. Consideramos que es un deber de todo educador lograr lo que nuestro gran filósofo Ortega y Gasset denominaba la economía de la enseñanza, es decir hacer fácil lo difícil, para optimizar el tiempo del alumno, haciendo que aprenda en un tiempo más breve. Quienes lleguen a utilizar este libro de texto quizá encuentren que algunas secciones debieran ampliarse o detallarse aún más. Cualquier sugerencia nueva o crítica, será bienvenida y se tomará en consideración para futuras ediciones.

Agradecimientos

Deseo hacer patente mi agradecimiento a aquellas personas que en algún momento de mi vida causaron un gran impacto en mi formación. En primer lugar los recuerdos se dirigen a mis padres Jesús y Pilar, mis primeros y mejores maestros, su ejemplo de dedicación y esfuerzo han sido para mí la guía de mi vida. A los profesores que supieron inculcarme la pasión por esta asignatura: D. Valentín Abadía Lalana (E.U. de Ingeniería Técnica Industrial de Zaragoza); D. Guillermo Herranz Acero y D. Miguel Aguilar Fernández (E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación de Madrid); D. Ángel Alonso Rodríguez (E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid).

Quisiera también agradecer a mis compañeros y colaboradores, en los Centros donde he impartido docencia, por la ayuda prestada en cada momento y por la amistad que nos ha unido desde entonces. En orden cronológico me refiero a: D. Luis Santamaría Gago, D. Eugenio Bertolín Gómez y D. José María Pérez Martínez, de la E. U. de Ingeniería Técnica de Obras Públicas de Madrid. A D. Javier Sanz Feito, D. Luis Serrano Iribarnegaray, D. Ángel Molina Martín Urda y D. Manuel Fernández Flórez de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, los dos primeros destinados actualmente como Catedráticos de Ingeniería Eléctrica en las Universidades Carlos III de Madrid y Politécnica de Valencia respectivamente. A D. José Antonio Gurrutxaga Ruiz de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander. A los profesores: D. José Román Wilhelmi Ayza, D. Antonio Ruiz Mateo, D. Pedro García Gutiérrez, D. José A. Sánchez Fernández, D. Luis Arévalo Muñoz, D. Jesús Fraile Ardanuy, Dña Nieves Herrero Martínez y al personal del Laboratorio de Electrotecnia: D. Enrique Arnau Lázaro, D. Carmelo Hernánz Bermúdez, Dña. Cristina Gordillo Iracheta y D. Jesús Maroto Reques, todos ellos pertenecientes a la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.

Aprovecho la oportunidad para dar las gracias colectivamente a muchos profesores de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Española y de Hispanoamérica, por las muy útiles sugerencias recibidas, en algunos casos de forma personal y en otros indirectamente a través del editor de Ingeniería; debo reconocer que son demasiado numerosas para agradecerlas individualmente, aunque no por ello menos apreciadas. Es enorme también la deuda de gratitud a mis alumnos, por ayudarme con sus preguntas a buscar mejores ideas para escribir mejor y hacer más asequible la transmisión de información. A ellos va dirigido especialmente este libro, para que encuentren menos dificultades en el estudio de la asignatura. Representan el público de ese gran teatro que son las aulas, donde el actor desea ser escuchado con interés y cariño. Su actitud favorable y respetuosa en todo momento me proporcionaron el impulso suficiente para llevar a cabo esta ardua tarea.

Cerrando esta sección de agradecimientos, llega la gratitud y reconocimiento a mi familia. Este libro a través de sus diversas ediciones, ha supuesto muchos años de trabajo continuado, en detrimento del tiempo dedicado a todos mis seres queridos. Les pido perdón a mi esposa y a mis hijos por esta desatención, que a veces parece concomitante con mi trabajo

académico. Espero que a mi esposa Presen, a mis hijos Jesús y Cristina y a mis nietos Laura y Pablo, les estimule ojear este texto. Confío en que algún día, en la lejanía del tiempo, cuando se les ocurra releer esta obra, les agrade recordar con cariño a su padre o abuelo y le juzguen con benevolencia; si es así, me daré por satisfecho.

Esta sexta edición se publica bajo el patrocinio de la editorial McGraw-Hill/Interamericana de España, y se debe a la perseverancia del editor de Ingeniería, D. José Luis García Jurado, que ha dedicado un gran esfuerzo y entusiasmo para que la obra se confeccionara en un tiempo récord y con una gran calidad. Mi reconocimiento a la labor de composición de la empresa MonoComp, S.A, que ha conseguido plasmar las ideas del autor, al lograr una atractiva presentación del libro.

CAPÍTULO 1

Circuitos magnéticos y conversión de energía

1.1. INTRODUCCIÓN

En los circuitos eléctricos, la conexión existente entre los elementos pasivos se realiza por medio de materiales conductores que obligan a que la corriente eléctrica siga determinados recorridos, obedeciendo las leyes de Kirchhoff. Cuando se trata de estudiar las máquinas eléctricas, electroimanes y otros dispositivos electromagnéticos, se plantea un problema similar de canalizar y concentrar altas densidades de flujo magnético, en las regiones donde se necesita, lo cual se logra por medio de materiales ferromagnéticos. Un circuito magnético está formado generalmente por una estructura de hierro, sobre la que se arrollan una o más bobinas por las que circulan corrientes, que dan lugar a los flujos que aparecen en el sistema.

El cálculo riguroso de los flujos producidos es generalmente muy difícil y para una determinación precisa sería necesario emplear correctamente las ecuaciones de Maxwell y la ayuda de un calculador de tipo analógico o digital (ordenador); sin embargo, las reglas de los circuitos magnéticos que se estudian en este capítulo permiten resolver el problema de una forma aproximada y la mayor parte de las veces suficiente para las aplicaciones que se dan en la Electrotecnia.

El comportamiento de un circuito magnético viene determinado fundamentalmente por el carácter solenoidal de las líneas de inducción magnética (div $\mathbf{B} = 0$) y por el hecho de que en los materiales ferromagnéticos la permeabilidad es elevada y muy superior a la del vacío ($\mu >> \mu_0$). Estas condiciones corresponden, en el caso de circuitos eléctricos, a la consideración de que la densidad de corriente $\mathbf{J}$ es solenoidal, es decir, div $\mathbf{J} = 0$ (lo cual es siempre cierto, en todos aquellos puntos en donde no existan almacenamientos de carga), ya que la conductividad σ de un conductor es muy elevada frente a la de un aislador o dieléctrico. Esta similitud hace que puedan aplicarse a los circuitos magnéticos todos los teoremas de redes analizados en un curso de teoría de circuitos eléctricos, aunque la resolución es algo más compleja, debido al carácter no lineal del núcleo ferromagnético.

En este capítulo se estudian los diferentes tipos de materiales magnéticos, haciendo especial hincapié en los ferromagnéticos por su importancia como elemento estructural básico de las máquinas eléctricas. Se analizan las leyes de los circuitos magnéticos y se explican las analogías con los circuitos eléctricos, definiendo los conceptos de reluctancia y permeancia como conceptos análogos a la resistencia y conductancia. Se explican también los circuitos magnéticos que contienen imanes permanentes y que tanta importancia tienen en la actualidad en la construcción de máquinas eléctricas de pequeña potencia. Se analiza el efecto que tienen las ranuras en la determinación de la reluctancia del entrehierro de una máquina y que dan lugar al coeficiente de Carter, que es un concepto que utilizan los ingenieros de diseño. Se

desarrollan las expresiones de la energía y coenergía magnética y más tarde se calculan las expresiones de las pérdidas en el hierro: por histéresis y por corrientes de Foucault, dando a continuación una serie de ideas constructivas sobre las chapas magnéticas y su composición química. Se muestra después la medida de estas pérdidas en los laboratorios de electrometría mediante el método de Epstein. Se explican también los circuitos magnéticos excitados con bobinas alimentadas por c.a. y se comparan los fenómenos que tienen lugar con los que se presentan en las bobinas con núcleo de hierro alimentadas con c.c., se desarrolla el circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro y se determina la forma de onda de la corriente de excitación. El capítulo finaliza analizando la conversión de energía en sistemas magnéticos dotados de movimiento de traslación, dando detalles del funcionamiento de electroimanes, relés y contactores y su importancia en los automatismos eléctricos. También se estudian los fenómenos de conversión de energía en sistemas de rotación, lo que permite una introducción a los motores de reluctancia y a las máquinas eléctricas, comprendiendo la generación de par en las mismas y los fenómenos energéticos puestos en juego.

1.2. MATERIALES MAGNÉTICOS

Como ya se conoce de un curso básico de electromagnetismo, las propiedades magnéticas macroscópicas de un material lineal, homogéneo e isótropo se definen en función del valor de la susceptibilidad magnética χ_m, que es un coeficiente adimensional que expresa la proporcionalidad entre la magnetización o imanación **M** y la intensidad del campo magnético **H** de acuerdo con la ecuación:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \qquad [\mathrm{A/m}] \tag{1.1}$$

como quiera además que la inducción magnética **B** está relacionada con los campos **H** y **M** por:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \qquad [\mathrm{T}] \tag{1.2}$$

teniendo en cuenta (1.1) resulta:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \tag{1.3}$$

donde μ representa la permeabilidad magnética del medio ($\mu = \mu_0 \mu_r$) y μ_r la permeabilidad relativa, que a su vez es igual a $1 + \chi_m$; μ_0 es la permeabilidad del vacío y que en unidades SI vale $4\pi\ 10^{-7}$ H/m. De acuerdo con el valor de μ_r, los materiales se clasifican en:

- **Diamagnéticos**: si $\mu_r \approx 1$ (χ_m es del orden de -10^{-5})
- **Paramagnéticos**: si $\mu_r \approx 1$ (χ_m es del orden de $+10^{-3}$)
- **Ferromagnéticos**: si $\mu_r \gg 1$ (χ_m tiene un valor elevado)

Para comprender el comportamiento magnético microscópico de un material es preciso recurrir a la mecánica cuántica. Sin embargo, se puede dar una descripción cualitativa de los fenómenos magnéticos en base al modelo atómico clásico de Bohr-Sommerfeld. De acuerdo con este modelo podemos suponer que el átomo está formado por un núcleo central fijo que contiene protones y neutrones alrededor del cual giran los electrones describiendo órbitas cerradas que pueden considerarse como circuitos eléctricos. Cada uno de estos *circuitos* origina un momento magnético dipolar **m** (que es el producto de la corriente por la superficie de espira del circuito), que va asociado a un momento angular **L** o momento de la cantidad de movimiento ($\mathbf{L} = mr^2\omega$, siendo m la masa del electrón, r el radio de su órbita y ω la velocidad

angular de giro). Hay que tener en cuenta también que el electrón gira sobre sí mismo (espín del electrón), lo que da lugar a un mayor momento angular y a un momento magnético dipolar adicional que se incorpora al átomo. Al efecto anterior se denomina interacción espín-orbital (o enlace L-S), gracias a la cual el momento orbital de los electrones se enlaza con su momento magnético de espín, formando el momento magnético total del átomo.

1.2.1. Diamagnetismo

En un material diamagnético, el momento magnético neto debido a los movimientos orbitales de los electrones y a sus espines en cualquier átomo particular es cero en ausencia de campo magnético externo. Al aplicar un campo exterior de inducción B, aparecerá una fuerza sobre los electrones orbitales de acuerdo con la fórmula de Lorentz:

$$\mathbf{F}_m = q\,(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \qquad [\mathrm{N}] \tag{1.4}$$

donde q es la carga del electrón y **u** la velocidad de los mismos. La fuerza provoca un cambio en la velocidad angular de los electrones (hay que tener en cuenta que la fuerza centrípeta que surge como consecuencia del movimiento del electrón alrededor del núcleo es muy superior a las fuerzas que actúan sobre el electrón por parte de los campos exteriores, y por este motivo los radios de las órbitas no varían al colocar el átomo en un campo exterior y solamente se modifica la velocidad angular de los electrones). El cambio en esta velocidad se denomina frecuencia de Larmor. Como consecuencia del cambio en la velocidad, se modifica el valor de la corriente electrónica equivalente, lo que da lugar a la creación de un momento magnético neto. En definitiva, éste es un proceso de imanación inducida, que de acuerdo con la ley de Faraday-Lenz representa un momento magnético inducido que se opone siempre al campo aplicado, reduciendo de este modo el valor de la inducción. El efecto macroscópico del proceso es equivalente a una imanación negativa que se puede describir por medio de una susceptibilidad magnética χ_m negativa del orden de -10^{-5}. El bismuto, el cobre, plomo, plata y oro presentan estos efectos. El diamagnetismo se debe principalmente al movimiento orbital de los electrones dentro de un átomo y está presente en **todos** los materiales. En la mayoría de ellos el efecto es muy débil y es por lo que a veces este fenómeno queda enmascarado por otros más fuertes, como así ocurre en los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos, que se estudiarán más adelante. Los materiales diamagnéticos no presentan magnetismo remanente, lo que significa que el momento magnético inducido desaparece cuando se anula el campo exterior aplicado. El valor de χ_m en los materiales diamagnéticos es independiente de la temperatura, y este fenómeno, que fue descubierto experimentalmente en 1895 por Pierre Curie, justifica el hecho de que el movimiento de Larmor de los electrones se establece muy pronto y tanto el movimiento térmico como las colisiones entre átomos no modifican la frecuencia de Larmor.

1.2.2. Paramagnetismo

En algunos materiales, los momentos magnéticos debidos a los movimientos de los electrones, orbital y de espín, no se cancelan completamente y los átomos y moléculas tienen un momento magnético neto. Al aplicar un campo magnético externo, además de producirse un efecto diamagnético débil, el campo tiende a alinear los momentos magnéticos moleculares en el sentido del mismo, lo que provoca un aumento de inducción. El efecto macroscópico es entonces equivalente a una imanación positiva, es decir, a una susceptibilidad magnética positiva. El proceso de alineamiento es considerablemente contrarrestado por las vibraciones térmicas aleatorias del material. Hay poca interacción coherente entre átomos y por ello el aumento de la inducción es

bastante reducido, siendo χ_m del orden de 10^{-3}. Los materiales que presentan este comportamiento se denominan paramagnéticos, destacando entre ellos: aluminio, magnesio, titanio y wolframio. El paramagnetismo se produce fundamentalmente por los momentos dipolares magnéticos de los espines de los electrones. Las fuerzas de alineamiento del campo actuando sobre los dipolos moleculares son contrarrestadas por la distorsión que produce la agitación térmica. Al contrario que el diamagnetismo, que es independiente de la temperatura, el efecto paramagnético sí que depende de ella, siendo más fuerte a bajas temperaturas, cuando hay menos agitación térmica. La susceptibilidad paramagnética sigue la ley de Curie:

$$\chi_m = \frac{C}{T} \tag{1.5}$$

en la que C es una constante y T la temperatura absoluta. A la temperatura ambiente el valor anterior es, como se ha mencionado antes, del orden de 10^{-3}, es decir, del orden de cien veces la susceptibilidad diamagnética. Esto significa que en las sustancias paramagnéticas se puede prescindir del efecto diamagnético debido a su bajo valor.

1.2.3. Ferromagnetismo y ciclo de histéresis

El tipo más importante de magnetismo (en cuanto a sus aplicaciones tecnólogicas se refiere) lo presentan los materiales ferromagnéticos. Reciben esta denominación aquellas sustancias que tienen imanaciones grandes aun en presencia de campos magnéticos muy débiles. A la temperatura ambiente y por encima de ella* sólo tres elementos, hierro, cobalto y níquel, son ferromagnéticos (también lo son los elementos de las tierras raras: gadolinio y dysprosio). Casi todas las aleaciones y compuestos ferromagnéticos contienen uno o más de estos tres elementos o de manganeso, que pertenecen al mismo grupo de elementos de transición en la tabla periódica. (*Debe destacarse, sin embargo, que los aceros inoxidables con 18 por 100 de cromo y 8 por 100 de níquel, así como el acero al manganeso, con 14 por 100 de Mn, no son ferromagnéticos*). La facilidad de imanación de estas sustancias procede de las fuerzas mecánico-cuánticas, que tienden a alinear paralelamente entre sí a los espines atómicos próximos, aun en ausencia de un campo magnético aplicado (estas fuerzas de intercambio que alinean los espines adyacentes se conocen como *interacción espín-espín* y dependen críticamente de la distancia entre los átomos). La citada alineación no se produce en todo el volumen del material, sino que se encuentra por zonas, denominadas **dominios magnéticos**, los cuales pueden tener volúmenes comprendidos entre 10^{-6} y 10^{-2} cm^3, conteniendo entre 10^9 y 10^{15} átomos. La razón por la cual los materiales ferromagnéticos forman dominios es compleja; la capa electrónica 3*d* del átomo está parcialmente completa, como se muestra en la Figura 1.1 para el caso del hierro (existen cuatro espines no apareados), lo cual es una condición para que exista paramagnetismo. Sin embargo, la separación entre los átomos de los materiales ferromagnéticos es tal que las fuerzas de intercambio cuánticas que se producen hacen que los espines de los electrones de estos átomos se alineen paralelamente (interacción positiva).

Cuando una muestra de material ferromagnético se coloca dentro de un campo magnético, los dominios tienden a alinearse, de tal forma que sus campos magnéticos se suman al campo

---

* El ferromagnetismo es una propiedad que depende de la temperatura, y para cada material ferromagnético existe un valor, denominado temperatura de Curie, por encima del cual el material se hace paramagnético. Este fenómeno ocurre cuando el movimiento térmico es suficientemente grande para vencer las fuerzas de alineación. Para el hierro, la temperatura de Curie es de 770° C.

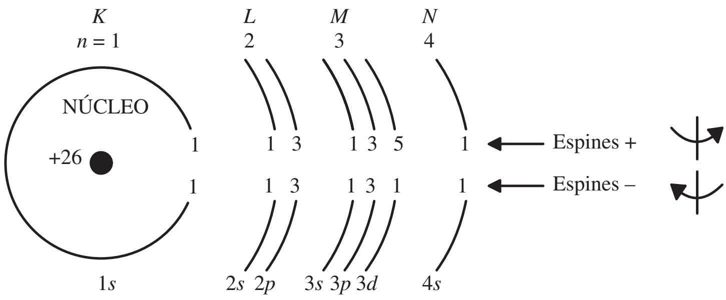


Figura 1.1. Estructura atómica del hierro.

externo, resultando un campo total más fuerte. Este efecto puede observarse por medio de la curva de la Figura 1.2, que relaciona la inducción B resultante en función de la intensidad de campo magnético H.

Inicialmente, la muestra se encuentra en un estado magnéticamente neutro, debido a que los dominios tienen alineaciones orientadas al azar, resultando un momento magnético total nulo. Al aplicar una intensidad de campo magnético (o excitación magnética) definida por un H_M (Fig. 1.2) de pequeño valor, se produce un desplazamiento de las paredes que separan los dominios, ensanchando éstos, a costa de los que están orientados menos favorablemente, los cuales se contraen. Este crecimiento es reversible, y si se elimina el campo H exterior, la densidad de flujo también desaparece. Si se va elevando el valor de H, los dominios continúan aumentando de volumen, a la par que van produciéndose **rotaciones bruscas** para que sus momentos magnéticos sigan la dirección más próxima a H. Este movimiento es irreversible, y si deja de aplicarse la excitación magnética, permanece la alineación de los dominios que han rotado. Si se sigue incrementando el valor de H, el proceso de alineación continúa gradualmente, extendiéndose simultáneamente a los dominios (caso anterior) y a los mo-

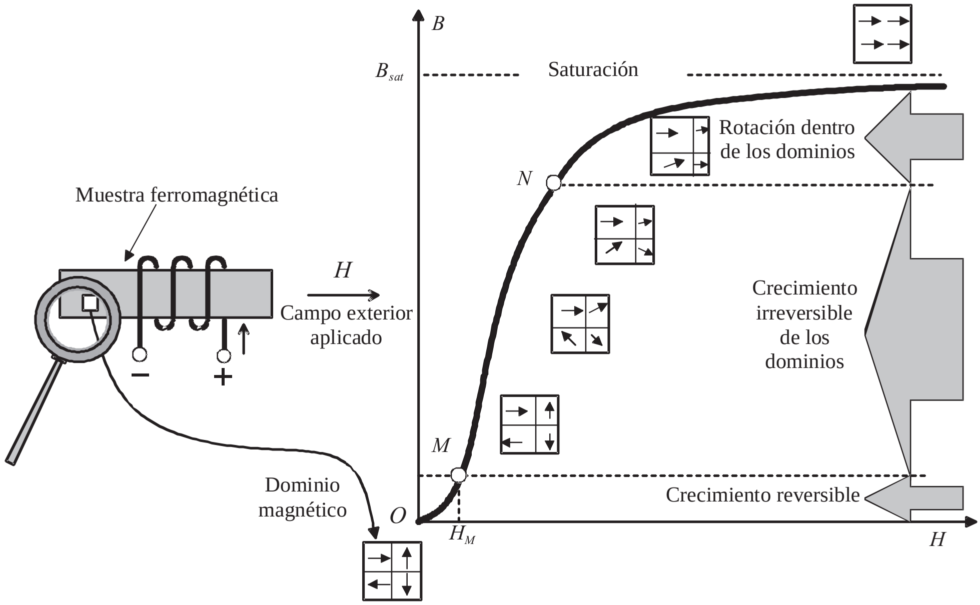


Figura 1.2. Curva de imanación del hierro.

mentos magnéticos dentro de los mismos, de tal forma que cuando los dominios están alineados totalmente se dice que el material se ha saturado, resultando una permeabilidad relativa unidad.

La curva dibujada en la Figura 1.2 se denomina **curva de imanación** de la muestra y en la Figura 1.3 se representan algunas formas de curvas de magnetización (o imanación) para diversos materiales empleados en la construcción de máquinas eléctricas. Se observa que la chapa magnética* posee mejores cualidades magnéticas que el hierro fundido o que el acero fundido, ya que para la misma excitación magnética H se consiguen inducciones más elevadas, lo que supone un volumen menor del material.

Para resolver ejercicios prácticos o estudiar con ayuda de un ordenador un circuito magnético es más conveniente utilizar una expresión analítica que relacione B con H. Una ecuación típica debida a Fröelich es:

$$B = \frac{aH}{1 + bH} \tag{1.6}$$

que eligiendo unos valores adecuados para las constantes a y b, pueden aproximarse a las curvas de magnetización de los materiales reales. [En muchos de los problemas propuestos a lo largo de este capítulo se utilizará la expresión (1.6) para definir las diferentes curvas de magnetización, lo cual da una mayor agilidad a los cálculos; hay que resaltar que en los casos **reales** deberán utilizarse las curvas de magnetización que proporciona el fabricante]. Hay que destacar que la relación $B = f(H)$ en estas curvas no es lineal, lo que indica que la permeabilidad del material definida por:

$$\mu = \frac{B}{H} \tag{1.7}$$

dependerá del valor de la excitación magnética que se aplique.

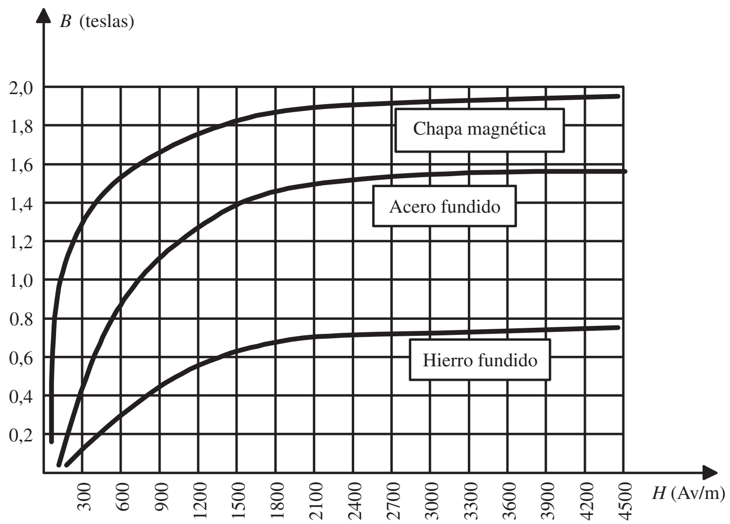
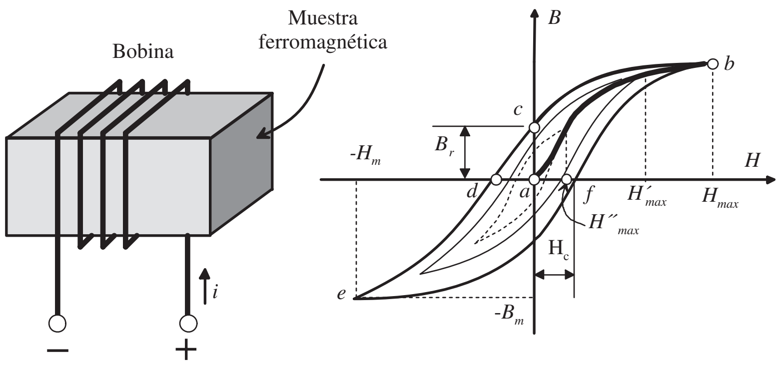


Figura 1.3. Curvas de imanación de diversos materiales.

* En el epígrafe 1.6 se justifica la utilización de las chapas magnéticas en las máquinas eléctricas.

Realmente, el valor de B que se produce en un material ferromagnético debido a una determinada excitación magnética H no es una función **uniforme** como se indica en la Figura 1.3, sino que depende además de la **historia** del material. Para observar este fenómeno, consideremos que la muestra ferromagnética se introduce dentro de una bobina como indica la Figura 1.4*a*. En la Figura 1.4*b* se muestra la curva $B = f(H)$ que se obtiene al aplicar excitaciones magnéticas H de diferente magnitud y signo. Se parte del material desmagnetizado indicado por el punto *a* de la Figura 1.4*b*, y se aplica un campo H creciente introduciendo en la bobina una corriente, p. ej., en la dirección indicada en la Figura 1.4*a*, hasta que se alcanza el punto *b*. Cuando se hace disminuir H, se reduce el valor de B, pero según un camino diferente. Al volver H a cero persiste una cierta magnetización (punto *c*). Al valor de B en este punto se le conoce con el nombre de **magnetismo o inducción remanente** y constituye el estado de magnetización permanente de la muestra. El punto *d* determina el **campo coercitivo**, que es el campo opuesto que resulta necesario aplicar para desmagnetizar la muestra (por inversión en el sentido de la corriente de la bobina de la Figura 1.4*a*). Si continuamos hasta el punto *e* y después invertimos el sentido de cambio de H, llegaremos a formar una curva cerrada denominada **ciclo de histéresis***.

La causa de este ciclo es la dificultad que presenta el desplazar las paredes de los dominios. Las imperfecciones del cristal tienden a fijar las paredes, que como consecuencia no se mueven suavemente con el campo aplicado. Esta histéresis, que en algunos materiales resulta muy grande, es la que permite la existencia de **imanes permanentes** muy potentes. (La condición esencial de todo imán permanente es tener una estabilidad perfecta, es decir, guardar mucho tiempo sin variación sus propiedades magnéticas. Debe, pues, tener un magnetismo remanente intenso y una fuerza coercitiva importante. Para imantar una barra se enrollan a su alrededor espiras conductoras repartidas regularmente por toda su superficie y se hace circular durante un tiempo una corriente continua intensa. La evolución de los imanes permanentes ha sido considerable en los últimos cincuenta años. Al principio se utilizaba únicamente acero al carbono; actualmente se emplean aleaciones especiales a base de hierro, níquel, cobalto e incluso con



a) Bobina con núcleo de hierro *b*) Ciclos de histéresis

Figura 1.4. Ciclo de histéresis.

* El término *histéresis* procede del griego y significa retraso, indicando con ello el retardo en la imanación de un material respecto al campo aplicado. Por ejemplo, cuando H es positivo y alcanza el valor cero, B es todavía positiva en el valor remanente B_r, o cuando B llega a cero, entonces H tiene ya un valor negativo y representa el campo coercitivo H_c.

Tabla 1.1. Parámetros de la curva de histéresis para diversos materiales

Nombre	*Composición* %	μ_r *máxima*	H_c *A.v/m*	B_r *Teslas*	*Resistividad* $\Omega - m \times 10^{-8}$
Hierro	99,9 Fe	5.000	80	2,15	10
Hierro al silicio	4 Si; 96 Fe	7.000	48	1,97	59
Hierro al silicio	3,3 Si; 96,7 Fe	10.000	16	2	50
Permalloy	45 Ni; 54 Fe	25.000	24	1,6	50
Mumetal	75 Ni; 2 Cr; 5 Mn; 18 Fe	110.000	2,4	0,72	60

elementos de las tierras raras.) Las sustancias ferromagnéticas con mucha histéresis se llaman **duras**, mientras que las que presentan poca se denominan **blandas** o **dulces**. Se observa en la Figura 1.4*b* que para un valor de *H* corresponden varios de *B*, lo que matemáticamente expresa una función multiforme y que indica, como ya se adelantaba antes, que el estado magnético depende de la historia del material, es decir, depende de los estados magnéticos anteriores. Hay, sin embargo, una curva *B(H)* perfectamente determinada, y es la que se obtiene uniendo los *vértices* de los ciclos correspondientes a diversos $H_{máx}$ aplicados (Fig. 1.4*b*), lo que da origen a la curva de magnetización de la sustancia indicada en la Figura 1.3 para diversos materiales. En la Tabla 1.1 se muestran algunos valores característicos de la curva de histéresis (y algunos otros parámetros) para diversos materiales empleados en la Tecnología Eléctrica.

1.3. LEYES DE LOS CIRCUITOS MAGNÉTICOS

La descripción exacta del campo magnético requiere el uso de las ecuaciones de Maxwell y el conocimiento de las relaciones entre la inducción **B** y la intensidad del campo magnético **H** en el medio en el que se establecen los campos. Como quiera que en lo concerniente a las máquinas eléctricas las frecuencias de las señales puestas en juego son bajas, se pueden emplear con suficiente exactitud las aproximaciones que implican la utilización de lo que en electromagnetismo se denomina campo cuasiestacionario. En definitiva, se puede despreciar la corriente de desplazamiento en las ecuaciones de Maxwell, siendo por consiguiente válidas las relaciones magnetostáticas siguientes:

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \textbf{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{1.8}$$

Recuérdese de un curso de electromagnetismo que la primera relación anterior indica la imposibilidad física de poder aislar los polos magnéticos, representa de otro modo una forma elegante de justificar el carácter solenoidal de las líneas de inducción **B** (las líneas de campo magnético son cerradas, sin principio ni fin). La segunda ecuación (1.8) es la ley de Ampère en forma diferencial y que en forma integral se convierte en:

$$\oint_\gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \Sigma\, i = Ni = \mathscr{F} \qquad [\text{A.v}] \tag{1.9}$$

que indica que la circulación del campo magnético **H** a lo largo de un camino cerrado γ es igual a la suma de corrientes que atraviesan cualquier superficie *S* apoyada en el camino. Si existen *N* espiras llevando cada una la corriente *i*, la suma de corrientes será igual al produc-

to Ni. Este producto tiene gran importancia en el estudio de las máquinas eléctricas y se denomina *fuerza magnetomotriz* $\mathcal{F}$ (de un modo abreviado, f.m.m.) y que se mide en una unidad útil para el ingeniero denominada **amperivuelta** (A.v). La f.m.m. es la causa de que se establezca un campo magnético en un circuito, de un modo análogo al de fuerza electromotriz (f.e.m.) que es la causa, en un circuito eléctrico, de que se establezca una corriente eléctrica.

En la mayoría de las situaciones prácticas que se suelen dar en el estudio de las máquinas eléctricas, el camino γ elegido para aplicar la ley de Ampère (1.9) coincide con la trayectoria media seguida por las líneas de campo magnético **H**; por otro lado, si el material es homogéneo e isótropo, la magnitud de **H** es la misma en todo el recorrido, de ahí que (1.9) se transforme en la ecuación escalar siguiente:

$$H\ell = \mathcal{F} = Ni \tag{1.10}$$

en la que ℓ representa la longitud magnética media de las líneas de H.

Si el recinto γ no es atravesado por ninguna corriente, la ecuación (1.9) nos indica que el campo magnético es entonces irrotacional y que por consiguiente procede del gradiente de un campo escalar denominado potencial magnético U, es decir:

$$\textbf{rot}\,\mathbf{H} = 0 \Rightarrow \oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \mathbf{H} = -\,\mathrm{grad}U \qquad [\mathrm{A.v/m}] \tag{1.11}$$

el potencial magnético U es análogo al potencial escalar eléctrico V.

La última ecuación (1.8) representa la relación existente entre los campos B y H y que se denomina permeabilidad. En los materiales homogéneos e isótropos se cumple la relación modular:

$$B = \mu H \qquad [\mathrm{T}] \tag{1.12}$$

ya que B y H son uniformes y los campos vectoriales correspondientes tienen la misma dirección y sentido. En los materiales ferromagnéticos, μ tiene un valor elevado y no es uniforme, lo que significa que su magnitud depende del módulo de H. Para los demás materiales, sean aislantes o conductores eléctricos, la permeabilidad es prácticamente la del vacío :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \qquad [\mathrm{H/m}]$$

Otro concepto que se debe recordar es el de flujo magnético Φ que atraviesa un área S, que viene definido por:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \qquad [\mathrm{Wb}] \tag{1.13}$$

y que en unidades S.I. se mide en Webers. En la práctica, la inducción magnética es prácticamente constante en la sección transversal de los núcleos ferromagnéticos y además tiene la misma dirección que la superficie, y por ello (1.13) se transforma en:

$$\Phi = B\,S \qquad [\mathrm{Wb}] \tag{1.14}$$

de este modo, si se tienen en cuenta las expresiones (1.10), (1.12) y (1.14), resulta:

$$\mathcal{F} = H\ell = \frac{B\ell}{\mu} = \Phi\frac{\ell}{\mu S} \qquad [\mathrm{A.v}] \tag{1.15}$$

Si se denomina **reluctancia** magnética $\mathscr{R}$ a:

$$\mathscr{R} = \frac{\ell}{\mu S} \qquad [\mathrm{H}^{-1}] \tag{1.16}$$

la ecuación (1.15) se puede escribir:

$$\mathscr{F} = \Phi \, \mathscr{R} \qquad [\mathrm{A.v}] \tag{1.17}$$

que es una expresión fundamental para el estudio de los circuitos magnéticos y que se denomina **ley de Hopkinson**, o ley de Ohm de los circuitos magnéticos, por su analogía con la ley de Ohm de las redes eléctricas:

$$e = i\,R \qquad [\mathrm{V}] \tag{1.18}$$

Como se deduce de las expresiones anteriores, existe una gran analogía entre los circuitos eléctricos y magnéticos que hacen que puedan estudiarse los circuitos magnéticos con las mismas técnicas desarrolladas en el análisis de los circuitos eléctricos. Pero antes de dar a conocer todas las analogías existentes entre ambos tipos de circuitos, conviene destacar que el circuito magnético difiere del circuito eléctrico en varios aspectos, que hacen difícil el que se pueda llegar al mismo grado de precisión en los cálculos de estructuras magnéticas que en los cálculos de circuitos eléctricos. La corriente eléctrica se considera que se limita a un camino definido (el hilo conductor); el aire circundante y los soportes aislantes del hilo tienen una resistencia muy elevada, de manera que las corrientes de dispersión que escapan del hilo son casi siempre despreciables comparadas con la corriente que pasa por dicho hilo. Pero no se conoce ningún aislante para el flujo magnético; de hecho, el propio aire es un conductor magnético relativamente bueno; por lo tanto, es imposible señalar a las líneas de campo magnético caminos definidos como los que se establecen para las corrientes eléctricas. Por ejemplo, en el circuito magnético de la Figura 1.5 se observa que del flujo total producido por la bobina Φ_t, parte se dispersa por el aire: Φ_d y otra parte que denominaremos flujo útil Φ_u atraviesa el núcleo de tal forma que se denomina coeficiente de **dispersión o de Hopkinson** v al cociente :

$$v = \frac{\Phi_t}{\Phi_u} = \frac{\Phi_u + \Phi_d}{\Phi_u} = 1 + \frac{\Phi_d}{\Phi_u} \tag{1.19}$$

El flujo de dispersión oscila entre el 10 y el 30 por 100 del flujo útil, por lo que el coeficiente de Hopkinson varía entre v = 1,1 a 1,3. Este coeficiente tiene gran importancia en el análisis de los circuitos magnéticos de las máquinas eléctricas.

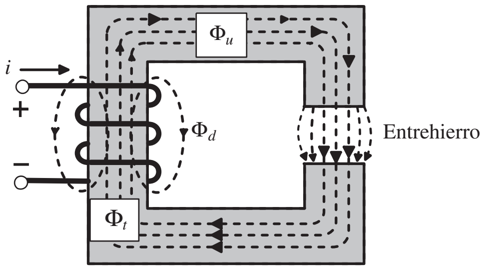


Figura 1.5. Dispersión magnética en la bobina. Expansión del campo magnético en el entrehierro.

Otro efecto a considerar en los circuitos magnéticos es la expansión que ofrecen las líneas de campo, al circular el flujo por espacios de aire, denominados **entrehierros**, como se indica en la Figura 1.5, lo que hace que se incremente el área efectiva de circulación del flujo en los mismos respecto a la superficie geométrica real. En el desarrollo de este capítulo se considerará, mientras no se diga lo contrario, que la dispersión y expansión de las líneas de campo son despreciables.

Una vez hechas todas estas consideraciones y para comprender más plenamente todas las analogías entre los circuitos eléctricos y magnéticos, se van a considerar los esquemas de las Figuras 1.6*a* y *b*. En la Figura 1.6*a* se ha representado un circuito eléctrico formado por un conductor de conductividad σ, longitud ℓ y sección uniforme S, alimentado por una pila de f.e.m. e. En la Figura 1.6*b* se muestra un circuito magnético de permitividad μ, longitud ℓ y sección uniforme S, alimentado por una bobina de f.m.m. $\mathcal{F} = Ni$.

En el circuito eléctrico, el campo eléctrico no conservativo de la pila $\mathbf{E}_g$ produce una d.d.p. en bornes, que a su vez provoca un campo eléctrico $\mathbf{E}$ en todos los puntos del conductor, dando lugar según la ley de Ohm a una densidad de corriente $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, cumpliéndose las relaciones básicas siguientes:

a) Fuerza electromotriz: $e = \oint_\gamma \mathbf{E}_g \cdot d\mathbf{l}$

b) Principio de continuidad: $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$

c) Ley de Ohm diferencial: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$

d) Corriente eléctrica: $i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$

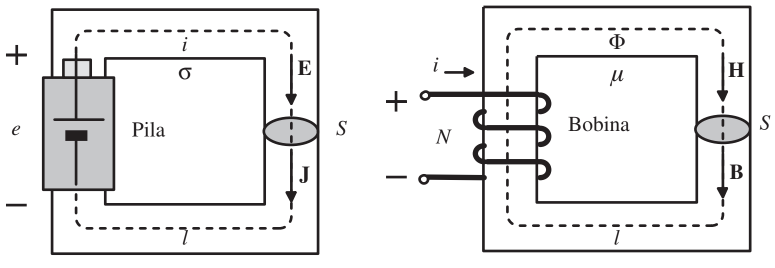
e) D.d.p. entre dos puntos: $V_{12} = V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

En el circuito magnético, la f.m.m. Ni provoca la aparición de un campo magnético H a lo largo de todo el circuito magnético, que da lugar a una inducción $B = \mu H$, cumpliéndose las relaciones básicas siguientes:

a) Fuerza magnetomotriz (ley de Ampère): $\mathcal{F} = \oint_\gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$

b) Carácter solenoidal de B: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$

c) Relación del medio: $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$



a) Circuito eléctrico

b) Circuito magnético

Figura 1.6. Analogía circuito eléctrico-circuito magnético.

d) Flujo magnético: $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ (1.20)

e) D.d.p. magnético: $U_{12} = U_1 - U_2 = \int_1^2 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ (1.21)

Comparando las ecuaciones (1.20) y (1.21) podemos establecer las analogías mostradas en la Tabla 1.2.

Se observa que la f.m.m. $\mathcal{F} = Ni$ en el circuito magnético cumple la misma función que la f.e.m. e en el circuito eléctrico, la inducción **B** es análoga a la densidad de corriente **J,** la permeabilidad μ es análoga a la conductividad σ, el campo magnético **H** es análogo al campo eléctrico **E**, el flujo magnético Φ es análogo a la corriente eléctrica i y el potencial magnético U es análogo al potencial eléctrico V. La tabla de analogías anterior puede ampliarse a magnitudes más útiles para el ingeniero. Así, resulta más práctico emplear conceptos de relaciones entre tensiones y corrientes que de campos. Sabemos, por ejemplo, que el principio de continuidad de la corriente en los circuitos eléctricos conduce al primer lema de Kirchhoff:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \sum i = 0 \tag{1.22}$$

que nos indica que la suma de corrientes que llegan a un nudo es igual a cero.

De un modo equivalente, teniendo en cuenta que en los circuitos magnéticos el flujo es análogo a la corriente de los circuitos eléctricos, se cumplirá en un nudo magnético:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \sum \Phi = 0 \tag{1.23}$$

ecuación que representa el primer lema de Kirchhoff aplicado a los circuitos magnéticos: **la suma de flujos que llegan a un nudo magnético es igual a cero**. Por otro lado, la ley de Ohm en forma diferencial: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, se convierte en forma integral:

$$e = Ri \tag{1.24}$$

donde R es la resistencia del circuito, que en función de la longitud ℓ, sección S y conductividad σ vale:

$$R = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S} \tag{1.25}$$

Tabla 1.2. Parámetros equivalentes entre los circuitos eléctrico y magnético

Circuito eléctrico	*Circuito magnético*
e: f.e.m. [V]	$\mathcal{F}$: f.m.m. [A.v]
J: densidad de corriente [A/m]	**B**: inducción [T]
σ: conductividad [S/m]	μ: permeabilidad [H/m]
E: campo eléctrico [V/m]	**H**: campo magnético [A.v/m]
i: corriente eléctrica [A]	Φ: flujo magnético [Wb]
V: potencial eléctrico [V]	U: potencial magnético [A.v]

Para los circuitos magnéticos, la ecuación equivalente a (1.24) es la ley de Hopkinson que ya se determinó en (1.17):

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \cdot \Phi \tag{1.26}$$

donde la reluctancia $\mathcal{R}$ se definió en (1.16):

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu}\frac{\ell}{S} \tag{1.27}$$

el lector comprobará las analogías entre las expresiones de la resistencia eléctrica (1.25) y la reluctancia magnética (1.27). Según (1.26), la unidad de reluctancia magnética es el cociente de A.v/Wb, que es la inversa del henrio, es decir, H^{-1}. El inverso de la reluctancia magnética se denomina ***permeancia*** $\mathcal{P} = 1/\mathcal{R}$ y su unidad es el henrio (H).

En la práctica de los circuitos eléctricos, la ley de Ohm se convierte en el segundo lema de Kirchhoff:

$$\sum e = \sum Ri \tag{1.28}$$

y de un modo análogo, en circuitos magnéticos, la ley de Hopkinson (1.26) se transforma en:

$$\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{R}\,\Phi \tag{1.29}$$

que indica que en un circuito magnético la suma de f.m.m.s. en una malla es igual a la suma de caídas de tensiones magnéticas, representadas por la suma de los productos de las reluctancias por los flujos.

Las ecuaciones (1.23) y (1.29) son la base del cálculo de las estructuras magnéticas. En la Tabla 1.3 se han representado estas ecuaciones a modo de síntesis y su comparación con las ecuaciones de los circuitos eléctricos. También se muestran las leyes de asociación de reluctancias, que son análogas a las de asociación de resistencias.

De lo que antecede se deduce que un circuito magnético puede resolverse, al menos a primera vista, como si se tratara de un circuito eléctrico, con las analogías presentadas en las Tablas 1.2 y 1.3. En realidad, la resolución es algo más compleja porque hay una diferencia esencial que hemos ocultado al lector, que hace que el cálculo no sea tan directo. Efectivamente, si en la resolución de un problema de circuitos magnéticos deseamos determinar las reluctancias de las diferentes partes del circuito con ayuda de la ecuación (1.27) para más tarde poder aplicar la ley de Hopkinson o su generalización en la forma del segundo lema de Kirchhoff, se caerá enseguida en la cuenta de que el problema no es obvio, ya que para

Tabla 1.3. Leyes equivalentes circuito eléctrico-circuito magnético

Circuito eléctrico	*Circuito magnético*
Primer lema de Kirchhoff: $\sum i = 0$	Primer lema de Kirchhoff: $\sum \Phi = 0$
Segundo lema de Kirchhoff: $\sum e = \sum Ri$	Segundo lema de Kirchhoff: $\sum \mathcal{F} = \sum \mathcal{R}\,\Phi$
Resistencia: $R = \frac{1}{\sigma}\frac{\ell}{S}$ [Ω]	Reluctancia $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu}\frac{\ell}{S}$ $[H^{-1}]$
Resistencias en serie: $R_T = \sum R_i$	Reluctancia en serie: $\mathcal{R}_T = \sum \mathcal{R}_i$
Resistencias en paralelo: $\frac{1}{R_T} = \sum \frac{1}{R_i}$	Reluctancias en paralelo: $\frac{1}{\mathcal{R}_T} = \sum \frac{1}{\mathcal{R}_i}$

determinar $\mathscr{R}$ se necesita saber el valor de $\mu = \mu_0\mu_r$, pero la permeabilidad relativa no se puede conocer hasta que no se conozca H o B, que es lo que en definitiva se desea calcular. En los problemas en los que se parte de una inducción conocida, el cálculo de la f.m.m. se realiza con ayuda de (1.29), donde suele ser más práctico sustituir el segundo miembro por el que se indica en la siguiente ecuación:

$$\sum \mathscr{F} = \sum U = \sum H\ell \tag{1.30}$$

Ahora bien, en el caso de que el dato de referencia sea la f.m.m., la única forma de resolver el problema es por un procedimiento iterativo de **ensayo y error**; es decir, el cálculo comienza eligiendo un valor de B y determinando la f.m.m. necesaria, que se compara con la real aplicada, a continuación se modifica el valor de B anterior hacia arriba o hacia abajo para que la f.m.m. se acerque al valor original y así sucesivamente. Con un poco de práctica, se resuelve el problema con dos o tres iteraciones a lo sumo.

Ejemplo de aplicación 1.1

El núcleo central del circuito magnético de la Figura 1.7 está bobinado con 800 espiras. El material es acero fundido con un valor de la permeabilidad relativa μ_r = 1.000. Calcular la corriente i que debe aplicarse a la bobina para obtener en el entrehierro un flujo de 1 mWb.

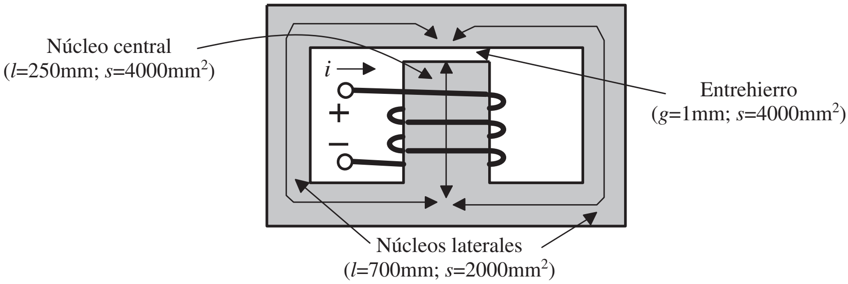


Figura 1.7.

Solución

El circuito eléctrico equivalente es el indicado en la Figura 1.8, donde $\mathscr{R}_1$ indica la reluctancia de los núcleos laterales, $\mathscr{R}_c$ indica la reluctancia del núcleo central y $\mathscr{R}_e$ es la reluctancia del entrehierro. Los valores respectivos son:

$$\mathscr{R}_1 = \frac{1}{\mu_r\,\mu_0\,s} = \frac{700 \cdot 10^{-3}}{1.000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2.000 \cdot 10^{-6}} = 27{,}85 \cdot 10^4\ [\mathrm{H}^{-1}] \quad ;$$

$$\mathscr{R}_c = 4{,}97 \cdot 10^4\ [\mathrm{H}^{-1}] \quad ; \quad \mathscr{R}_e = 19{,}9 \cdot 10^4\ [\mathrm{H}^{-1}]$$

donde se ha tenido en cuenta para el cálculo de $\mathscr{R}_e$ que la permeabilidad relativa del aire es igual a la unidad (obsérvese que la reluctancia del entrehierro es prácticamente cuatro veces la reluctancia del núcleo magnético central, de lo que se deduce la conveniencia de limitar al máximo los *espacios de aire* en los circuitos magnéticos, para reducir lo más posible la f.m.m. de la bobina).

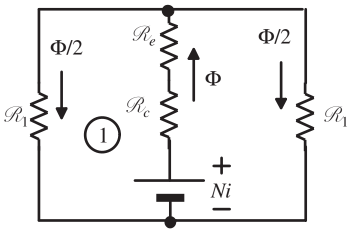


Figura 1.8.

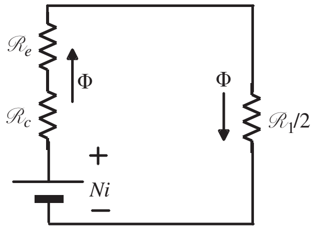


Figura 1.9.

Las reluctancias $\mathscr{R}_1$ de la Figura 1.8 están en paralelo, resultando una reluctancia equivalente:

$$\mathscr{R}_{EQ} = \frac{\mathscr{R}_1}{2} = 13{,}92 \cdot 10^4 \qquad [\mathrm{H}^{1}]$$

dando lugar al circuito de la Figura 1.9. En esta figura, aplicando el segundo lema de Kirchhoff resulta:

$$\sum Ni = \sum \Phi \cdot \mathscr{R} = 10^{-3}\,(4{,}97 + 19{,}9 + 13{,}92) \cdot 10^4 = 387{,}9 \text{ A.v}$$

de donde: $i = \dfrac{387{,}9}{800} = 0{,}485$ A

Ejemplo de aplicación 1.2

Resolver el problema anterior supuesto que la curva de magnetización del acero fundido viene expresada por la ecuación:

$$B = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-3}\,H}{1 + 10^{-3}\,H} \qquad B\text{: Teslas;} \qquad H\text{: A.v/m}$$

Solución

Debido a la simetría del circuito y de acuerdo con la Figura 1.8, el flujo en las columnas laterales vale la mitad que en la columna central, es decir:

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{2} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Como la sección lateral es igual a 2.000 mm^2, la inducción en estas columnas valdrá:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{2.000 \cdot 10^{-6}} = 0{,}25 \text{ Teslas}$$

que llevando a la curva de magnetización del material da un valor de H_1:

$$0{,}25 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-3}\,H_1}{1 + 10^{-3}\,H_1} \;\Rightarrow\; H_1 = 161{,}29 \text{ A.v/m}$$

El núcleo tiene doble flujo y doble sección que las columnas laterales, por lo que se deduce idéntico valor de la inducción y en consecuencia de la excitación H, es decir:

$$H_c = H_1 = 161{,}29 \text{ A.v/m}$$

En cuanto al entrehierro, se cumplirá:

$$B = 0{,}25 \text{ Teslas} \Rightarrow H_e = \frac{B}{\mu_0} = \frac{0{,}25}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1{,}99 \cdot 10^5$$

Aplicando en segundo lema de Kirchhoff a la malla 1 del circuito de la Figura 1.8, de acuerdo con la fórmula se obtiene:

$$Ni = 161{,}29 \cdot 0{,}7 + 161{,}29 \cdot 0{,}25 + 1{,}99 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 352{,}23 \text{ A.v} \Rightarrow i = \frac{352{,}23}{800} = 0{,}44 \text{ A}$$

Ejemplo de aplicación 1.3

En la Figura 1.10 se muestra un circuito magnético realizado con chapa magnética de acero al silicio y cuya curva de imanación se muestra en la Figura 1.3. El entrehierro es de 1 mm, la longitud magnética media de la estructura de chapa es de 1 m y la sección transversal es uniforme de valor: 20 cm². Calcular la inducción magnética en el entrehierro.

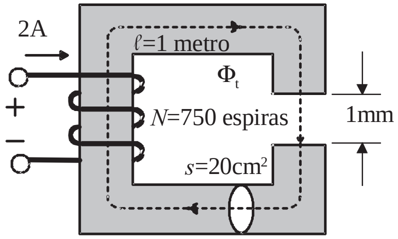


Figura 1.10.

Solución

Cuando se conoce la f.m.m. de la bobina de un circuito magnético realizado con diversos materiales, el cálculo de los flujos o de las inducciones magnéticas no es directo y en general debe utilizarse un método de aproximaciones sucesivas, denominado también de ensayo y error. Sin embargo en casos simples como el que aquí se muestra, existe la posibilidad de utilizar un método gráfico más directo. Para que el lector comprenda la forma de resolución de este tipo de problemas, se van a aplicar aquí ambos procedimientos.

1. Procedimiento de ensayo y error.

En la Figura 1.11 se muestra el circuito eléctrico equivalente del sistema magnético de la Figura 1.10. En una primera aproximación, vamos a considerar que en el punto de trabajo del hierro la permeabilidad relativa de éste es del orden de $\mu_r = 1.000$, lo que significa que 1m de hierro debe tener la misma reluctancia magnética que 1mm de aire (entrehierro), que son las dos longitudes que se muestran en la Figura 1.10 de este problema.

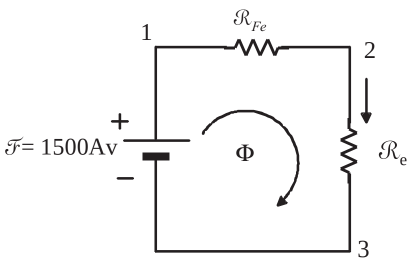


Figura 1.11.

Como quiera que la f.m.m. de la bobina es:

$$\mathcal{F} = Ni = 750 \cdot 2 = 1500 \text{ A.v}$$

Si como se ha supuesto se considera que las reluctancias $\mathcal{R}_{Fe}$ y $\mathcal{R}_e$ son iguales, la d.d.p. magnética entre los nudos 1 y 2 será la misma que entre 2 y 3, y tendrá un valor de 1500/2 = 750 A.v, lo que significa que tanto el hierro como el entrehierro requieren una f.m.m. de la bobina de 750 A.v. Ahora bien como la reluctancia del entrehierro vale:

$$\mathcal{R}_e = \frac{\ell_e}{\mu_0 S} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 3{,}98 \cdot 10^5 \quad [\text{H}^{-1}]$$

de acuerdo con la ley de Hopkinson, el flujo magnético y la inducción correspondiente en el entrehierro serán respectivamente:

$$\Phi_e = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_e} = \frac{750}{3{,}98 \cdot 10^5} = 1{,}88 \text{ mWb} \quad \Rightarrow \quad B_e = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{1{,}88 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-4}} = 0{,}94 \text{ teslas}$$

Al ser un circuito magnético serie, la inducción anterior será la misma que existirá en la estructura de la chapa magnética, por ello si con esta inducción en el entrehierro se va a la curva de imanación de la Figura 1.3 se observa que la chapa magnética requiere un campo magnético del orden de 100 A.v/m y como la longitud del hierro es de 1 m corresponde a 100 A.v, que es muy inferior al valor previsto de 750 A.v. Lo cual significa que la inducción de 0,94 teslas que se ha obtenido con esta primera suposición ha quedado por debajo del valor real que debe tener la estructura magnética. Vamos a elevar por ello la inducción de trabajo a un valor de por ejemplo 1,5 teslas, en este caso el campo en el entrehierro será entonces:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{1{,}5}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 11{,}94 \cdot 10^5 \text{ A.v/m}$$

de este modo la d.d.p. magnética en el entrehierro (entre los nudos 2 y 3 de la Figura 1.11) será:

$$U_{23} = H_e \ell_e = 11{,}94 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1.194 \text{ A.v}$$

Para calcular la d.d.p. magnética en el hierro (entre los nudos 1 y 2 de la Figura 1.11) es preciso ver primero el campo magnético que requiere el hierro para la inducción de 1,5 teslas. La curva de imanación de la Figura 1.3 nos indica que se necesitan unos 510 A.v/m, por lo que la f.m.m. U_{12} será:

$$U_{12} = H_{Fe} \ell_{Fe} = 510 \cdot 1 = 510 \text{ A.v}$$

lo que requerirá una f.m.m. total en la bobina:

$$\mathcal{F} = U_{12} + U_{23} = 1.194 + 510 = 1.704 \text{ A.v/m}$$

que es superior al valor de 1.500 A.v que tiene la bobina según indica el enunciado, pero se acerca bastante a ella. Es preciso entonces reducir un poco la inducción de prueba, probemos ahora con 1,4 teslas, que es un valor algo inferior al anterior. En este caso el campo en el entrehierro tendrá un valor:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{1{,}4}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 1{,}11 \cdot 10^6 \text{ A.v/m}$$

y por consiguiente la diferencia de potencial magnético en el entrehierro será:

$$U_{23} = H_e \ell_e = 1{,}11 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 1.110 \text{ A.v}$$

A continuación se calcula la d.d.p. magnética en el hierro. Como quiera que la inducción en el hierro es también de 1,4 Teslas, la curva de imanación de la Figura 1.3 nos indica que el campo magnético en el hierro es de 400 A.v/m por lo que la f.m.m. U_{12} será:

$$U_{12} = H_{Fe} \ell_{Fe} = 400 \cdot 1 = 400 \text{ A.v}$$

lo que requerirá una f.m.m. total en la bobina:

$$\mathscr{F} = U_{12} + U_{23} = 1.110 + 400 = 1.510 \text{ A.v}$$

que coincide prácticamente con la f.m.m. que tiene la bobina. Es decir la inducción magnética en el entrehierro es prácticamente de 1,4 teslas.

2. Procedimiento gráfico.

De acuerdo con el circuito eléctrico equivalente de la Figura 1.11, la f.m.m. de la bobina es igual a la suma de las d.d.p. magnético entre los nudos 1 y 2 (hierro) y 2-3 (entrehierro) es decir:

$$\mathscr{F} = Ni = H_{Fe}\ell_{Fe} + H_e\ell_e$$

y al despejar el campo magnético en el hierro resulta la siguiente ecuación:

$$H_{Fe} = \frac{Ni}{\ell_{Fe}} - \frac{H_e\ell_e}{\ell_{Fe}} \qquad \text{(a)}$$

y como quiera que la inducción magnética en el entrehierro coincide con la del hierro (circuito serie), el valor del campo en el entrehierro es:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{B_{Fe}}{\mu_0}$$

que al llevar a la ecuación (a) da lugar a:

$$H_{FE} = \frac{Ni}{\ell_{Fe}} - \frac{B_{Fe}}{\mu_0}\frac{\ell_e}{\ell_{Fe}} \qquad \text{(b)}$$

que es la ecuación de una recta que relaciona la inducción y el campo magnético en el hierro. Al dibujar esta recta en el gráfico de la curva de imanación del hierro tal como se muestra en la Figura 1.12, la intersección con esta curva nos da directamente el resultado. Al sustituir valores numéricos en (b), la ecuación de la recta viene expresada por:

$$H_{Fe} = \frac{1.500}{1} - \frac{B_{Fe}}{4\pi \cdot 10^{-7}}\frac{10^{-3}}{1} = 1.500 - 796\, B_{Fe}$$

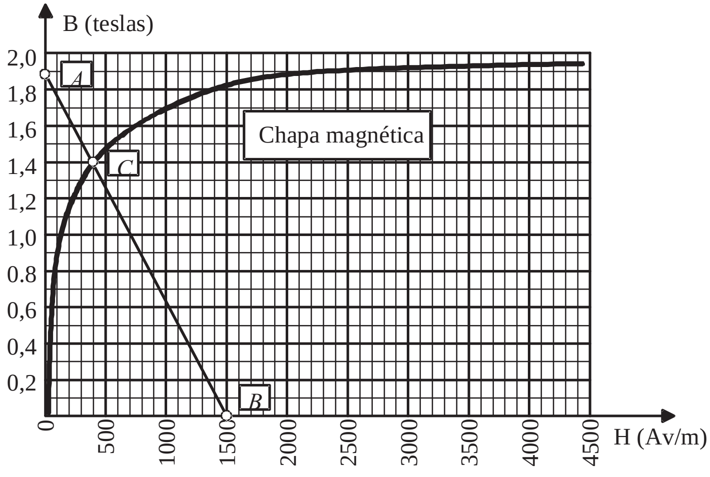


Figura 1.12.

La intersección de esta recta con el eje de ordenadas es:

$$H_{Fe} = 0 \Rightarrow B_{Fe} = \frac{1.500}{796} = 1{,}88 \text{ T}$$

que corresponde al punto *A* de la Figura 1.13. La intersección con el eje de abscisas es:

$$B_{Fe} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{Fe} = 1.500 \text{ A.v/m}$$

que corresponde al punto *B* de la Figura 1.12. De este modo se puede dibujar la recta y la intersección de la misma con la curva de imanación da lugar al punto *C* que corresponde a una inducción magnética de prácticamente 1,4 teslas y a un campo magnético necesario de 400 A.v/m, y como la longitud del hierro es de 1 metro corresponden a un f.m.m. de 400 A.v por lo que el resto de 1.500 − 400 = = 1.100 A.v será la f.m.m. requerida por el entrehierro, valores que coinciden con los obtenidos con el procedimiento anterior de ensayo y error.

Ejemplo de aplicación 1.4

El esquema de la Figura 1.13 corresponde al circuito magnético de una máquina eléctrica rotativa. Existen dos núcleos polares sobre los que se colocan unos devanados de «excitación» cuya misión es crear el flujo que atraviese al «inducido», y éste va devanado con un bobinado (no indicado en la figura) donde se genera la f.e.m. de la máquina al girar el inducido movido por una energía mecánica externa.

Las dimensiones son las indicadas en la Figura 1.13, y los materiales con los que está construida la máquina son: Núcleos polares, inducido: chapa magnética. Culata: acero fundido. Las curvas de magnetización de estos materiales son las indicadas en la Figura 1.3. Calcular el número de Amperios-vuelta por polo necesarios para producir una inducción en el entrehierro de 1 Tesla, supuesto que el coeficiente de Hopkinson entre los polos y el inducido vale 1,15.

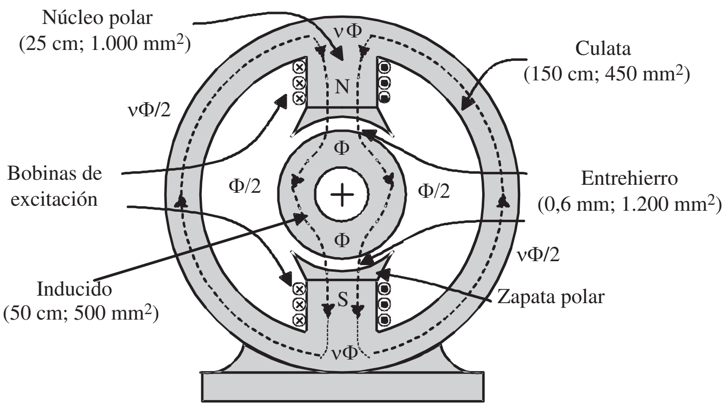


Figura 1.13.

Solución

Para resolver este problema se seguirá el mismo desarrollo que en los ejemplos anteriores, calculando la d.d.p. magnética necesaria en cada parte de la máquina. En la Figura 1.14 se muestra el circuito eléctrico equivalente. Obsérvese que debido a la dispersión del flujo magnético al pasar éste del estátor al rotor, el flujo en los polos es $\nu\Phi$, siendo Φ el flujo en el entrehierro, y de este modo resulta:

a) **Entrehierro.** La inducción en esta zona vale 1 Tesla, lo que equivale a un campo magnético H_e:

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 7{,}96 \cdot 10^5 \text{ A.v/m}$$

De este modo las diferencias de potenciales magnéticos en cada entrehierro serán:

$$U_e = U_{CD} = U_{EF} = H_e\, l_e = 7{,}96 \cdot 10^5 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-3} = 477{,}6 \text{ A.v}$$

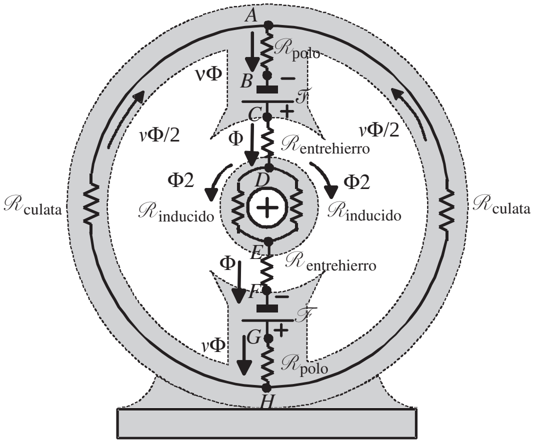


Figura 1.14.

b) **Inducido:** El flujo que atraviesa el entrehierro vale:

$$\Phi_e = \Phi = B\, S_e = 1 \cdot 1.200 \cdot 10^{-6} = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

Al llegar al inducido se divide en dos partes iguales: $\Phi_i = \Phi/2 = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Wb, lo que corresponde a una inducción en el núcleo:

$$B_i = \frac{\Phi_i}{s_i} = \frac{0{,}6 \cdot 10^{-3}}{500 \cdot 10^{-6}} = 1{,}2 \text{ Teslas}$$

lo que equivale en la curva de chapa magnética de la Figura 1.3 a un campo magnético aproximado H_i = 200 A.v/m. Como la longitud de cada parte del inducido es de 50 cm, se tendrá una d.d.p. U_{DE} dada por:

$$U_i = U_{DE} = H_i\, l_i = 200 \cdot 0{,}5 = 100 \text{ A.v.}$$

c) **Núcleos polares:** El flujo en los polos, teniendo en cuenta la dispersión, es igual a 1,15 veces el flujo en el entrehierro, es decir:

$$\Phi_p = \nu\Phi_e = 1{,}15 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-3} = 1{,}38 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow B_p = \frac{\Phi_p}{s_p} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-3}}{1.000 \cdot 10^{-6}} = 1{,}38 \text{ Teslas}$$

lo que equivale en la curva de chapa magnética de la Figura 1.3 a un campo magnético H_p = = 400 A.v/m. Como la longitud de cada polo es igual a 25 cm, se tendrán las siguientes diferencias de potencial magnético:

$$U_p = U_{AB} = U_{GH} = 400 \cdot 0{,}25 = 100 \text{ A.v.}$$

d) **Culata:** El flujo que circula por cada una de las partes de la culata es la mitad del que atraviesa los polos, es decir:

$$\Phi_c = \frac{\Phi_p}{2} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-3}}{2} = 0{,}69 \cdot 10^{-3} \text{ Wb} \Rightarrow B_c = \frac{\Phi_c}{S} = \frac{0{,}69 \cdot 10^{-3}}{450 \cdot 10^{-6}} = 1{,}53 \text{ Teslas}$$

por lo que el campo H_c necesario, que se obtiene en la curva de imanación del acero fundido de la Figura 1.3, vale: $H_c = 2.200$ A.v/m, de este modo la d.d.p. magnética en cada parte de la culata será:

$$U_c = U_{HA} = H_c\, l_c = 2.200 \cdot 1{,}5 = 3.300 \text{ A.v}$$

Para calcular la f.m.m. total, obsérvese que en la Figura 1.14 se cumple:

$$2\mathscr{F} = U_{AB} + U_{CD} + U_{DE} + U_{EF} + U_{GH} + U_{HA} \Rightarrow 2\mathscr{F} = 2\,U_e + U_i + 2U_p + U_c$$

que al sustituir valores da lugar a una f.m.m. por polo:

$$\mathscr{F} = \frac{2477{,}6 + 100 + 2.100 + 3.300}{2} = 2.278 \text{ A.v}$$

AMPLÍE SUS CONOCIMIENTOS

1. Efecto de las ranuras en la reluctancia del entrehierro. Coeficiente de Carter

En el Ejemplo de Aplicación 1.4, se ha calculado la f.m.m. necesaria en los polos de una máquina eléctrica ideal en el que se ha hecho caso omiso de los efectos de las ranuras en la distribución del campo magnético en el entrehierro. En la práctica resulta difícil determinar con exactitud la reluctancia del entrehierro debido a que la combinación ranura-diente produce una distribución de la inducción magnética en el entrehierro que deja de ser radial y sigue una forma similar a la que se muestra en el rotor dentado de la Figura 1.15*a* , es decir el campo se hace más denso por encima de los dientes y se rarifica por encima de las ranuras, recorriendo en este caso un camino que es muy superior al valor del espesor del entrehierro. De este modo la determinación precisa de la reluctancia del entrehierro no es un problema obvio ya que no está claro cuál es el área efectiva de paso de flujo magnético en el entrehierro y tampoco cuál es la longitud equivalente del mismo. Este problema es muy importante para los ingenieros que se dedican al proyecto y construcción de máquinas eléctricas.

Es evidente que si se considera un rotor liso con un entrehierro de espesor constante g, la reluctancia del entrehierro correspondiente a un paso de ranura τ_r para un rotor de longitud axial L viene expresada por:

$$\mathscr{R}_{\text{liso}} = \frac{g}{\mu_0 L \tau_r} \qquad (1)$$

en el caso opuesto, si se supone que no pasa flujo magnético por las ranuras, la reluctancia correspondiente sería:

$$\mathscr{R}_{\text{solo dientes}} = \frac{g}{\mu_0 L (\tau_r - b_r)} \qquad (2)$$

donde b_r es la anchura de una ranura. Evidentemente ninguna de las dos ecuaciones anteriores es la correcta. La reluctancia real estará comprendida entre las dos anteriores. El ingeniero inglés

Frederick William Carter (1870-1952) demostró en 1901* que la reluctancia correcta era de la forma:

$$\mathcal{R}_{\text{ran}} = \frac{g}{\mu_0 L(\tau_r - \sigma b_r)} \tag{3}$$

donde σ se denomina *coeficiente de ranura*.

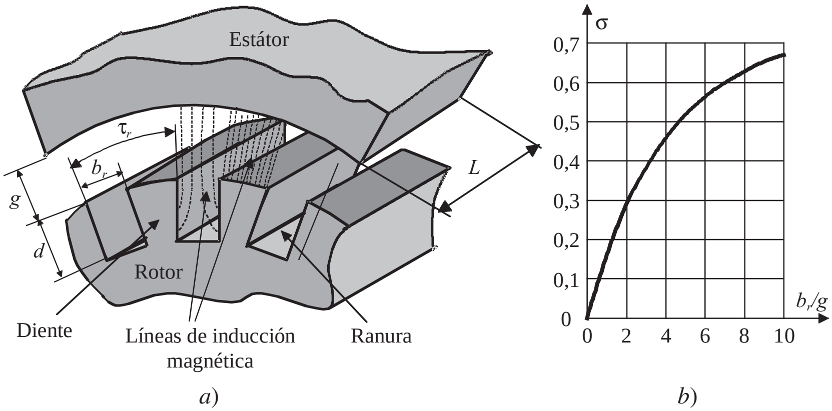


Figura 1.15. *a*) Distribución de la inducción magnética en un rotor dentado. *b*) Coeficiente de ranura.

Para resolver este problema Carter utilizó la ecuación de Laplace bidimensional para la tensión magnética y determinó las superficies equipotenciales entre el rotor ranurado y las superficies polares (analogía eléctrica-magnética), supuso para ello que las ranuras eran abiertas y de profundidad infinita y utilizó la transformación conforme de Schwarz-Christoffel para modificar la geometría real de las ranuras en el plano complejo $\mathbf{z} = x + jy$ en otra más simple en el plano transformado $\mathbf{w} = u + jv$, llegando a la conclusión que el coeficiente de ranura incluido en la ecuación (3) venía expresado por:

$$\sigma = \frac{2}{\pi}\left\{\text{arctg}\,\frac{b_r}{2g} - \frac{g}{b_r}\ln\left[1 + \left(\frac{b_r}{2g}\right)^2\right]\right\} \tag{4}$$

En la Figura 1.15*b* se muestra el valor del coeficiente de ranura σ en función del cociente b_r/g. Posteriormente otros investigadores encontraron una expresión más simple de (4) y que da prácticamente los mismos resultados que la ecuación original para los cocientes b_r/g que aparecen en los diseños reales y que responde a la ecuación de la siguiente hipérbola:

$$\sigma = \frac{b_r/g}{5 + b_r/g} \tag{5}$$

Posteriormente Carter introdujo un **parámetro k_c** mayor que la unidad denominado **factor de Carter**, que es el cociente entre las reluctancias de un rotor ranurado y un rotor liso, de tal modo que según (1) y (3) se cumple:

$$k_c = \frac{\mathcal{R}_{\text{ran}}}{\mathcal{R}_{\text{liso}}} = \frac{\tau_r - \sigma b_r}{\tau_r} \tag{6}$$

* F. W. Carter, *Air-Gap Induction*, Electrical World, 38 (1901), pp. 884-888.

expresión que relaciona el factor de Carter k_c con el coeficiente de ranura σ. De la ecuación anterior (6) y teniendo en cuenta (1) se puede escribir:

$$\mathscr{R}_{\text{ran}} = k_c \mathscr{R}_{\text{liso}} = k_c \frac{g}{\mu_0 L \tau_r} = \frac{g_{eq}}{\mu_0 L \tau_r} \qquad (7)$$

donde $g_{eq} = k_c\, g$. La ecuación anterior (7) es muy importante porque permite calcular la reluctancia de un rotor ranurado como si fuera liso con tal de utilizar un entrehierro equivalente o efectivo g_{eq} que viene relacionado con el entrehierro real g por medio del factor de Carter.

En definitiva y como resumen: el proceso a seguir para el cálculo de la reluctancia de una máquina dentada (estén los dientes en el estátor o en el rotor) consiste en determinar el cociente b_r/g, de tal modo que con ayuda de la curva de la Figura 1.15*b* (o la expresión aproximada (5)) se obtiene el coeficiente de ranura σ, después por medio de (6) se calcula el factor de Carter k_c y finalmente mediante (7) se determina la reluctancia real. Desde un punto de vista estricto el desarrollo analizado solamente es válido para una máquina con ranuras abiertas, pero estudios posteriores demostraron que se puede aplicar sin demasiado error a otros tipos de ranuras de tipo semicerrado o semiabierto. El esquema de la Figura 1.15*a* representa en particular el circuito magnético de una máquina de c.c. en la que en el estátor están los polos y en el rotor el inducido, que tiene ranuras y dientes. En el caso de otras máquinas, como por ejemplo el motor asíncrono o de inducción, se dispone de dientes y ranuras tanto en la estructura del estátor como la del rotor. El procedimiento anterior sigue siendo válido introduciendo factores de Carter tanto para el estátor como para el rotor, de tal modo que el factor de Carter resultante es el producto de los dos factores considerados. El aumento de la reluctancia de entrehierro debido a la presencia de ranuras y dientes supone que para una misma f.m.m. aplicada a la máquina se produce una reducción de la inducción magnética respecto a una estructura magnética lisa o de otro modo, si se desea conseguir una determinada inducción magnética en el entrehierro se requiere una mayor f.m.m. en el devanado de excitación de la máquina que el previsto con estructura lisa. Efectos similares aparecen cuando existen conductos de ventilación en el apilamiento axial de las chapas magnéticas utilizados en la construcción de las máquinas eléctricas. En la actualidad el análisis de la distribución de campo magnético en las máquinas eléctricas se realiza con programas matemáticos que utilizan el método de los elementos finitos.

1.4. IMANES PERMANENTES

1.4.1. Generalidades

Los imanes permanentes son materiales magnéticos duros, lo que significa, según se ha señalado en el epígrafe 1.2.3, que poseen un ciclo de histéresis definido por una alta inducción remanente B_r y sobre todo por un campo coercitivo H_c muy elevado para que de este modo presenten una buena resistencia a la desmagnetización cuando trabajan en campos magnéticos externos. El primer imán permanente conocido fue la piedra imán que era un óxido de hierro conocido por el nombre de magnetita (Fe_2O_3), y cuyas acciones de atracción sobre el hierro asombraban a los griegos (600 años a.C.). Las primeras máquinas eléctricas construidas en la década de 1870 utilizaban imanes permanentes realizados con aleaciones de hierro, pero enseguida se sustituyeron por electroimanes para conseguir las altas inducciones que se requerían en los entrehierros de las máquinas eléctricas. Con el desarrollo de los aceros especiales con cromo y cobalto en la década de 1920, se produjeron imanes permanentes artificiales de mejores características. Sin embargo el gran paso en la construcción de imanes permanentes se produjo en la década de 1930, con el desarrollo de imanes de ALNICO, cuyo nombre procede de los elementos utilizados en su elaboración que aparte del hierro son alu-

minio, níquel y cobalto. Una vez magnetizados los imanes mediante la excitación con devanados alimentados por corriente continua, los imanes de Alnico desarrollaban fuerzas de cinco a quince veces superiores a la magnetita. En la década de 1950 la Compañía holandesa Philips inventó los primeros imanes no metálicos, a base de cerámicas formadas por polvo de óxido de hierro mezclado con bario o estroncio y que se moldeaban a alta temperatura y presión; estas cerámicas se conocen con el nombre genérico de *ferritas* y tienen una gran aplicación en la industria de la electrónica y de las comunicaciones. En la década de 1970, el Dr. Karl Strnat, que trabajaba en el Laboratorio de Materiales de las fuerzas aéreas norteamericanas, descubrió un tipo de imán permanente a base de materiales de las tierras raras, formados por samario y cobalto, que trabajaban a alta temperatura y que desarrollaban una fuerza 50 veces superior a la magnetita. Por fin en la década de 1980, se produce otra nueva revolución en la construcción de imanes permanentes, cuando la Compañía japonesa Sumimoto y la empresa americana General Motors, anuncian el descubrimiento de imanes permanentes a base de neodimio-hierro-boro, que producen una fuerza de atracción 75 veces superiores a la magnetita. Estos últimos descubrimientos han provocado grandes cambios en la industria eléctrica, ya que han permitido sustituir los electroimanes de los devanados de excitación de las máquinas por imanes permanentes en la construcción de pequeños generadores y motores eléctricos, el desarrollo de nuevos tipos de relés, aparatos de medida eléctricos de tipo analógico, servomotores, contadores eléctricos, separadores magnéticos, motores de accionamiento de discos duros de ordenador, etc.

En la Figura 1.16 se muestran las curvas de desmagnetización de los materiales empleados en la fabricación de imanes permanentes citados anteriormente. Estas curvas son la representación en el segundo cuadrante de los ciclos de histéresis correspondientes. Los imanes tipo Alnico tienen una inducción remanente B_r que puede llegar hasta 1,2 T y un campo coercitivo H_c comprendido entre 90 y 140 kA/m; la temperatura de Curie es cercana a los 750 °C y el producto $(B_m H_m)_{\text{máx}}$ es del orden de 50 kJ/m^3. Los imanes de Alnico son mecánicamente duros y son por ello difíciles de mecanizar. Las ferritas tienen una inducción remanente B_r de 0,4 T y un campo coercitivo que llega a $H_c \approx 250$ kA/m; la temperatura de Curie es cercana a los 450 °C y el producto $(B_m H_m)_{\text{máx}}$ es del orden de 20 kJ/m^3. Las ferritas son de la familia de las cerámicas, por lo que no son conductoras de la electricidad y se utilizan mucho para formar los polos de los motores de c.c. Los imanes de samario-cobalto responden a las formulaciones químicas $Sm_1\,Co_5$ y $Sm_2\,Co_{17}$ y tienen una inducción remanen-

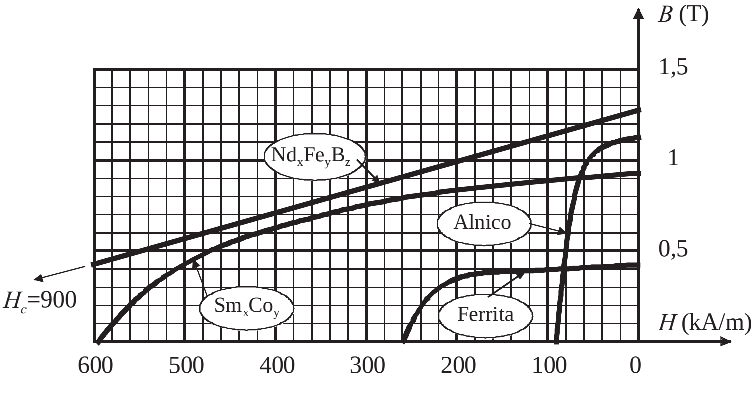


Figura 1.16. Curvas de desmagnetización de diversos materiales empleados en la construcción de imanes permanentes.

te B_r de 0,7 T a 1,1 T y un campo coercitivo H_c comprendido entre 500 y 900 kA/m; la temperatura de Curie es cercana a los 450 °C y el producto $(B_mH_m)_{máx}$ es del orden de 20 kJ/m^3. Los imanes de neodimio-hierro-boro responden a la expresión genérica $Nd_2Fe_{14}B$ y tienen una inducción remanente B_r de 1 T a 1,3 T y un campo coercitivo H_c comprendido entre 600 y 900 kA/m; la temperatura de Curie es cercana a los 310 °C y el producto $(B_mH_m)_{máx}$ puede llegar a 400 kJ/m^3.

1.4.2. Circuitos magnéticos con imanes permanentes

En la Figura 1.17 se muestra un circuito magnético serie, constituido por un imán permanente como fuente de flujo magnético y definido por su longitud ℓ_m, su sección transversal S_m y por la curva de de desmagnetización $B_m = f(H_m)$ correspondiente. El entrehierro tiene una longitud ℓ_e, y una sección transversal S_e y las piezas de hierro superior e inferior de cierre de flujo magnético se suponen que tienen permeabilidad infinita. Asimismo por simplicidad se van a considerar despreciables los flujos de dispersión y la deformación de las líneas de campo magnético en el entrehierro. El problema consiste en determinar los valores de B_m y H_m en el imán permanente y por ende los valores de B_e y H_e en el entrehierro.

Al ser un circuito magnético en serie, el flujo magnético es el mismo en todo el circuito, es decir:

$$\Phi_m = B_mS_m = \Phi_e = B_eS_e \tag{1.31}$$

Por otro lado al aplicar la ley de Ampère al circuito magnético medio se cumple:

$$H_m\ell_m + H_e\ell_e = 0 \tag{1.32}$$

donde los sentidos de H_m y H_e son los del flujo magnético común. Teniendo en cuenta además que en el entrehierro se cumple la relación $B_e=\mu_0H_e$, de las ecuaciones (1.31) y (1.32) se obtiene:

$$B_m = B_e\frac{S_e}{S_m} = \mu_0H_e\frac{S_e}{S_m} = -\mu_0\frac{\ell_m}{\ell_e}H_m\frac{S_e}{S_m} \tag{1.33}$$

es decir:

$$B_m = -\left[\mu_0\frac{\ell_m}{\ell_e}\frac{S_e}{S_m}\right]H_m \tag{1.34}$$

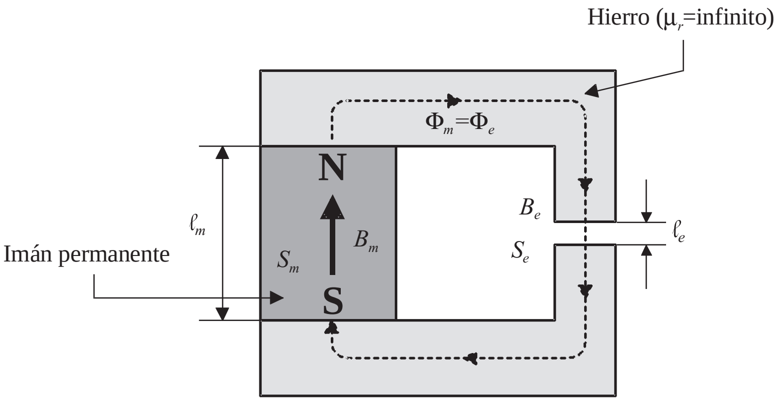


Figura 1.17. Circuito magnético con imán permanente y entrehierro.

que es la ecuación de una recta denominada *línea de carga* o *recta de entrehierro* y cuya intersección con la curva de desmagnetización del imán (situada en el segundo cuadrante), da lugar al punto de funcionamiento del circuito. En la Figura 1.18 se muestra este resultado, donde *OR* es la recta de entrehierro definida por la expresión (1.34) y *M* representa el punto de funcionamiento definido por las coordenadas B_m y H_m. Obsérvese que H_m siempre es negativo y de ahí que reciba el nombre de *campo desmagnetizante*, mientras que B_m siempre es positivo.

Si en la situación anterior se aumenta el espesor del entrehierro del valor inicial ℓ_e hasta otro final ℓ_{e1} (con $\ell_{e1} > \ell_e$), es evidente que de acuerdo con la ecuación (1.34) la nueva línea de carga tendrá menos pendiente, lo que aumenta el grado de desmagnetización del imán. En la Figura 1.18 se ha dibujado la nueva línea de carga *OR′* correspondiente a este aumento del entrehierro. Evidentemente el nuevo punto de trabajo será M_1 habiendo pasado el punto de trabajo inicial *M* hasta el final M_1 siguiendo la curva de desmagnetización del imán.

¿Pero qué sucedería a continuación si el entrehierro vuelve a su valor inicial ℓ_e? En este caso el punto de funcionamiento M_1 no vuelve a *M* sino que va hasta M_2 siguiendo una recta, cuya pendiente, según demuestra la experiencia, tiene un valor prácticamente igual a la pendiente de la recta tangente a la curva de desmagnetización del imán en el punto correspondiente al magnetismo remanente B_r. Esta línea M_1 M_2 recibe el nombre de *recta de retroceso*, de tal modo que si el entrehierro vuelve a aumentar nuevamente hasta el valor ℓ_{e1} el punto M_2 pasará a M_1. En realidad si el entrehierro variara de una forma periódica entre los valores mínimo ℓ_e y máximo ℓ_{e1}, la trayectoria del punto de funcionamiento describiría un ciclo de histéresis local entre los dos puntos extremos M_1 y M_2, representado en la Figura 1.18 por un lazo cerrado sombreado. En la mayoría de los imanes permanentes el ciclo de histéresis local es muy estrecho, por lo que se confunde con la recta de retroceso que une M_1 con M_2.

Otro aspecto importante a señalar al trabajar con imanes permanentes es qué sucede cuando el espesor del entrehierro se hace muy grande. Supóngase por ejemplo en el caso de la Figura 1.18, que estando trabajando el circuito magnético en el punto *M* correspondiente a un entrehierro de espesor ℓ_e se aumente éste a un valor muy elevado ($\ell_{e2} >> \ell_e$), de tal modo que la recta de entrehierro se convierta en la horizontal OH_c. Evidentemente el punto de funcionamiento inicial *M* pasará a H_c, pero si ahora se retorna al entrehierro inicial, el punto de funcionamiento seguirá la recta de retroceso trazada desde H_c, hasta su intersección con la

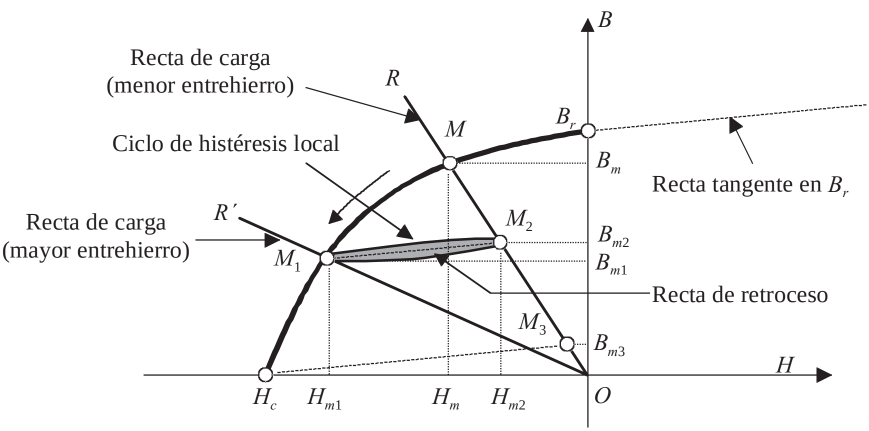


Figura 1.18. Curva de desmagnetización de un imán permanente, rectas de carga y de retroceso.

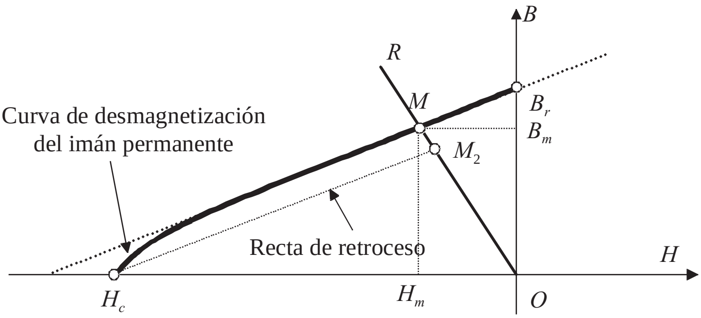


Figura 1.19. Curva de desmagnetización y recta de retroceso para un imán permanente de característica cuasilineal.

recta de carga *OR* dando lugar al punto M_3 que corresponde a una inducción de trabajo B_{m3} muy reducida. Es decir el imán permanente se ha desmagnetizado. La situación anterior ocurre por ejemplo cuando se desmonta una máquina eléctrica que dispone de imanes permanentes; es ésta una operación que debe realizarse con mucha precaución, ya que requerirá volver a magnetizar el imán con una bobina de excitación externa. A esto se debe el que los imanes permanentes se magnetizan una vez montado el conjunto de la máquina. Este problema es menos grave con los imanes permanentes en los que la curva que une B_r con H_c (curva de desmagnetización) es prácticamente recta, como en los modernos de Sm-Co y sobre todo en los de Nd-Fe-B, ya que entonces la recta de retroceso coincide prácticamente con la curva (recta) de desmagnetización del imán tal como se muestra en la Figura 1.19, por lo que los puntos de trabajo *M* y M_2 son muy próximos.

1.4.3. Imán permanente de volumen mínimo

Debido a los elevados costes de fabricación de los imanes permanentes y a la necesidad en muchos casos prácticos de colocarlos en máquinas eléctricas de pequeño tamaño (micromotores y servomotores) conviene que en su diseño se utilice el menor volumen posible de material magnético para cada aplicación específica. Considérese por ejemplo el esquema de la Figura 1.17, que dispone de un entrehierro de longitud ℓ_e y sección S_e , de acuerdo con la ecuación (1.32) el valor absoluto del campo magnético H_m (que corresponde al punto de trabajo *M* en la Figura 1.18) es igual a:

$$H_m = \frac{H_e \ell_e}{\ell_m} = \frac{B_e}{\mu_0}\frac{\ell_e}{\ell_m} = \frac{\Phi_e}{\mu_0 S_e}\frac{\ell_e}{\ell_m} \tag{1.35}$$

donde Φ_e representa el flujo magnético del entrehierro que coincide según (1.31) con el flujo magnético del imán. Si se denomina $\mathcal{R}_e$ a la reluctancia magnética del entrehierro cuyo valor es:

$$\mathcal{R}_e = \frac{\ell_e}{\mu_0 S_e} \tag{1.36}$$

la expresión (1.35) se puede escribir así:

$$H_m = \frac{\Phi_e \mathcal{R}_e}{\ell_m} \tag{1.37}$$

de donde se deduce el valor de la longitud del imán

$$\ell_m = \frac{\Phi_m \mathcal{R}_e}{H_m} \tag{1.38}$$

por otro lado de la ecuación (1.32) se puede escribir:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S_m} = \frac{\Phi_e}{S_m} \tag{1.39}$$

por lo que la sección del imán vale:

$$S_m = \frac{\Phi_e}{B_m} \tag{1.40}$$

es por ello que el volumen del imán Vol_m , teniendo en cuenta (1.38) y (1.40) tiene un valor:

$$Vol_m = \ell_m S_m = \frac{\Phi_e \mathcal{R}_e}{H_m} \frac{\Phi_e}{B_m} = \mathcal{R}_e \frac{\Phi_e^2}{H_m B_m} \tag{1.41}$$

de esta ecuación se deduce que para un determinado entrehierro definido por su reluctancia magnética $\mathcal{R}_e$ y para un flujo magnético específico en el entrehierro Φ_e, el volumen del imán será mínimo cuando el producto $H_m B_m$ sea máximo. Ésta es la justificación de que los fabricantes suministren en sus catálogos el valor de este producto como un dato importante para el diseño de sistemas magnéticos con imanes permanentes. Como se verá en el siguiente epígrafe el producto anterior tiene dimensiones de densidad de energía magnética y es por ello que los fabricantes lo denominan *producto energético máximo* $(H_m B_m)_{máx}$.

1.5. ENERGÍA Y COENERGÍA MAGNÉTICA

Considérese una bobina de N espiras arrollada en un núcleo ferromagnético, tal como se muestra en la Figura 1.20*a*, que se conecta a una fuente de tensión variable $v(t)$; como consecuencia de ello se establecerá una corriente $i(t)$ en la bobina que producirá un flujo variable $\Phi(t)$ en el núcleo. De acuerdo con la ley de Faraday, el flujo anterior creará una f.e.m. inducida en cada una de las espiras del devanado, dando lugar a una f.e.m. total, que puede considerarse bien como una elevación de tensión en el sentido de la corriente (véase Fig. 1.20*b*) de valor:

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \tag{1.42}$$

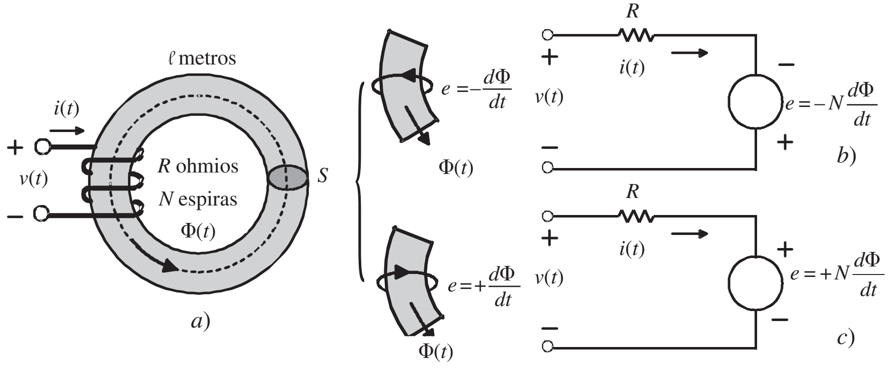


Figura 1.20. F.e.m. y f.c.e.m. inducida en una bobina con núcleo de hierro.

o bien como una caída de tensión en el sentido de la corriente (véase Fig 1.20*c*), denominándose entonces **fuerza contraelectromotriz** (abreviadamente f.c.e.m.) cuya magnitud es:

$$e = +N \frac{d\Phi}{dt} \tag{1.43}$$

Las dos formas anteriores de expresar la misma ley (ley de Faraday-Lenz) suele ser motivo de confusión entre los estudiantes, no habiendo razón alguna a este dislate. Para ilustrar más eficazmente la aplicación de la ley de Faraday, en la parte central superior de la Figura 1.20 se ha aislado una espira del devanado para ver el sentido de la f.e.m. y corriente inducida. Se observa que la polaridad de la f.e.m. inducida es tal que produce una corriente (si la espira está cerrada) que da lugar a un flujo inducido en el **mismo sentido** del flujo inductor $\Phi(t)$, y es por ello que se hace necesario incluir el signo menos en la expresión de la f.e.m., para tener en cuenta la ley de Lenz, de oposición al cambio de flujo. En la Figura 1.20*b* se muestra el circuito eléctrico equivalente de la bobina, donde se observa que el sentido de elevación de la f.e.m. coincide con el sentido de la corriente (se ha considerado que la bobina tiene una resistencia R).

En el caso de la espira dibujada en la parte central inferior de la Figura 1.20, se observa que la polaridad de la f.e.m. inducida es contraria a la considerada en el caso anterior; en esta situación se produce una corriente en la espira, que da lugar a un flujo inducido que **se opone** al flujo principal $\Phi(t)$; es por ello por lo que no es necesario incluir el signo menos en la expresión de la f.e.m., puesto que con la polaridad asignada se obtiene un flujo inducido que es antagónico al principal. En la Figura 1.20*c* se ha representado el circuito equivalente de la bobina correspondiente, en el que se observa que ahora el sentido de elevación de tensión de la f.e.m. es contrario a la corriente, y de ahí la justificación de la denominación antes indicada de *fuerza contraelectromotriz.*

Una vez hechas estas aclaraciones, vamos a calcular el balance energético que se produce en el circuito. Si aplicamos el segundo lema de Kirchhoff a la red de la Figura 1.20*c* resulta:

$$v = Ri + N \frac{d\Phi}{dt} \tag{1.44}$$

donde las expresiones v, i y Φ son funciones del tiempo, aunque no se hagan constar explícitamente en la ecuación anterior. Si en (1.44) se multiplican ambos miembros por $i\,dt$ resulta:

$$vi\,dt = R\,i^2\,dt + Ni\,d\Phi \tag{1.45}$$

o expresado de otro modo:

$$dW_e = dW_R + dW_m \tag{1.46}$$

donde:

dW_e: diferencial de energía eléctrica que entra al circuito.
dW_R: diferencial de energía disipada en la resistencia R de la bobina por efecto Joule.
dW_m: diferencial de energía suministrada al campo magnético (diferencial de energía magnética).

La ecuación (1.46) representa el balance energético del circuito o simplemente la ley de conservación de la energía. El término dW_m se puede escribir:

$$dW_m = Ni\,d\Phi = \mathscr{F}\,d\Phi \tag{1.47}$$

donde $\mathscr{F}$ representa la f.m.m. de la bobina. Si suponemos que en el instante inicial (t = 0) el flujo en el núcleo es nulo y la corriente es cero, y si se incrementan estos valores hasta unas magnitudes finales Φ e i, se tendrá una energía magnética total suministrada al núcleo magnético por la fuente:

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathscr{F}\, d\Phi \tag{1.48}$$

La ecuación anterior indica que cuando se incrementa el campo magnético asociado con un núcleo, la energía fluye de la fuente al campo. Así pues, esta energía es almacenada por el campo magnético tanto tiempo como el flujo se mantenga en el mismo valor, en nuestro caso Φ. Si se considera que la curva de imanación del material ferromagnético del núcleo es la mostrada en la Figura 1.21, que es análoga a la indicada en la Figura 1.2, pero en la que ahora (Fig. 1.21) se ha representado en abscisas la f.m.m. en vez del campo H, y en ordenadas el flujo Φ en vez de la inducción B, entonces la energía magnética W_m de la expresión (1.48) vendrá expresada por el área comprendida entre la curva de imanación y el eje de flujos (área sombreada horizontalmente).

En la teoría de los circuitos magnéticos es interesante definir una magnitud denominada **coenergía** y que responde a la ecuación:

$$W'_m = \int_0^{\mathscr{F}} \Phi\, d\mathscr{F} \tag{1.49}$$

que es el área comprendida entre la curva de imanación y el eje de f.m.m.s. (área sombreada verticalmente en la Figura 1.21). La coenergía no tiene un significado físico directo pero es de gran utilidad para el cálculo de fuerzas en los dispositivos electromagnéticos. Obsérvese que la suma de la energía más la coenergía magnética es el área del rectángulo $\mathscr{F}\,\Phi$ de la Figura 1.21.

Las expresiones (1.48) y (1.49) pueden también definirse en función de los campos magnéticos H y B. Si se considera el esquema de la Figura 1.20, en el que el núcleo tiene una sección uniforme S y ℓ es la longitud magnética media (longitud geométrica media), si se suponen uniformes los campos magnéticos, se podrá escribir:

$$\Phi = B\,S \qquad d\,\Phi = S\,dB$$
$$\mathscr{F} = H\,\ell \qquad d\,\mathscr{F} = \ell\,dH \tag{1.50}$$

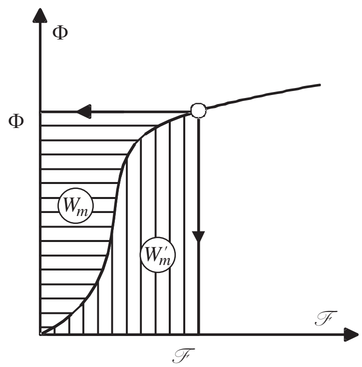


Figura 1.21. Energía y coenergía magnética.

De este modo la expresión de la energía magnética almacenada (1.48) se convertirá en:

$$W_m = \int_0^{\Phi} \mathscr{F} d\Phi = vol \cdot \int_0^{B} H\, dB \tag{1.51}$$

donde $vol = S\,\ell$ representa el volumen del núcleo ferromagnético. La energía almacenada por unidad de volumen, y que se denomina ***densidad de energía magnética***, valdrá entonces:

$$w_m = \frac{W_m}{vol} = \int_0^{B} H\, dB \tag{1.52}$$

De un modo análogo, teniendo en cuenta (1.49) y (1.50) se obtiene una ***densidad de coenergía magnética***:

$$w'_m = \int_0^{H} B\, dH \tag{1.53}$$

que tienen unas interpretaciones gráficas similares a las de la Figura 1.21, si se representan ahora el campo magnético H en abscisas y la inducción B en ordenadas. Cuando la curva de imanación del núcleo se considera lineal, los resultados precedentes dan lugar a expresiones muy simples. En primer lugar, es fácil darse cuenta en la Figura 1.21 que si la curva de imanación es una recta, entonces coinciden los valores numéricos de la energía y coenergía que corresponden a triángulos rectángulos cuyos catetos son Φ y $\mathscr{F}$, y de este modo (1.48) y (1.49) admiten las versiones siguientes:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2}\mathscr{F}\Phi = \frac{1}{2}\mathscr{R}\,\Phi^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathscr{F}^2}{\mathscr{R}} \tag{1.54}$$

donde se ha tenido en cuenta la ley de Hopkinson (1.26). De un modo análogo coinciden también las expresiones de las *densidades de energía y coenergía* (1.52) y (1.53):

$$w_m = w'_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{1.55}$$

La ecuación (1.54) puede expresarse también en función de la inductancia L de la bobina. Recuérdese que la inductancia en un medio lineal viene definida por el cociente:

$$L = N\frac{\Phi}{i} \tag{1.56}$$

y teniendo en cuenta la ley de Hopkinson:

$$\mathscr{F} = \mathscr{R}\,\Phi \tag{1.57}$$

(1.56) se transforma en:

$$L = N^2\frac{\Phi}{Ni} = N^2\frac{\Phi}{\mathscr{F}} = \frac{N^2}{\mathscr{R}} \tag{1.58}$$

y por consiguiente (1.54) admite la siguiente versión:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2}L\frac{\mathscr{F}^2}{N^2} = \frac{1}{2}L\,i^2 \tag{1.59}$$

que el lector recordará de un Curso de Teoría de Circuitos.

1.6. PÉRDIDAS DE ENERGÍA EN LOS NÚCLEOS FERROMAGNÉTICOS

Cuando se reducen los campos magnéticos asociados con núcleos ferromagnéticos, parte de la energía almacenada es devuelta a la fuente. Sin embargo, parte de la energía almacenada se pierde irremediablemente en el núcleo en forma de calor. Esta pérdida de energía es debida a dos causas: *a*) característica de histéresis del material (**pérdidas por histéresis)** y *b*) corrientes inducidas en el núcleo (**pérdidas por corrientes parásitas o corrientes de Foucault**). También se tienen pérdidas de energía en núcleos sujetos a imanaciones y desimanaciones cíclicas por medio de excitaciones periódicas.

1.6.1. Pérdidas por histéresis

Supóngase que el núcleo ferromagnético mostrado en la Figura 1.20*a* es excitado por una bobina alimentada por una fuente de variación periódica (en particular por una tensiónsinusoidal) y que el ciclo de histéresis del material magnético es el que se muestra en la Figura 1.22.

Supóngase que la amplitud del campo magnético varía entre $+H_m$ y $-H_m$, correspondiendo a variaciones de la inducción entre $+B_m$ y $-B_m$. Si se considera inicialmente que la inducción en el núcleo varía desde $-B_r$ (punto *a*) hasta B_m (punto *c*) siguiendo el tramo de curva «*abc*», se tendrá un aumento de inducción en el núcleo, lo que corresponde a una energía absorbida por el campo magnético y almacenada durante esta parte del ciclo, que de acuerdo con (1.51) valdrá:

$$W_{ac} = vol \int_{-B_r}^{B_m} H\, dB = vol \cdot w_1 \tag{1.60}$$

La integral w_1 de la expresión anterior representará, de acuerdo con lo indicado en el epígrafe anterior, el área de la superficie «*abcdea*» de la Figura 1.22. Si se considera ahora que la inducción se reduce desde B_m (punto *c*) hasta B_r (punto *e*), siguiendo el tramo «*ce*» de la curva de histéresis, entonces resultará una energía devuelta a la fuente (red) durante esta parte del ciclo porque es negativa, y cuyo valor es:

$$W_{ce} = vol \int_{B_m}^{B_r} H\, dB = vol \cdot w_2 \tag{1.61}$$

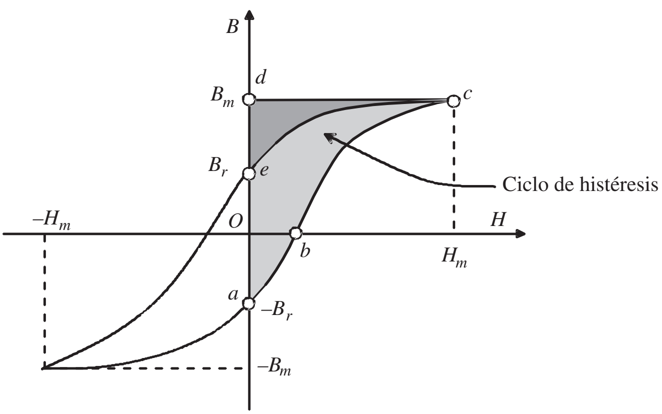


Figura 1.22. Áreas del ciclo de histéresis.

El área «*cdec*» de la Figura 1.22 representará la densidad de energía correspondiente, que es el valor w_2 de la parte integral de (1.61). Es evidente entonces que si se somete al núcleo a una inducción creciente entre $-B_r$ y B_m siguiendo el camino «*abc*» y luego a otra inducción decreciente entre B_m y B_r, siguiendo el camino «*ce*», la superficie resultante «*abcea*» de la Figura 1.22 representará la densidad de energía absorbida por el núcleo ferrromagnético en esta excitación cíclica y que no es devuelta a la red, sino que es disipada en el núcleo en forma de calor.

Es evidente, según se muestra en la Figura 1.22, que el área más clara corresponde a la *mitad* del ciclo de histéresis y representa la diferencia de energías $w_2 - w_1$. Parece lógico, de acuerdo con la conclusión anterior, que si las variaciones de campo se producen entre $\pm H_m$ correspondiendo a variaciones de inducción $\pm B_m$, la energía total disipada en el núcleo en forma de calor en este ciclo completo, y que designaremos por W_H, será:

$$W_H = (vol) \oint H \, dB \qquad (1.62)$$

donde la integral curvilínea se extiende a todo el ciclo de histéresis, por lo que el resultado de la integral representará el área que encierra el ciclo de histéresis, que según (1.62) significará la energía perdida por histéresis por ciclo y por unidad de volumen del material magnético.

En la práctica, es conveniente hablar de pérdida de energía por segundo en el núcleo, es decir, de potencia perdida por histéresis. Si el número de ciclos de imanación completa es f (donde f representa la frecuencia de la tensión de alimentación a la bobina), entonces la potencia perdida será:

$$P_H = f\, W_H = f\,(vol) \oint H \, dB = f\,(vol)\ (\text{área del ciclo}) \qquad (1.63)$$

La ecuación anterior es independiente de la forma de onda de la fuente de alimentación, depende únicamente de la amplitud de la inducción, la frecuencia de la fuente (red) y la naturaleza del material magnético (área del ciclo).

Experimentalmente, C. P. Steinmetz propuso en 1892 una fórmula empírica para definir el cálculo de (1.63) y que viene expresada por la ecuación:

$$P_H = k_H\, f\,(vol)\, B_m^{\alpha} \qquad (1.64)$$

Los valores de k_H (denominado coeficiente de Steinmetz) y α (denominado exponente de Steinmetz) dependen de la naturaleza del núcleo ferromagnético. El exponente α varía entre 1,5 y 2,5, siendo un valor frecuente $\alpha = 1{,}6$, mientras que k_H varía en el caso de acero al silicio entre 100 y 200.

1.6.2. Pérdidas por corrientes de Foucault

Considérese el esquema de la Figura 1.23*a*, donde se muestra una bobina arrollada sobre un núcleo de hierro macizo. Al alimentar la bobina con corriente alterna se producirá, de acuerdo con la ley de Ampère, un campo magnético alterno de inducción $B_z = B_m \cos \omega t$ que atravesará toda la masa de hierro en el sentido del eje Z (eje de la bobina).

De acuerdo con la ley de Faraday, aparecerán en el material unas f.e.m.s. inducidas que darán lugar a unas corrientes parásitas que circularán por el material. Téngase en cuenta que el hierro es conductor de la electricidad, y aunque su conductividad es pequeña en comparación con la del cobre, las f.e.m.s. inducidas provocarán corrientes de circulación por la masa del hierro. Estas corrientes, denominadas **corrientes de Foucault** (*eddy currents* o corrientes

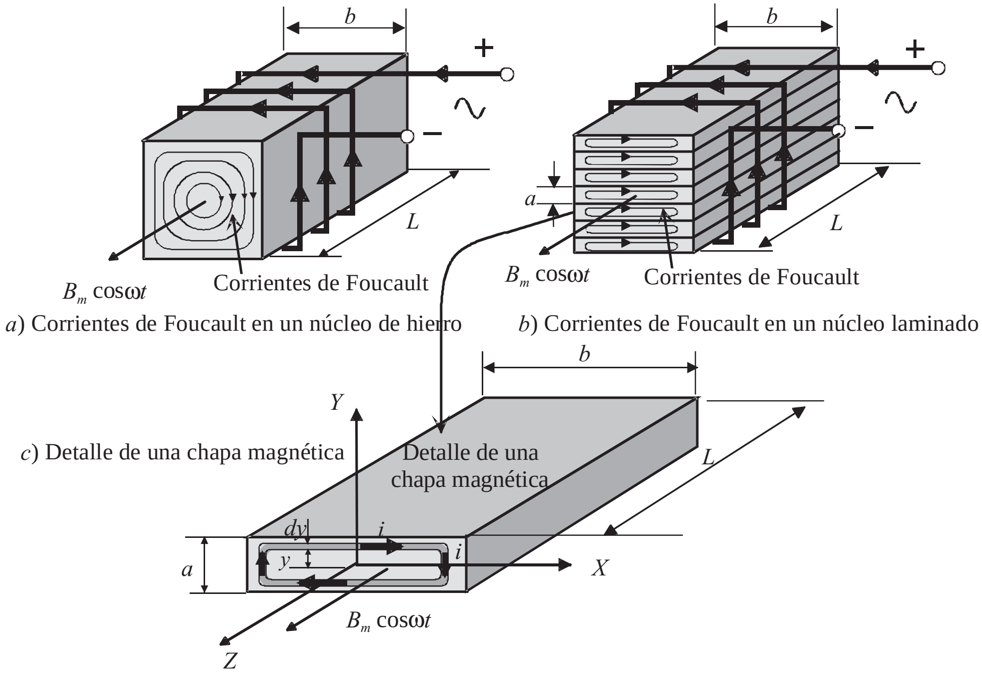


Figura 1.23. Corrientes de Foucault en las masas y chapas de hierro.

de torbellino en la bibliografía inglesa), se han señalado en la Figura 1.23*a* por medio de círculos concéntricos en planos perpendiculares al flujo inductor y cuyo sentido de circulación es tal, que el flujo producido por estas corrientes se opone (ley de Lenz) al flujo inductor de la bobina. Estas corrientes pueden originar grandes pérdidas de potencia, con el consiguiente calentamiento de los núcleos. Para prevenir estas pérdidas, el hierro empleado en los circuitos magnéticos suele estar laminado, en forma de chapas magnéticas de pequeño espesor, tal como se señala en la Figura 1.23*b*. El plano de las chapas es paralelo al flujo, por lo que las corrientes parásitas quedan confinadas a trayectorias de sección transversal pequeña. Consideremos una de estas chapas de dimensiones transversales $a \times b$ (donde $a << b$) y profundidad L, tal como se señala en la Figura 1.23*c*, que es atravesada por el campo magnético $B_z = B_m \cos \omega t$.

Suponiendo que el campo es uniforme en la sección transversal de la chapa, el flujo que atraviesa la espira sombreada de la Figura 1.23*c* es:

$$\Phi = 2by\, B_m \cos \omega t \tag{1.65}$$

ya que la superficie cerrada de la espira es $2by$. Por la ley de Faraday, la f.e.m. inducida tiene un valor modular dado por:

$$e = 2\omega by\, B_m \operatorname{sen} \omega t \tag{1.66}$$

Tomando una longitud unidad en la dirección del eje Z, la f.e.m. anterior produce una corriente de alrededor de la espira indicada, cuya resistencia vale:

$$R = \frac{2b}{\sigma\, dy} \tag{1.67}$$

donde se ha tenido en cuenta que $a \ll b$ y que la conductividad del material es σ. La potencia instantánea en la espira será:

$$dP_F = R \cdot i^2 = \frac{e^2}{R} = \frac{4\omega^2 b^2 y^2 B_m^2 \sigma \operatorname{sen}^2 \omega t \, dy}{2b} \tag{1.68}$$

que corresponde a un valor medio:

$$dP_F = \omega^2 b y^2 B_m^2 \sigma \, dy \tag{1.69}$$

y a una potencia disipada total:

$$P_F = \int_0^{a/2} \omega^2 B_m^2 \, b\sigma y^2 \, dy = \frac{\omega^2}{24} B_m^2 a^3 b\sigma \tag{1.70}$$

lo que representa una potencia disipada por unidad de volumen:

$$P_F/vol = \pi^2 f^2 B_m^2 a^2 \sigma/6 = k_F f^2 B_m^2 a^2 \sigma \tag{1.71}$$

donde se ha llamado k_F a $\pi^2/6$ y se ha tenido en cuenta que el volumen es: $vol = abL = ab$, al haber considerado una profundidad unidad.

Las ecuaciones anteriores son válidas solamente para valores de las frecuencias tales que la distribución del campo magnético no esté afectada por las propias corrientes parásitas. Cuando la frecuencia es elevada, el flujo que atraviesa las chapas no se distribuye uniformemente y se deben utilizar chapas más delgadas.

De las ecuaciones (1.64) y (1.71) observamos que las pérdidas totales en el hierro son :

$$P_{\text{Fe}} = P_{\text{H}} + P_{\text{F}} = (k_H f B_m^\alpha + k_F f^2 B_m^2 a^2 \sigma) \, vol \tag{1.72}$$

siendo *vol* el volumen de hierro. En la práctica, el fabricante de material magnético, suministra unas curvas donde se muestran estas pérdidas totales en función de B, a frecuencia constante. En la Figura 1.24 puede verse un ejemplo de ello para chapas magnéticas laminadas en frío o en caliente.

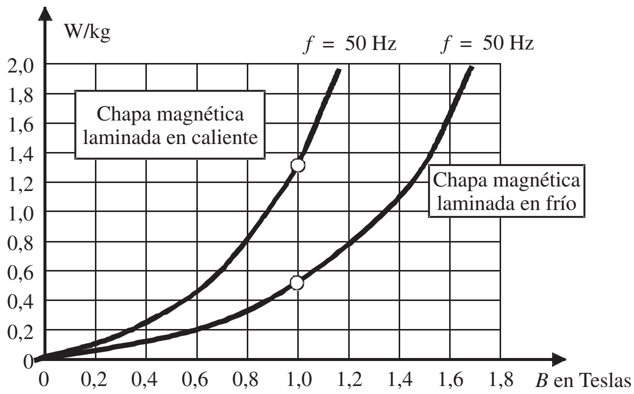


Figura 1.24. Curvas de pérdidas en el hierro.

1.6.3. Consecuencias tecnológicas

Para reducir las pérdidas en el hierro de las máquinas eléctricas, se deduce de todo lo anterior que deben emplearse chapas magnéticas de pequeño espesor y baja conductividad (es decir, alta resistividad) y que tengan además un ciclo de histéresis pequeño. Las chapas magnéticas se caracterizan, fundamentalmente, por contener silicio en la proporción de 4 o 5 por 100. Esta adición de silicio ha constituido un progreso considerable, ya que ha tenido como efecto la disminución de las pérdidas por corrientes de Foucault (a consecuencia del aumento de la resistividad, que alcanza de 5 a 6 veces la del hierro ordinario, como indica la Tabla 1.1). La incorporación del silicio presenta, sin embargo, inconvenientes desde el punto de vista mecánico, ya que el hierro se vuelve duro y quebradizo. La calidad magnética de una chapa está influida no sólo por la composición química del hierro que la constituye, sino también por los procedimientos de fabricación, particularmente por el sistema de laminado y los tratamientos térmicos. Antiguamente se empleaba un tipo de laminado en caliente y las chapas tenían unas pérdidas a 1 Tesla y 50 Hz que oscilaban entre 1,1 y 1,5 W/kg (véase Fig. 1.24); modernamente se emplea el laminado en frío, que tiene por efecto alinear las redes cristalinas que se producen en la aleación hierro-silicio (malla del tipo cúbico centrado), por medio de una deformación plástica, y por ello esta clase de lámina de acero recibe también el nombre de **chapa de cristales** o **granos orientados**. Este tipo de chapa no contiene más de 3 a 3,5 por 100 de silicio y se obtiene partiendo de un hierro más puro aún que el de las chapas ordinarias (laminado en caliente), sobre todo en lo concerniente al carbono, que desciende a 0,005 en vez de 0,04 por 100. Para eliminar las tensiones internas que se producen en las chapas de grano orientado, debe procederse, después de la laminación, a un recocido en atmósfera no oxidante (normalmente de hidrógeno); las pérdidas en estas chapas varían según sea la dirección del flujo respecto a la orientación del grano, y para la dirección del laminado vienen a valer de 0,3 a 0,6 W/kg (a 1 Tesla y 50 Hz), pero estos valores se triplican cuando el flujo forma 90° con la alineación de los cristales.

Para reducir las pérdidas por corrientes de Foucault, aparte de disminuir el espesor de las chapas (actualmente se construyen con espesores comprendidos entre 0,3 y 0,5 mm), es preciso intercalar entre las mismas un aislante. Al principio se utilizaba el papel como aislante, y para ello se pegaba por una cara de la chapa una hoja de papel fino de 0,02 a 0,03 mm de espesor, pero éste se alteraba fácilmente por el calor; posteriormente se utilizó un barniz de silicato sódico que recubría las dos caras, con un espesor total de $2 \times 0{,}005 = 0{,}01$ mm; últimamente las chapas de grano orientado vienen preparadas mediante un tratamiento termoquímico especial, conocido con el nombre comercial de **carlite**, que crea una película aislante extremadamente delgada (0,001 mm) cuya adherencia e inalterabilidad al calor son notables.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

1. Existen aplicaciones de las pérdidas por corrientes de Foucault

Considérese un disco metálico girando; si se acerca el polo de un imán, el disco disminuye su velocidad y se detiene rápidamente, al ser frenado por la acción de las corrientes de Foucault que se inducen en el disco. Este procedimiento de frenado se utiliza para amortiguar las agujas de ciertos aparatos de medida, en el frenado del disco de un contador de energía eléctrica y en la automoción se emplea como un freno adicional en los camiones.

2. Medida de las pérdidas en el hierro. Método de Epstein

El método de Epstein es un procedimiento que se utiliza en los Laboratorios de Electrometría para medir las pérdidas en el hierro de muestras de chapas magnéticas y que fue inventado por el físico alemán Josef Epstein (1862-1930). El aparato de Epstein consta esencialmente de cuatro arrollamientos de magnetización conectados en serie (o devanado primario que tiene 150 espiras por brazo uniformemente distribuidas) colocados formando un cuadrado tal como se muestra en la Figura 1.25, en los cuales se han de introducir las muestras de hierro que se trata de analizar. El estudio se hace con una gran cantidad de chapas de hierro, con el fin de obtener un buen valor medio, y poder, al mismo tiempo, obtener unas potencias fácilmente medibles. Los paquetes de chapas deben tener en total un peso de unos 10 kg. Cada uno de los paquetes tiene unas dimensiones de 3 cm de anchura por 50 cm de longitud. Dos de estos paquetes se cortan en el sentido de laminación de las chapas y los otros dos en sentido transversal. Las capas de chapa están aisladas entre sí por papel aislante para disminuir las pérdidas por corrientes de Foucault, aunque en la actualidad no es necesario si van recubiertas de barniz aislante tipo carlite. La figura 1.25 muestra también los instrumentos de medida necesarios para determinar las pérdidas en el hierro. La alimentación se realiza generalmente a través de una red de corriente alterna y se coloca un autotransformador de relación variable (variac) para poder regular la tensión aplicada al conjunto del devanado primario.

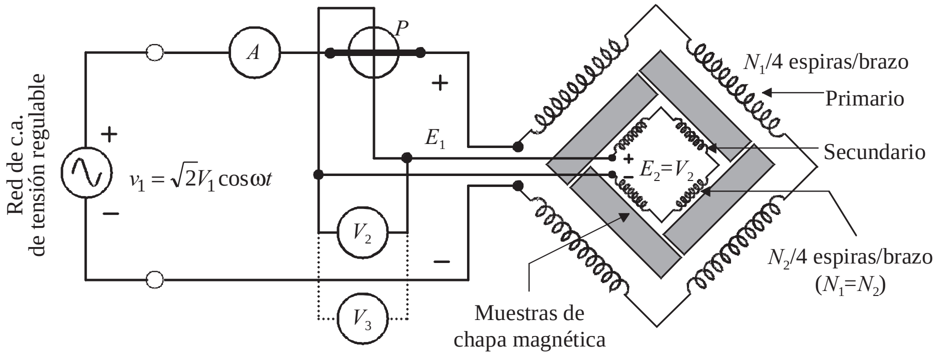


Figura 1.25. Medida de las pérdidas en el hierro por el método de Epstein.

Con objeto de evitar los errores de medida por pérdidas en el cobre en el arrollamiento primario de magnetización, el aparato va provisto de un arrollamiento secundario formado generalmente por el mismo número de espiras del primario, es decir 150 espiras uniformemente distribuidas en cada brazo y bobinadas encima del devanado primario. Estos cuatro devanados están conectados en serie y alimentan a un voltímetro y a la bobina voltimétrica del vatímetro. Antes de efectuar la medida se calcula la tensión correspondiente a la inducción deseada. Tal como se demuestra en el capítulo 2 la f.e.m. eficaz inducida E_2 en una bobina de N_2 espiras a frecuencia f, con un flujo máximo Φ_m y un factor de forma K_f de la onda aplicada, tiene un valor dado por la siguiente expresión:

$$E_2 = 4K_f N_2 f \Phi_m \qquad (1)$$

donde el valor del flujo máximo es el producto de la inducción máxima B_m en el núcleo por la sección transversal del hierro S, es decir:

$$\Phi_m = B_m S \qquad (2)$$

El factor de forma K_f de la f.e.m. inducida E_2 es el cociente entre el valor eficaz y el valor medio de la misma. Cuando la onda es sinusoidal este factor es igual a 1,11, pero éste depende

de la relación no lineal de la curva de imanación B = f(H) de la muestra de hierro, es por ello que en el secundario se conectan dos voltímetros: el voltímetro V_2 *es un voltímetro clásico de c.a. de hierro móvil que mide el valor eficaz de la tensión inducida (*$E_2=V_2$*), y el voltímetro* V_3 *que es un voltímetro de cuadro móvil que tiene un diodo rectificador en serie para medir el valor medio de la tensión, de este modo el cociente de las lecturas de estos dos voltímetros permite obtener el factor de forma de la onda de f.e.m. inducida. De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la inducción máxima en las chapas de hierro:*

$$B_m = \frac{E_2}{4K_f N_2 f S} \tag{3}$$

y en la ecuación anterior se cumple:

$$E_2 = V_2 \quad ; \quad K_f = \frac{V_2}{V_3} \quad ; \quad N_2 = 600 \text{ espiras} \ ; \ f = 50 \text{ Hz} \tag{4}$$

La sección del hierro S se calcula a partir del peso específico de las chapas γ (entre 7,5 y 7,7, pero debe conocerse exactamente) y teniendo en cuenta la longitud total L de los paquetes de chapas (L = 4 × 50 cm = 2 metros) y el peso total de las chapas G (unos 10 kg, pero debe pesarse exactamente), lo que da lugar a una sección:

$$S = \frac{G}{L\gamma} \tag{5}$$

Para comenzar las medidas se debe variar primeramente la tensión de alimentación V_1 *con un variac hasta que la tensión secundaria* V_2 *tome el valor calculado anteriormente de acuerdo con la inducción requerida y se debe leer a continuación la potencia que señala el vatímetro P. Debe tenerse en cuenta sin embargo, que la potencia que señala el vatímetro, mide no solamente las pérdidas en el hierro de las muestras ensayadas, sino también las potencias disipadas en la resistencia interna del voltímetro y en la bobina voltimétrica del vatímetro. Es por ello que las pérdidas en el hierro* P_{Fe} *vienen determinadas por la siguiente ecuación:*

$$P_{FE} = P - \frac{V_2^2}{R_V} - \frac{V_2^2}{R_W} \tag{6}$$

donde P es la potencia señalada por el vatímetro, V_2 *es la tensión eficaz de la f.e.m. inducida en el secundario, y* R_V *y* R_W *son respectivamente las resistencias internas del voltímetro y de la bobina voltimétrica del vatímetro. En la actualidad con los equipos de medida digitales, las resistencias anteriores de los instrumentos de medida son muy elevadas y prácticamente la medida del vatímetro coincide con las pérdidas en el hierro. Sin embargo debe destacarse la gran importancia de calcular correctamente el factor de forma, ya que si se quieren calcular las pérdidas a inducciones elevadas, es decir por encima del codo de la curva de imanación, la deformación de la onda de flujo es importante, por lo que el factor de forma puede alcanzar valores superiores a 1,14. Debe tenerse en cuenta que como las pérdidas en el hierro suelen ser del orden de 1 a 1,5 W/kg, para un peso de 10 kg las pérdidas totales en el hierro serán del orden de 10 a 15 W, lo que justifica minimizar todos los errores tanto de los consumos de los instrumentos de medida como los debidos a la variación del factor de forma. ¡Una determinación exacta de las pérdidas requiere una gran meticulosidad en las medidas! Las pérdidas en el hierro se suelen expresar en vatios por kilogramo es decir* P_{Fe}/G.

NOTA: *En el caso de que los devanados del equipo de Esptein no tengan el mismo número de espiras, la potencia del vatímetro P señalada en (6) deberá multiplicarse por el cociente del número de espiras* N_1/N_2 *para que dé la potencia real que absorbe el equipo.*

Ejemplo de aplicación 1.5

Un material ferromagnético se ha sometido a tres ensayos con diferentes frecuencias e inducciones, dando lugar a las pérdidas totales en el hierro mostradas en la siguiente tabla:

Ensayo N.º	*Frecuencia (Hz)*	*Inducción máxima (Teslas)*	*Pérdidas en el hierro (W/kg)*
1	50	1	2
2	50	1,5	4
3	100	1	5

Calcular: a) Pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault en cada uno de los ensayos. b) Valor del exponente α de Steinmetz.

Solución

Designando con los subíndices 1, 2 y 3 las pérdidas en cada ensayo resulta:

$$P_{H1} + P_{F1} = 2 \quad ; \quad P_{H2} + P_{F2} = 4 \quad ; \quad P_{H3} + P_{F3} = 5 \qquad (a)$$

donde P_H indica la pérdida de potencia por histéresis y P_F las pérdidas por corrientes de Foucault. Teniendo en cuenta asimismo que estas pérdidas obedecen, de acuerdo con (1.72), a las ecuaciones generales siguientes:

$$P_H = K_1 \cdot f \cdot B_m^\alpha \quad ; \quad P_F = K_2\, f^2\, B_m^2$$

en las que K_1 y K_2 representan parámetros constantes, se podrán escribir las siguientes relaciones:

$$\frac{P_{H1}}{P_{H2}} = \frac{1}{1{,}5^\alpha} \quad ; \quad \frac{P_{H1}}{P_{H3}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{P_{F1}}{P_{F2}} = \frac{1}{1{,}5^2} \quad ; \quad \frac{P_{F1}}{P_{F3}} = \frac{1}{2^2} \qquad (b)$$

Si evitamos utilizar la primera ecuación (b), la primera y tercera ecuación (a) nos da:

$$P_{H1} + P_{F1} = 2 \quad ; \quad 2\,P_{H1} + 4\,P_{F1} = 5$$

que da lugar a los siguientes valores:

$$P_{H1} = 1{,}5 \text{ W/kg} \quad ; \quad P_{F1} = 0{,}5 \text{ W/kg} \quad ; \quad P_{H3} = 3 \text{ W/kg} \;;\; P_{F3} = 2 \text{ W/kg}$$

Ahora bien, de las relaciones, (b) obtenemos también:

$$P_{F2} = 1{,}5^2\, P_{F1} = 1{,}125 \text{ W/kg} \quad ; \quad P_{H2} = 4 - 1{,}125 = 2{,}875 \text{ W/kg}$$

y teniendo en cuenta la primera ecuación (b) resultará:

$$\frac{P_{H1}}{P_{H2}} = \frac{1{,}5}{2{,}875} = \frac{1}{1{,}5^\alpha} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}60$$

Ejemplo de aplicación 1.6

Las pérdidas en el hierro de una muestra de material ferromagnético son de 1.000 W a 50 Hz. Cuando se aumenta la frecuencia hasta 100 Hz, manteniendo la inducción constante, las pérdidas totales correspondientes han sido de 2.500 W. Calcular las pérdidas por histéresis y por corrientes de Foucault para ambas frecuencias.

Solución

Al ser la inducción constante, las ecuaciones de las pérdidas admiten las siguientes expresiones:

$$P_H = M\,f \quad ; \quad P_F = N\,f^2$$

dando lugar a las pérdidas totales en el hierro:

$$P_{Fe} = M f + N f^2$$

que corresponden a unas pérdidas por unidad de frecuencia:

$$P_{Fe}/f = M + N f$$

y al aplicar la ecuación anterior a los datos del problema resulta:

$$\frac{1.000}{50} = M + 50\,N \quad ; \quad \frac{2.500}{100} = M + 100\,N \;\Rightarrow\; M = 15 \quad ; \quad N = 0{,}10$$

lo que da lugar a la distribución de pérdidas siguiente:

$$\text{A 50 Hz: } P_{H1} = M f_1 = 15 \cdot 50 = 750\ \text{W};\ P_{F1} = N f_1^2 = 0{,}10 \cdot 50^2 = 250\ \text{W}$$

$$\text{A 100 Hz: } P_{H2} = M f_2 = 15 \cdot 100 = 1.500\ \text{W};\ P_{F2} = N f_2^2 = 0{,}10 \cdot 100^2 = 1.000\ \text{W}$$

1.7. CIRCUITOS MAGNÉTICOS EXCITADOS CON CORRIENTE ALTERNA

1.7.1. Generalidades

En el epígrafe 1.3 se han estudiado las leyes de los circuitos magnéticos, observando la analogía existente con los circuitos eléctricos. La ley de Hopkinson expresada por la ecuación:

$$\Phi = \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{R}} \tag{1.73}$$

define la relación básica entre las magnitudes: Φ (flujo), $\mathscr{F}$ (f.m.m.) y $\mathscr{R}$ (reluctancia).

Si se considera el circuito magnético de la Figura 1.26, donde se muestra una bobina de N espiras, de resistencia eléctrica total R, arrollada sobre un núcleo de sección uniforme S y longitud magnética media ℓ, al aplicar una tensión de alimentación de c.c. a la bobina, se producirá, de acuerdo con la ley de Ohm, una corriente $I = V/R$, que dará lugar a una f.m.m. $\mathscr{F} = Ni$, y que según sea el valor de la reluctancia del circuito magnético determinará el flujo resultante $\Phi = \mathscr{F}/\mathscr{R}$.

En la Figura 1.27 se muestra la sucesión de efectos que tiene lugar. Está claro que **cuando la bobina se alimenta con una excitación de c.c., la corriente es función directa de la tensión aplicada, pero es absolutamente independiente de la naturaleza y características magnéticas del material que constituye el núcleo.**

Si, para ser más explícitos, se considera el sistema magnético mostrado en la Figura 1.26 y se aumenta la reluctancia del circuito magnético (un procedimiento sería, por ejemplo,

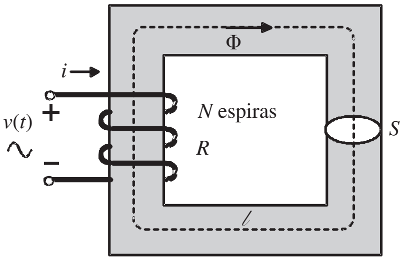


Figura 1.26. Bobina con núcleo de hierro.

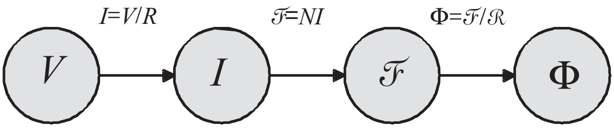


Figura 1.27. Sucesión de efectos en una bobina alimentada con c.c.

practicar un entrehierro en el núcleo), entonces el flujo magnético se reducirá pero no habrá cambio en la corriente absorbida por la bobina.

Supóngase ahora que la bobina de la Figura 1.26 se alimenta con una tensión de c.a. senoidal:

$$v(t) = \sqrt{2}\, V \cos \omega t \tag{1.74}$$

donde V expresa el valor eficaz de la tensión alterna aplicada y $\omega = 2\pi f$ la pulsación de la misma. En este caso se producirá una corriente de circulación $i(t)$ que provocará un flujo $\Phi(t)$ en el núcleo. Este flujo variable dará lugar a una f.e.m. inducida en la bobina, de tal modo que si se aplica el segundo lema de Kirchhoff al circuito eléctrico de la Figura 1.26 se cumplirá de acuerdo con (1.44):

$$v = Ri + N\frac{d\Phi}{dt} \tag{1.75}$$

Suponiendo que la caída de tensión en la resistencia de la bobina es pequeña en comparación con la f.e.m. inducida, la ecuación (1.75) se puede escribir:

$$v = N\frac{d\Phi}{dt} \tag{1.76}$$

de donde se deduce el valor del flujo $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \frac{1}{N}\int v \cdot dt = \frac{\sqrt{2}}{N\omega} V \operatorname{sen} \omega t \tag{1.77}$$

La constante de integración es nula siempre que se considere que en $t = 0$ no existe magnetismo remanente en el núcleo. La ecuación (1.77) puede escribirse en la forma clásica:

$$\Phi(t) = \Phi_m \operatorname{sen} \omega t = \Phi_m \cos(\omega t - 90^\circ) \tag{1.78}$$

donde el flujo máximo Φ_m vale:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{2}\, V}{N\omega} \tag{1.79}$$

y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi f$, la relación (1.79) se puede escribir:

$$V = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi_m = 4{,}44\, f N \Phi_m \tag{1.80}$$

Debe destacarse que en la ecuación anterior la tensión está expresada en valor eficaz, mientras que el flujo está definido por su valor máximo.

Otro hecho a destacar, comparando (1.74) y (1.78), es que el flujo se retrasa 90° respecto a la tensión aplicada a la bobina. Sin embargo, lo más importante que hay que resaltar aquí es que la tensión de alimentación y su frecuencia imponen el valor que va a tener el flujo en el

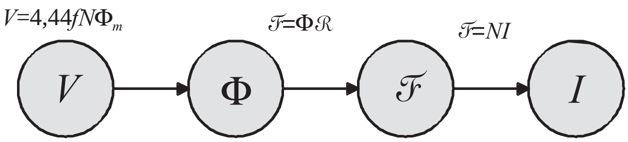


Figura 1.28. Sucesión de efectos en una bobina alimentada con c.c.

núcleo [de acuerdo con la ecuación (1.80)], por lo que según sea el valor de la reluctancia del circuito magnético se tendrá, de acuerdo con la ley de Hopkinson, una corriente absorbida por la bobina.

En la Figura 1.28 se muestra la sucesión de efectos que tiene lugar. Debe quedar claro, por tanto, que **cuando la bobina se alimenta con una excitación de c.a., el flujo es función directa de la magnitud y frecuencia de la tensión aplicada, pero es absolutamente independiente de la naturaleza y características magnéticas del material que constituye el núcleo.**

De un modo análogo al estudiado anteriormente, si se considera el sistema magnético mostrado en la Figura 1.26, en el que ahora se alimenta la bobina con c.a. y se aumenta la reluctancia del circuito magnético (por haber practicado, por ejemplo, un entrehierro en el núcleo), entonces no habrá ninguna modificación en el flujo magnético, pero la bobina absorberá más corriente de la red para poder mantener el flujo constante en el valor que le impone la tensión aplicada.

Es importante que el lector distinga a la perfección el comportamiento de una bobina con núcleo de hierro según se alimente con c.c. o con c.a., ya que le permitirá comprender más fácilmente el funcionamiento de las máquinas eléctricas y de muchos dispositivos electromagnéticos.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

1. *Si se dispone de un catálogo de características técnicas de contactores (véase en el epígrafe 1.8 el concepto de contactor, que es en definitiva un electroimán alimentado con c.a.), se observará que la potencia o corriente absorbida en el momento de la conexión es muy superior a la que consume en régimen permanente, es decir, al cabo de un cierto tiempo en el que se produce el cierre de la armadura móvil sobre la fija. Este efecto se debe a que inicialmente la reluctancia del circuito magnético es elevada, ya que la armadura móvil está separada de la fija por un gran entrehierro de aire; sin embargo, la corriente de mantenimiento o permanente es reducida debido a que en esta situación la armadura móvil queda* ***pegada*** *sobre la fija (entrehierro despreciable).*

   Una avería relativamente frecuente en los contactores utilizados en las maniobras de los equipos eléctricos de obras (p. ej., en los motores de grúas, montacargas, hormigoneras, etc.) es cuando se introduce en el entrehierro del contactor alguna partícula de grava que impide el cierre completo del contactor, por lo que la corriente absorbida por la bobina del mismo es elevada, lo que provocará la destrucción de la bobina por calentamiento.

2. *Si una máquina eléctrica de c.a. se conecta por error a una tensión más elevada que la nominal (p. ej., si es de 220 V y se conecta a 380 V), de acuerdo con (1.80) se producirá un flujo* $\sqrt{3}$ *veces (que es el cociente 380/220) el nominal; como quiera que el material magnético suele diseñarse por el constructor en el codo de la curva de imanación (que corresponde a 1,4 o 1,5 teslas para la chapa magnética de la Fig. 1.3), se observa en esta figura que el campo magnético H necesario, que es proporcional a la corriente absorbida, aumenta enormemente siguiendo un valor asintótico a la curva de imanación. Es por ello que el devanado se quemará en muy poco tiempo.*

3. *Si se desmonta un motor eléctrico de c.a. y se separa el rotor del estátor (por ejemplo, cuando se rebobinan motores eléctricos), debe tenerse sumo cuidado de no aplicar como tensión de prueba del estátor su valor nominal, porque entonces se quemará el devanado, lo que se justifica por el hecho de que al quitar el rotor, la reluctancia del motor es muy elevada y el devanado absorberá una gran corriente de la red. Debe probarse el bobinado con tensión reducida del orden de 1/5 a 1/10 de la nominal.*

1.7.2. Circuito eléctrico equivalente de una bobina con núcleo de hierro alimentada con c.a.

Acabamos de demostrar en el epígrafe anterior que una bobina alimentada con c.a. da lugar a un flujo función de la magnitud y frecuencia de la tensión y que además, según las expresiones (1.74) y (1.78), el flujo se retrasa de la tensión un ángulo de 90°. En la Figura 1.29 se muestran los fasores correspondientes, habiendo tomado la tensión como referencia.

Es evidente, según se ha demostrado, que si el flujo en el núcleo es independiente de la naturaleza del material magnético, los efectos de saturación, histéresis, etc., deberán tener alguna influencia en la corriente absorbida. Nuestro objetivo ahora es intentar buscar las relaciones analíticas que unen a la tensión con la corriente para obtener circuitos eléctricos equivalentes que permitan analizar un sistema magnético excitado con c.a. con todo el potencial que nos presenta la teoría de circuitos.

En un principio, para facilitar los cálculos, se va a considerar que el **circuito magnético es lineal**, lo que equivale a suponer que el sistema tiene una permeabilidad constante. En el epígrafe 1.7.3 se ampliarán los conceptos correspondientes para tener en cuenta la no linealidad que presenta la curva de imanación de un material ferromagnético real. Para determinar los circuitos equivalentes de una bobina con núcleo de hierro es preciso considerar dos situaciones: *a*) que el núcleo no tenga pérdidas en el hierro y *b*) que el núcleo tenga pérdidas.

a) Núcleo sin pérdidas

Si consideramos que el núcleo magnético no tiene pérdidas y suponemos también despreciable la resistencia de la bobina, en esta situación la potencia activa absorbida (por la bobina) de la red será nula. De acuerdo con la ley de Hopkinson, se tendrá:

$$\Phi = \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{R}} = \frac{N i_{exc}}{\dfrac{\ell}{\mu S}} = \mu \frac{N i_{exc}}{\ell} S \tag{1.81}$$

donde se ha llamado i_{exc} a la corriente de excitación instantánea que circula por el devanado, ℓ a la longitud magnética media, S a la sección transversal del núcleo de la Figura 1.26 y μ la permeabilidad, que suponemos constante.

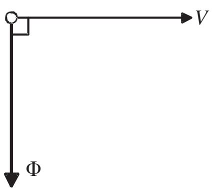


Figura 1.29. Fasores de tensión y flujo magnético.

Teniendo en cuenta la relación (1.76) se puede escribir:

$$v = N\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu N^2 S}{\ell}\frac{di_{exc}}{dt} \tag{1.82}$$

que comparando con la tensión en una bobina de coeficiente de autoinducción L, llevando una corriente i_{exc}:

$$v = L\frac{di_{exc}}{dt} \tag{1.83}$$

indica que L viene expresado por:

$$L = \frac{\mu N^2 S}{\ell} \tag{1.84}$$

lo cual quiere decir que el circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro (Fig. 1.30*a*) puede representarse por una autoinducción (Fig. 1.30*b*) cuya magnitud se expresa por (1.84), resultando el diagrama fasorial de la Figura 1.30*c*, donde se observa que $\mathbf{I}_{exc}$ va en fase con el flujo como indica (1.82) o (1.83), lo que está de acuerdo con el concepto de que la potencia activa absorbida es nula (por no existir pérdidas en el sistema).

b) Núcleo con pérdidas

En el caso de que el núcleo tenga pérdidas en el hierro, la corriente de excitación $\mathbf{I}_{exc}$ no formará 90° con la tensión, ya que la potencia activa absorbida de la red debe vencer esas pérdidas, de tal forma que si denominamos φ_v al ángulo que forman V e I_{exc} y P_{Fe} a las pérdidas en el hierro, se cumplirá:

$$P_{Fe} = VI_{exc}\cos\varphi_v \tag{1.85}$$

y el diagrama fasorial del sistema será el indicado en la Figura 1.31, donde puede observarse que $\mathbf{I}_{exc}$ tiene dos componentes, una $\mathbf{I}_{Fe}$ llamada componente de pérdidas en el hierro y otra $\mathbf{I}_{\mu}$ llamada corriente magnetizante, que vienen expresadas por:

$$a)\ I_{Fe} = I_{exc}\cos\varphi_v \quad ; \quad b)\ I_{\mu} = I_{exc}\,\text{sen}\,\varphi_v \quad ; \quad c)\ \mathbf{I}_{exc} = \mathbf{I}_{Fe} + \mathbf{I}_{\mu} \tag{1.86}$$

La identidad vectorial (1.86*c*) y el diagrama fasorial de la Figura 1.31 permite obtener el llamado **circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro**, indicado en la Figura 1.32*b*. En el nudo *A* de este circuito vemos que se cumple la ecuación (1.86*c*).

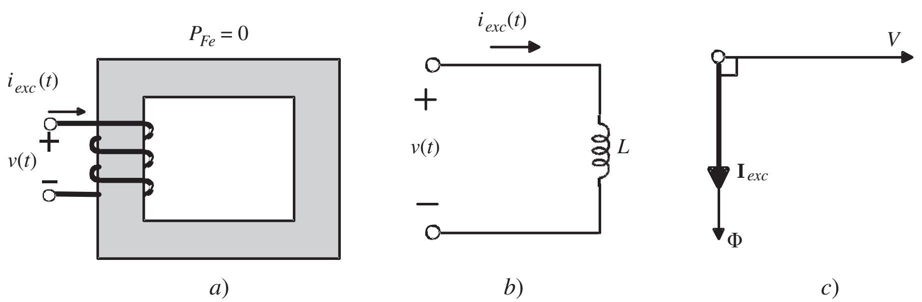


Figura 1.30. Circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro sin pérdidas.

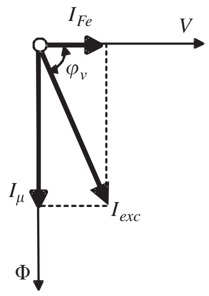


Figura 1.31. Diagrama fasorial de una bobina con núcleo real.

La corriente I_{Fe} debe pasar por una resistencia R_{Fe}, denominada resistencia de pérdidas en el hierro, ya que según indica la Figura 1.31, I_{Fe} va en fase con la tensión (circuito resistivo), mientras que la corriente I_μ debe pasar por una reactancia X_μ, llamada reactancia magnetizante, pues de la Figura 1.31 se observa que I_μ se retrasa 90° respecto de la tensión (circuito inductivo). Los valores de R_{Fe} y X_μ serán:

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}} \quad ; \quad X_\mu = \frac{V}{I_\mu} \tag{1.87}$$

Las pérdidas $R_{Fe}I_{Fe}^2$ indicarán las pérdidas en el núcleo del sistema magnético de la Figura 1.32*a*, mientras que la corriente I_μ expresa, al igual que en el caso del núcleo sin pérdidas, la corriente necesaria para magnetizar el material.

*1.7.3. Corriente de excitación en una bobina con núcleo de hierro alimentada con c.a.

En el epígrafe anterior, la determinación de la corriente de excitación se ha realizado suponiendo un circuito magnético lineal, de permeabilidad constante, lo que ha permitido obtener expresiones simples que relacionan la tensión con la corriente, o el flujo con la corriente. De hecho la linealidad implica que si la tensión aplicada es sinusoidal, son también sinusoidales las formas de onda de flujos y corrientes. En la práctica, la curva de imanación de un material ferromagnético es no lineal y de hecho el punto de trabajo normal en las máquinas eléctricas está en el codo de la curva de magnetización del material, lo que ejerce gran influencia en la forma de la curva de la corriente de excitación, que va a dejar de ser

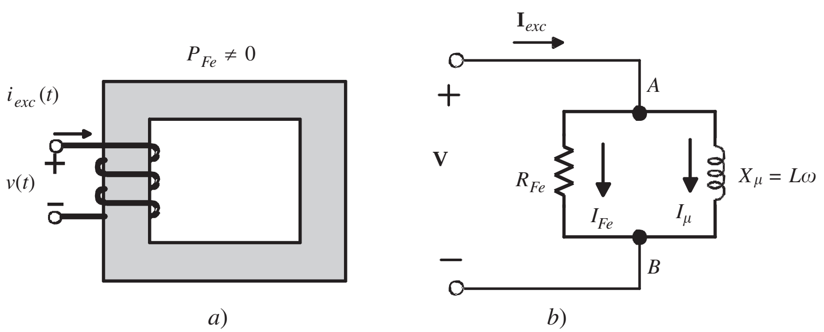


Figura 1.32. Circuito equivalente de una bobina con núcleo de hierro con pérdidas.

sinusoidal y teniendo que recurrir para su determinación a soluciones gráficas por ser imposible utilizar técnicas analíticas. De un modo análogo al efectuado en 1.7.2, se va a determinar la forma de la corriente de excitación, considerando dos casos: *a*) Núcleo sin pérdidas, *b*) Núcleo con pérdidas.

a) Núcleo sin pérdidas

La relación en este caso, entre el flujo Φ y la corriente de excitación i_{exc}, se obtiene gráficamente de la curva de magnetización del material, donde en vez de emplear, como se indicaba en la Figura 1.3, el eje de ordenadas para inducciones B, se utiliza la magnitud proporcional $\Phi = BS$, y donde en el eje de abscisas se empleaba $H = Ni_{exc}/\ell$ se emplea ahora i_{exc}.

En la Figura 1.33 se muestra este cálculo gráfico: en la *a*) se muestra la curva de magnetización del material $\Phi = f(i_{exc})$, en la Figura 1.33*b* se observa la forma sinusoidal de la tensión aplicada y la del flujo retrasado 90° respecto a V, como requiere la ecuación (1.82). Al punto A de la curva *b*) de flujo le corresponde el punto A′ en la curva de corrientes en virtud de la correspondencia Φ-i_{exc}; al punto B de la curva de flujo le corresponde B′ en la de corriente, y así sucesivamente hasta obtener la forma completa de la curva de la corriente de excitación del núcleo.

Se observa que la forma no es sinusoidal y por desarrollo en serie de Fourier puede demostrarse que aparecen armónicos impares: 1, 3, 5, etc. En la Figura 1.34*a* se muestra la curva acampanada de la corriente, que aparece como suma de una onda fundamental y un tercer armónico. En la Figura 1.34*b* se muestra la curva $v(t)$ y la corriente $i_{exc}(t)$, que van desfasadas 90°.

b) Núcleo con pérdidas

Suponiendo que el núcleo tenga únicamente pérdidas por histéresis, se obtiene la composición gráfica de la Figura 1.35, donde se ha superpuesto la curva i_{exc} con la del flujo para observar que aparte de la

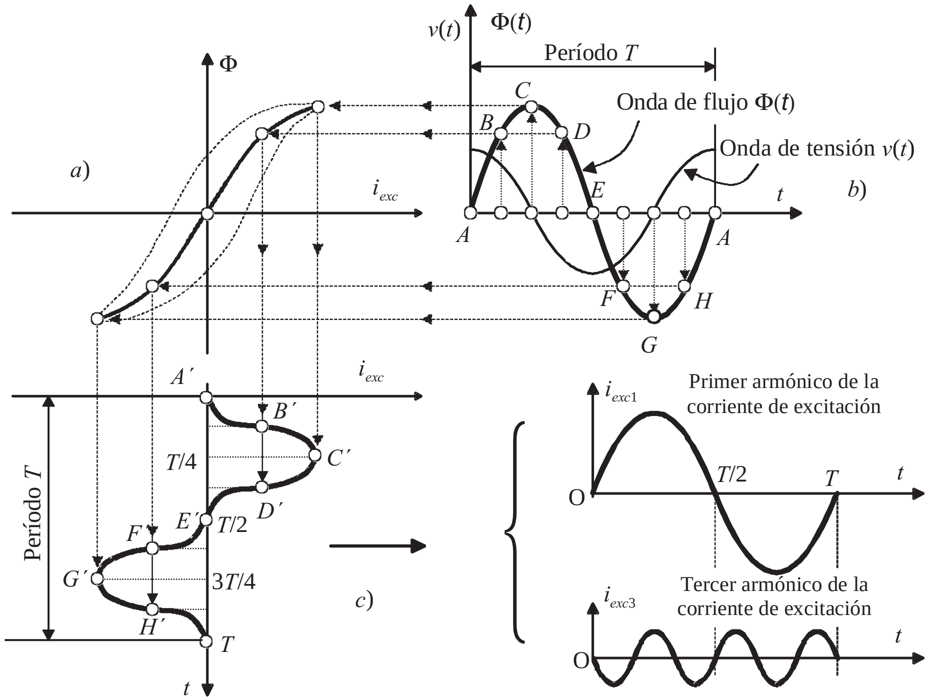


Figura 1.33. Deformación de la corriente de excitación de una bobina con núcleo sin pérdidas.

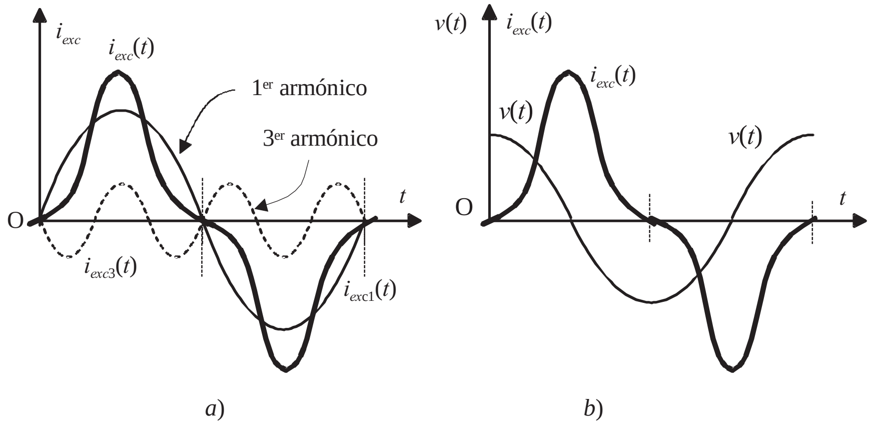


Figura 1.34. *a*) Corriente de vacío y sus armónicos. *b*) Ondas de tensión y corriente.

deformación de la curva de vacío de la corriente, ésta va desfasada del flujo debido a las pérdidas núcleo.

Puede demostrarse que la existencia de las pérdidas por corrientes de Foucault hace que se ensanche más el ciclo de pérdidas obligando a un nuevo desfase de las curvas de i_{exc} y Φ, lo cual está en correspondencia con el diagrama vectorial de la Figura 1.31, donde en la construcción se ha supuesto que i_{exc} es una senoide equivalente a la curva de vacío real, indicando con ello una onda sinusoidal que al circular por la bobina de excitación produzca las mismas pérdidas que la corriente real.

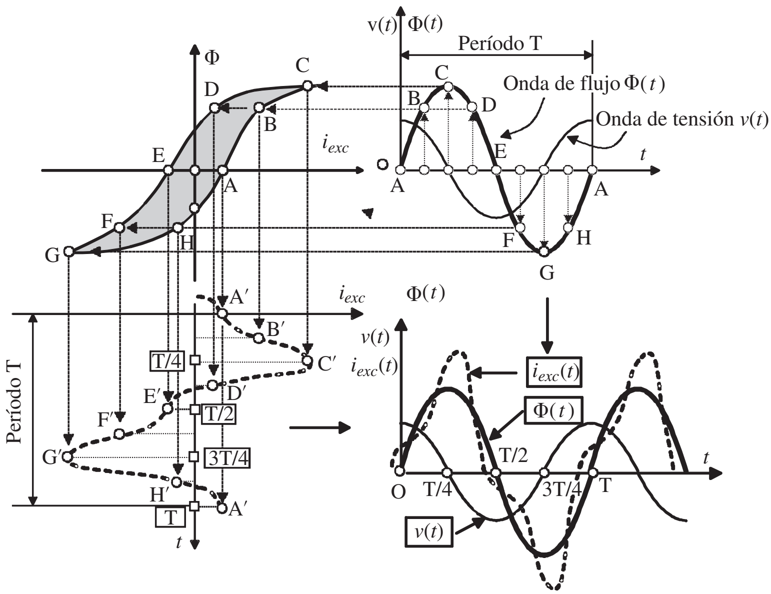


Figura 1.35. Deformación de la corriente de excitación de una bobina con núcleo con pérdidas.

Es necesario puntualizar que la representación fasorial es solamente válida para dibujar magnitudes sinusoidales y por ello el diagrama fasorial de la Figura 1.31 y el circuito equivalente correspondiente a que da lugar (Fig. 1.32*b*) es correcto cuando se considera el circuito magnético lineal. En el caso de tener en cuenta la no linealidad, la corriente de excitación de la Figura 1.31 representaría, como se acaba de indicar, una onda sinusoidal equivalente, que tendría un valor eficaz igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de la corriente fundamental y sus armónicos.

Ejemplo de aplicación 1.7

Considerar el núcleo magnético de la Figura 1.26, donde la longitud de la trayectoria magnética media es de 50 cm y la sección del núcleo es de 10 cm^2. El número de espiras es 300 y la tensión eficaz aplicada es 150/$\sqrt{2}$ voltios. La resistencia de la bobina se supone despreciable y la curva de magnetización del material responde a la expresión:

$$B = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-2}\, H}{1 + 10^{-2}\, H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

Calcular: a) Las corrientes I_{Fe}, I_μ e I_{exc} y el ángulo de desfase φ_v. b) Parámetros R_{Fe} y X_μ del circuito equivalente de la bobina. Datos: La frecuencia de la tensión es de 50 Hz y las pérdidas en el hierro con la tensión aplicada son de 20 W.

Solución

a) De acuerdo con la expresión (1.80), el valor del flujo máximo es:

$$\Phi_m = \frac{V}{4{,}44\ fN} = \frac{150/\sqrt{2}}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 300} = 1{,}59 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

que corresponde a una densidad de flujo B_m:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{1{,}59 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1{,}59\ \text{Teslas}$$

que llevando a la curva de imanación del material, se obtiene:

$$B_m = 1{,}59 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-2}\, H_m}{1 + 10^{-2}\, H_m} \quad \Rightarrow \quad H_m = 757\ \text{A.v/m}$$

«Suponiendo» que la curva de H_m fuera sinusoidal, el valor eficaz de H sería:

$$H = \frac{H_m}{\sqrt{2}} = \frac{757}{2} = 535{,}28\ \text{A.v/m}$$

y como $H = NI_\mu/\ell$, quedaría: $I_\mu = \dfrac{H\ell}{N} = \dfrac{535{,}28 \cdot 0{,}5}{300} = 0{,}9$ A

Por otra parte, las pérdidas en el hierro son de 20 W y de acuerdo con (1.85) se tiene:

$$20 = \frac{150}{\sqrt{2}} \cdot I_{exc} \cos \varphi_v = \frac{150}{\sqrt{2}} I_{Fe} \quad \Rightarrow \quad I_{Fe} = 0{,}19\ \text{A}$$

De acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 1.31, se cumple:

$$I_{exc} = \sqrt{I_{Fe}^2 + I_\mu^2} = \sqrt{0{,}19^2 + 0{,}9^2} = 0{,}92 \text{ A} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos \varphi_v = \frac{I_{Fe}}{I_\mu} = \frac{0{,}19}{0{,}92} = 0{,}21 \quad \Rightarrow \quad \varphi_v = 78{,}08°$$

b) Los valores de R_{Fe} y X_μ pueden obtenerse de las ecuaciones (1.87):

$$R_{Fe} = \frac{V}{I_{Fe}} = \frac{150/\sqrt{2}}{0{,}19} = 558{,}24\ \Omega \quad ; \quad X_\mu = \frac{V}{I_\mu} = \frac{150/\sqrt{2}}{0{,}9} = 117{,}85\ \Omega$$

1.8. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS CON MOVIMIENTO DE TRASLACIÓN. ELECTROIMANES

En el epígrafe 1.5 se ha demostrado que un campo magnético almacena energía; por otro lado, un campo magnético también ejerce fuerzas mecánicas en las estructuras o partes de las estructuras asociadas con él. Estas dos propiedades hacen que se utilice el campo magnético como un enlace eficaz entre las partes eléctricas y mecánicas de muchos dispositivos electromecánicos y en particular de las máquinas eléctricas que son convertidores electromecánicos de la energía. En este epígrafe y en el siguiente se van a explicar los principios básicos de la conversión electromecánica de la energía, cuyo fundamento, como sistema físico que es, está basado en el principio general de la conservación de la energía. Nuestro objetivo va a ser aplicar esta ley a sistemas que utilizan el campo magnético como medio de enlace en la conversión. Considérese, para iniciar nuestro estudio, el sistema magnético dotado de movimiento de traslación indicado en la Figura 1.36, que tiene un devanado de excitación de *N* espiras arrolladas sobre una armadura fija.

Existe una armadura móvil que tiene un solo grado de libertad (su movimiento se restringe al plano horizontal). Cuando circula una corriente por la bobina de excitación, se establece un flujo magnético en el núcleo que provoca una fuerza de atracción sobre la armadura móvil,

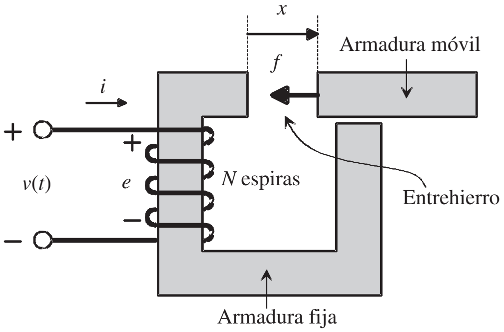


Figura 1.36. Sistema electromecánico de traslación.

lo que reduce el entrehierro central, con la consiguiente disminución en la reluctancia del circuito magnético y la variación subsiguiente en la energía magnética almacenada. En la Figura 1.36 se han señalado los sentidos positivos de referencia, tanto en lo que concierne al terminal eléctrico, tensión y corriente, como al terminal mecánico, fuerza y desplazamiento. Si la armadura móvil se desliza hacia la izquierda desde una posición inicial $x_1 = x$ hasta una posición final $x_2 = x - dx$, el principio de conservación de la energía aplicado al sistema nos dará la ecuación:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} + dW_p \tag{1.88}$$

y en la expresión anterior se ha denominado:

dW_e: cambio en la energía eléctrica absorbida de la red.
dW_m: cambio en la energía magnética almacenada en el sistema.
dW_{mec}: cambio en la energía mecánica debida al movimiento de la armadura móvil.
dW_p: cambio en la energía perdida.

La ecuación anterior representa la ley de conservación de la energía aplicada a un sistema motor, es decir, a una transformación de energía eléctrica en mecánica. En el supuesto de considerar despreciables las pérdidas en el sistema, la ecuación (1.88) se transforma en:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} \tag{1.89}$$

Las pérdidas inherentes al sistema son: *a*) pérdidas por efecto Joule en la bobina, *b*) pérdidas en el hierro en el núcleo ferromagnético: histéresis y corrientes de Foucault, y *c*) pérdidas mecánicas de rozamiento de la armadura móvil. Vamos a analizar a continuación cada uno de los términos mostrados en la ecuación (1.89). Comenzamos con la energía magnética. En la Figura 1.37 se han representado las dos curvas de imanación del sistema magnético de la Figura 1.36, correspondientes a las dos posiciones de la armadura móvil: $x_1 = x$ y $x_2 = x - dx$.

Es evidente que existe una curva de imanación para cada una de las posiciones de la armadura móvil, o de otro modo, que la curva de imanación depende de la distancia x. Si se considera, por ejemplo, un flujo constante, definido por Φ_1 en la Figura 1.37, para la posición inicial $x_1 = x$ se necesita una f.m.m. $\mathscr{F}_1$, mientras que para la posición final $x_2 = x - dx$ se

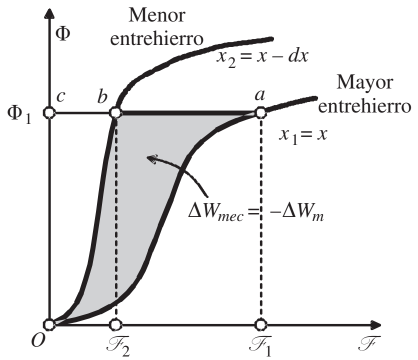


Figura 1.37. Energías en un sistema electromecánico no lineal. Funcionamiento a flujo constante.

necesita una f.m.m. $\mathscr{F}_2$, que es menor que $\mathscr{F}_1$, ya que corresponde a un menor entrehierro, es decir, a una reluctancia menor, lo que está de acuerdo con la ley de Hopkinson:

$$\Phi = \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{R}} \quad ; \quad \mathscr{F} = \Phi \mathscr{R} \tag{1.90}$$

Se observa en la ecuación anterior que si Φ es constante, a menor reluctancia corresponde menor f.m.m. Se puede razonar también de otro modo: si se considera una f.m.m. constante el flujo es tanto mayor cuanto menor es la reluctancia del circuito magnético (menor entrehierro). De ahí que en las curvas de imanación de la Figura 1.37, la curva más alta corresponda a un menor entrehierro (es decir, la armadura móvil se ha acercado a la armadura fija). De acuerdo con el epigrafe 1.5 (véase Fig. 1.21 y ecuación 1.48), si suponemos una situación inicial con un entrehierro $x_1 = x$ y un flujo en el núcleo Φ_1 (punto *a* de la Fig. 1.37), la energía magnética almacenada vendrá expresada por el área «*oaco*». Cuando se mueve la armadura móvil, la posición de ésta cambia desde x_1 a x_2. La localización del nuevo punto de trabajo (nuevo estado) del sistema depende de cómo se ha efectuado el cambio de x_1 a x_2. Existen dos formas básicas en la práctica de la ingeniería eléctrica que tienen interés:

a) El movimiento se realiza a flujo constante

Esta situación se logra ajustando la corriente durante el movimiento, o considerando que la traslación del núcleo es suficientemente rápida como para que no le dé tiempo a cambiar al flujo durante la transición. En este caso la energía eléctrica absorbida de la red será cero. Téngase en cuenta en la Figura 1.36 y ecuación (1.89) que la energía aléctrica absorbida durante la traslación vale:

$$dW_e = v\ i\ dt = N\frac{d\Phi}{dt}\ i\ dt = N\ i\ d\Phi \tag{1.91}$$

y al no existir variación de flujo durante el movimiento indicará que $dW_e = 0$, es decir, no hay aportación de energía eléctrica. Por consiguiente, la ecuación (1.89) se transformará en:

$$0 = dW_m + dW_{mec} \tag{1.92}$$

es decir:

$$dW_{mec} = -\,dW_m \tag{1.93}$$

lo que se expresa diciendo **que el trabajo mecánico se realiza a expensas de la reducción en la energía magnética almacenada.**

Si el flujo permanece constante en la transición de la armadura móvil, el nuevo estado de equilibrio corresponderá en la Figura 1.37 al punto *b*, para el cual la energía magnética almacenada en este estado final viene expresada por el área «*obco*». De este modo se ha producido una **reducción** de la energía magnética durante la traslación, que viene expresada en la Figura 1.37 por el área rayada «*oabo*» y que teniendo en cuenta (1.93) será igual al trabajo mecánico desarrollado. Si la fuerza de atracción se designa por *f*, el trabajo mecánico producido valdrá $f \cdot dx$, por lo que la expresión de la fuerza en función de la energía magnética almacenada, teniendo en cuenta (1.93), será:

$$f = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial x}\right]_{\Phi=cte} \tag{1.94}$$

En la ecuación anterior la derivada parcial indica que al depender la energía magnética almacenada del espesor del entrehierro y de otras variables, la derivación debe hacerse respecto a x, considerando constante el flujo. De acuerdo con (1.94), *la fuerza mecánica sobre la armadura móvil tiende a reducir la energía almacenada en el circuito magnético*, y como quiera que ésta se reduce cuando disminuye el entrehierro, el sentido de la fuerza que se ejerce sobre la armadura móvil de la Figura 1.36 es siempre de ***atracción***.

Si las curvas de imanación de la Figura 1.37 son líneas rectas (lo que ocurre en la práctica cuando los entrehierros son grandes), entonces, de acuerdo con (1.54), la expresión de la energía magnética almacenada será:

$$W_m = \frac{1}{2} \mathscr{R} \Phi^2 \tag{1.95}$$

por lo que según (1.94) dará lugar a la fuerza:

$$f = -\frac{1}{2} \Phi^2 \frac{d\mathscr{R}}{dx} \tag{1.96}$$

De acuerdo con esta expresión, *la fuerza sobre la armadura móvil tendrá el sentido de reducir la reluctancia del circuito magnético.* No habrá fuerza en otras direcciones en las que el movimiento no produzca cambio en la reluctancia magnética.

b) El movimiento se realiza con corriente constante

Esta situación se produce en la práctica si el movimiento de la armadura móvil es suficientemente lento. Si se parte de la posición inicial mostrada en la Figura 1.38 por el punto a, definido por la f.m.m. $\mathscr{F}_1$ y flujo Φ_1, el nuevo estado de equilibrio (si se mantiene la corriente constante o, lo que es lo mismo, si es constante la f.m.m.) corresponderá al punto e, para el cual el flujo tiene un valor Φ_2. Al existir un cambio de flujo en el sistema, existirá, de acuerdo con (1.91), un cambio en la energía eléctrica de entrada a la bobina durante la transición. Para poder determinar el sentido geométrico de la energía mecánica desarrollada en esta situación

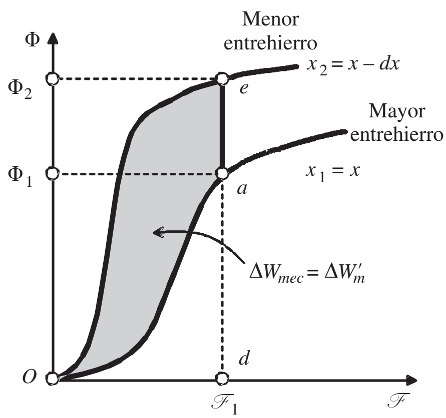


Figura 1.38. Energías en un sistema electromecánico no lineal. Funcionamiento a corriente constante.

es conveniente emplear el concepto de coenergía definido en el epígrafe 1.5. Téngase en cuenta que el principio de conservación de la energía expresado en (1.89) nos da:

$$dW_e = dW_m + dW_{mec} = N\,i\,d\Phi = \mathscr{F} d\Phi \tag{1.97}$$

donde el último término representa, según (1.80), el cambio en la energía eléctrica de entrada. Como quiera además que de acuerdo con la Figura 1.21 se cumple:

$$W_m + W'_m = \mathscr{F}\Phi \tag{1.98}$$

donde W'_m representa la coenergía magnética, al diferenciar la ecuación anterior resultará:

$$dW_m + dW'_m = \mathscr{F} d\Phi + \Phi\, d\mathscr{F} \tag{1.99}$$

y llevando el valor de dW_m de (1.99) a (1.97) se obtiene:

$$(\mathscr{F} d\Phi + \Phi\, d\mathscr{F} - dW'_m) + dW_{mec} = \mathscr{F} d\Phi \tag{1.100}$$

Simplificando la ecuación anterior y teniendo en cuenta que $d\mathscr{F} = 0$ en la transición (debido a que la f.m.m. se mantiene constante), resulta:

$$dW_{mec} = dW'_m \tag{1.101}$$

lo que indica que el trabajo mecánico se realiza ahora a expensas del aumento en la coenergía magnética almacenada. En el caso de la Figura 1.38, y teniendo en cuenta el significado geométrico de la coenergía mostrado en la Figura 1.21, la coenergía inicial corresponde al área «*odao*», mientras que la coenergía final corresponderá al área «*odeo*», por lo que el cambio en la coenergía (valor final menos el inicial) vendrá expresado por el área rayada «*oaeo*» y que según (1.101) define también el trabajo mecánico desarrollado en el movimiento. Como quiera que el trabajo anterior es igual a $f \cdot dx$, resultará una expresión para la fuerza:

$$f = +\left[\frac{\partial W'_m}{\partial x}\right]_{i=cte} \tag{1.102}$$

Si se considera el sistema lineal, la coenergía vendrá expresada según (1.54) por:

$$W'_m = \frac{1}{2}\frac{\mathscr{F}^2}{\mathscr{R}} \tag{1.103}$$

y al llevar (1.103) a (1.102) resulta:

$$f = \frac{1}{2}\mathscr{F}^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\mathscr{R}}\right) = \frac{1}{2}\mathscr{F}^2 \frac{d\mathscr{P}}{dx} \tag{1.104}$$

donde $\mathscr{P} = 1/\mathscr{R}$ expresa la denominada **permeancia** del circuito magnético, análoga a la conductancia de los circuitos eléctricos. A veces es más interesante expresar la ecuación anterior en función de la inductancia del circuito. Si se tiene en cuenta entonces (1.59), resultará:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \tag{1.105}$$

ecuación que es más útil desde el punto de vista de la teoría de circuitos y que significa *que la fuerza tiende a incrementar el valor de la inductancia L*. Esta expresión se conoce en la bibliografía francesa como *fórmula de Picou.*

En la mayoría de las situaciones prácticas se suele considerar que se trabaja con sistemas lineales, por lo que las expresiones (1.96), (1.104) y (1.105) son equivalentes y por consiguiente redundantes. El sentido de la fuerza corresponde en cada caso a reducir la reluctancia (1.105) si la corriente es constante. El sentido es siempre de atracción. La aplicación más importante de la fuerza magnética en la ingeniería eléctrica está en los electroimanes. Para grandes potencias los electroimanes se emplean para levantar vigas de hierro, viruta, chatarra, etcétera; en otros casos, al actuar sobre unas zapatas se pueden emplear como frenos eléctricos, embragues, electroimanes, etc. En potencias menores los electroimanes constituyen la base de los **relés y contactores**, en los que la corriente en una bobina hace que se produzca una atracción sobre una armadura móvil en oposición a la fuerza antagonista de un muelle. Los relés se utilizan en instalaciones de semáforos, en sistemas de control automático y se han empleado hasta fechas muy recientes en las centrales telefónicas *tipo rotary* (hoy día estas centrales funcionan mediante sistemas digitales controlados por ordenador). Cuando el relé permite activar una carga trifásica se denomina *contactor*, y este dispositivo es la base de los automatismos para el control de motores eléctricos y otros tipos de instalaciones. La gran ventaja de los relés y contactores estriba en que actuando sobre las pequeñas corrientes absorbidas por las bobinas de su circuito magnético se pueden controlar mediante el cierre o la apertura de su armadura móvil otros circuitos que consumen intensidades mayores (acción de **rele**-vo). En la Figura 1.39 se muestra el esquema básico de un relé.

Un aspecto importante a considerar en los electroimanes (relés, contactores, etc.) es el tipo de alimentación a la bobina, que puede hacerse con c.c. o c.a. Supóngase el circuito magnético de la Figura 1.39, en el que se desprecia la reluctancia del hierro frente a la del entrehierro. En el supuesto de que el movimiento de la armadura se realice a flujo constante, la fuerza magnética, de acuerdo con (1.96), tendrá la siguiente expresión:

$$f = -\frac{1}{2}\Phi^2 \frac{d\mathscr{R}}{dx} \tag{1.106}$$

lo que significa *que la fuerza tiende a reducir la reluctancia del circuito magnético*. Si se denomina x el espesor del entrehierro, S la sección del mismo y μ_0 la permeabilidad del aire, la reluctancia del sistema magnético que se limita a la reluctancia del entrehierro valdrá:

$$\mathscr{R} = \frac{x}{\mu_0 S} \tag{1.107}$$

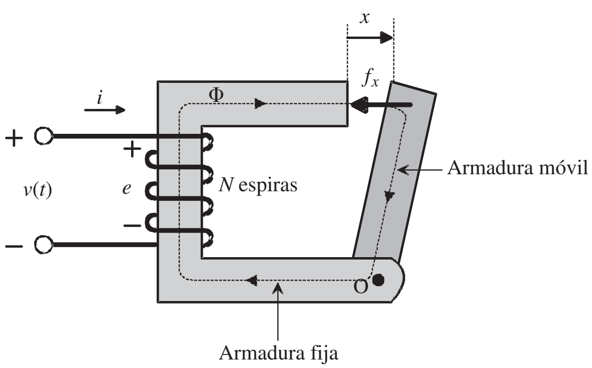


Figura 1.39. Principio de funcionamiento de un electroimán (relé).

y al sustituir en (1.106) resulta una expresión para la fuerza:

$$f = -\frac{1}{2}\,\Phi^2\,\frac{1}{\mu_0 S} \tag{1.108}$$

Como se ha indicado antes, el significado del signo − (menos) es que la fuerza tiende a reducir el entrehierro y se produce en cada uno de los posibles entrehierros que tenga el circuito. Es evidente en la expresión anterior que si la bobina se alimenta con c.c. el flujo tendrá un valor independiente del tiempo, lo que provocará una fuerza, según (1.108), que no dependerá del tiempo. Ahora bien, si la bobina se alimenta con c.a., el flujo será alterno y en consecuencia la fuerza dependerá del tiempo. Si se parte, por ejemplo, de un flujo de la forma:

$$\Phi = \Phi_m \operatorname{sen} \omega t \tag{1.109}$$

La fuerza de atracción se obtiene al sustituir (1.109) en (1.108), resultando ser:

$$f(t) = \frac{\Phi_m^2}{2\mu_0 S}\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{\Phi_m^2}{4\mu_0 S}(1 - \cos 2\omega t) \tag{1.110}$$

En la Figura 1.40 se ha representado la evolución con el tiempo del flujo y de la fuerza instantánea. Como indica la expresión (1.110), la fuerza electromagnética en un electroimán alimentado por c.a. tiene una frecuencia doble que la de alimentación pasando por un valor cero a otro $f_{\text{máx}}$. Como quiera que, en general, la armadura de los mecanismos electromagnéticos está constantemente sometida a la acción de la fuerza antagonista de un muelle f_{ant}, o al peso del sistema móvil (véase Fig. 1.41).

En los intérvalos de tiempo en los que $f(t) < f_{ant}$, la armadura se separa de los polos, mientras que cuando $f(t) > f_{ant}$, la armadura móvil queda atraída por la fija. Este hecho es un inconveniente y es totalmente inadmisible, ya que provoca la vibración de la armadura del electroimán, deformando los polos y provocando ruidos intensos. El medio más eficaz para evitar la vibración de la armadura es colocar unas espiras cortocircuitadas sobre los polos del electroimán, denominadas **espiras de sombra** (o espiras de Frager en la bibliografía francesa) en la Figura 1.41 puede observarse la colocación de una de estas espiras, en un circuito magnético de un solo entrehierro, y se observa que la fuerza antagonista está producida por el peso *mg* de la armadura móvil.

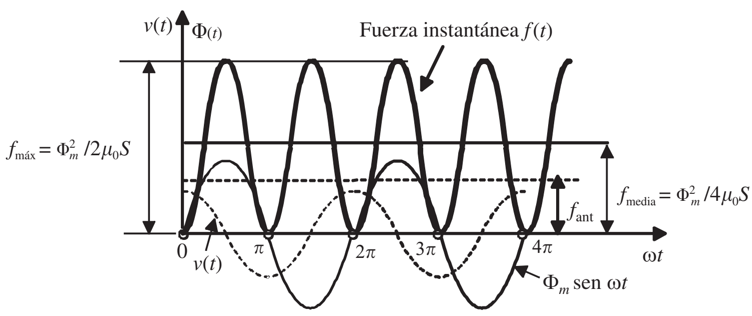


Figura 1.40. Curva de fuerza magnética en un electroimán alimentado con c.a.

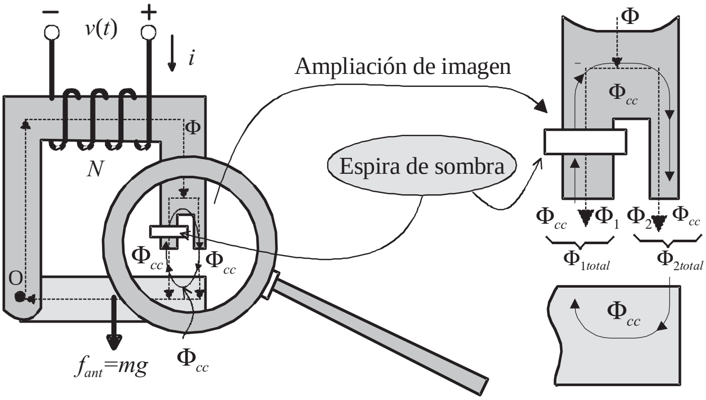


Figura 1.41. Electroimán con espira de sombra. Detalle de los flujos.

El flujo Φ creado por la bobina del electroimán se divide en dos partes Φ_1 y Φ_2; el flujo Φ_1 pasa por la espira cortocircuitada e induce una f.e.m. que produce una corriente en la misma, creando su propio flujo Φ_{cc}, de tal forma que el flujo total que atraviesa la parte del polo abrazada por la espira $(\Phi_1 - \Phi_{cc})$ y el flujo de la parte del polo no abrazada $(\Phi_2 + \Phi_{cc})$ están desfasadas un ángulo α. Si estos flujos vienen expresados por:

$$\Phi_{1total} = \Phi_1 - \Phi_{cc} = \Phi_{m1}\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\Phi_{2total} = \Phi_2 + \Phi_{cc} = \Phi_{m2}\cos\omega t \qquad (1.111)$$

la fuerza resultante en el entrehierro, de acuerdo con (1.110), será de la forma:

$$f_{total} = f_1 + f_2 = K_1\Phi_{m1}^2\cos(\omega t + \alpha) + K_2\Phi_{m2}^2\cos^2\omega t \qquad (1.112)$$

cuya curva de variación con el tiempo se indica en la Figura 1.42. Esta fuerza varía entre $f_{mín}$ y $f_{máx}$ sin pasar por cero. Si $f_{mín} > f_{ant}$ no existirán vibraciones en la armadura. Normalmente la superficie abrazada por la espira suele variar entre el 75 y el 80 por 100 de la sección total del polo, de esta forma se minimizan las pérdidas por efecto Joule en la espira y se obtiene una fuerza óptima en el entrehierro.

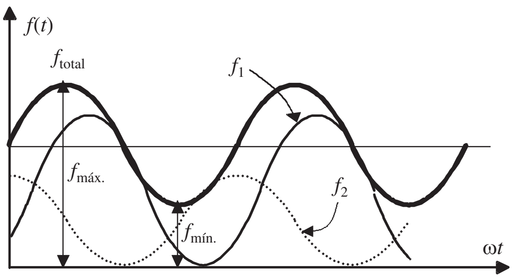


Figura 1.42. Fuerzas componentes en un electroimán con espira de sombra.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Si se quitan las espiras de sombra de un contactor, se notará una fuerte vibración en el mismo, y si éste se utiliza para la puesta en marcha de un motor, se pueden provocar fuertes corrientes de cierre y apertura en el circuito principal, que normalmente hacen actuar los cortacircuitos fusibles de protección. Ésta era una broma que hacían los antiguos maestros industriales a los peritos o ingenieros técnicos que se incorporaban al taller eléctrico de la empresa y que éstos transmitían luego a los nuevos ingenieros. Era desconcertante repasar continuamente el circuito del automatismo del motor y comprobar que era correcto y sin embargo el conjunto funcionaba mal. ¡La ausencia de las espiras de sombra eran las culpables de tal desaguisado! ¡Qué mala ***sombra*** tenía la cosa!

Ejemplo de aplicación 1.8

La Figura 1.43 muestra el circuito magnético de un electroimán cuya bobina tiene 1.000 espiras. La sección transversal de todas las trayectorias magnéticas es de 10 cm^2. Se desprecia la reluctancia del hierro y la dispersión magnética en el entrehierro. Si se hace circular por la bobina una corriente continua de 10 A, calcular para las separaciones x = 2 cm y x = 1 cm las siguientes magnitudes: 1) Flujo e inducción magnética en el entrehierro; 2) inductancia de la bobina; 3) energía y densidad de energía magnética en el entrehierro; 4) fuerza que actúa sobre la armadura móvil; 5) si la armadura móvil se mueve muy lentamente desde x = 2 cm a x = 1 cm, determinar: a) cambio en la energía magnética almacenada; b) energía eléctrica suministrada por la fuente de alimentación, suponiendo despreciable la resistencia eléctrica de la bobina y el rozamiento de la armadura móvil; c) trabajo mecánico realizado, comprobando el balance energético del sistema; 6) contestar a la pregunta 5 si se supone que el movimiento de la armadura móvil es lo suficientemente rápido para que el flujo total no cambie durante la traslación.

Solución

1. La reluctancia del circuito magnético se limita a la reluctancia del entrehierro, cuyo valor para cada espesor del mismo es:

$$x = 2 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{R}_1 = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} = 15{,}92 \cdot 10^6 \text{ A.v/Wb}$$

$$x = 1 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{R}_2 = \frac{x}{\mu_0 S} = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}} = 7{,}96 \cdot 10^6 \text{ A.v/Wb}$$

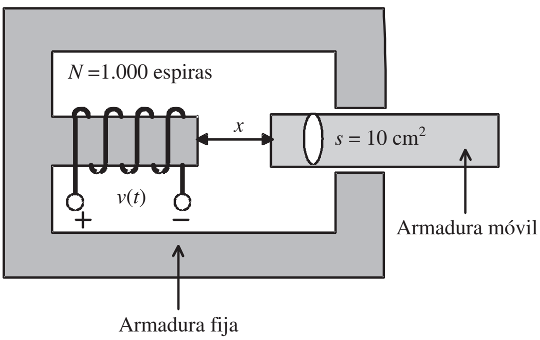


Figura 1.43.

La f.m.m. aplicada a la bobina es $\mathscr{F} = Ni = 10^4$ A.v, por lo que los flujos correspondientes serán:

$$\Phi_1 = \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{R}_1} = \frac{10^4}{15,92 \cdot 10^6} = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb} \quad ; \quad \Phi_2 = \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{R}_2} = \frac{10^4}{7,96 \cdot 10^6} = 12,56 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

que corresponden a unas inducciones ($B = \Phi/S$):

$$B_1 = 0,628 \text{ teslas} \quad ; \quad B_2 = 1,256 \text{ teslas}$$

2. La inductancia de la bobina es, según (1.58):

$$L = \frac{N^2}{\mathscr{R}} = \frac{N^2 \mu_0 S}{x}$$

que al sustituir valores da lugar en cada caso a unas inductancias:

$$L_1 = 0,0628 \text{ henrios} \quad ; \quad L_2 = 0,1256 \text{ henrios}$$

3. La energía magnética es, según (1.59), igual a:

$$W_m = \frac{1}{2} L\, i^2$$

que teniendo en cuenta el apartado anterior corresponde a los valores:

$$W_{m1} = 3,14 \text{ julios} \quad ; \quad W_{m2} = 6,28 \text{ julios}$$

Como quiera que el volumen del entrehiero es en cada caso:

$$V_1 = Sx_1 = 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \quad ; \quad V_2 = Sx_2 = 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

se obtienen unas densidades de energía magnética (energía por unidad de volumen):

$$w_{m1} = \frac{W_{m1}}{V_1} = \frac{3,14}{2 \cdot 10^{-5}} = 1,57 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3 \quad ; \quad w_{m2} = \frac{W_{m2}}{V_2} = \frac{6,28}{1 \cdot 10^{-5}} = 6,28 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3$$

cuyos valores pueden obtenerse también aplicando la ecuación (1.55), como puede comprobar fácilmente el lector.

4. De acuerdo con (1.105), se tiene:

$$f = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

y teniendo en cuenta la expresión de la inductancia determinada en el apartado 2 resulta:

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{N^2 \mu_0 S}{x} = -\frac{L}{x} \quad \Rightarrow \quad f = -\frac{1}{2} i^2 \frac{L}{x}$$

que para $x = 2$ cm y $x = 1$ cm nos da unos valores de la fuerza:

$$|f_1| = \frac{1}{2} 10^2 \frac{0,0628}{2 \cdot 10^{-2}} = 157 \text{ newton} \quad ; \quad |f_2| = \frac{1}{2} 10^2 \frac{0,1256}{1 \cdot 10^{-2}} = 628 \text{ newton}$$

El lector puede llegar también a los mismos resultados anteriores aplicando la expresión (1.108).

5. *a*) Si la armadura se mueve muy lentamente, la traslación se realizará a corriente constante. El cambio en la energía magnética almacenada, de acuerdo con los resultados obtenidos en el apartado 3, será:

$$\Delta W_m = W_{m2} - W_{m1} = 6{,}28 - 3{,}14 = 3{,}14 \text{ julios}$$

b) La energía eléctrica suministrada por la fuente vendrá expresada por la integración de (1.97), dando lugar a:

$$W_e = \mathscr{F}(\Phi_2 - \Phi_1) = 10^4\,(12{,}56 \cdot 10^{-4} - 6{,}28 \cdot 10^{-4}) = 6{,}28 \text{ Julios}$$

c) El trabajo mecánico desarrollado será:

$$W_{mec} = \int f\,dx = \int -\frac{1}{2}\,i^2\,\frac{dL}{dx}\,dx = \int_{L_1}^{L_2} -\frac{1}{2}\,i^2\,dL = -\frac{1}{2}\,i^2\,(L_2 - L_1)$$

es decir:

$$W_{mec} = \frac{1}{2}\,10^2\,(0{,}1256 - 0{,}0628) = 3{,}14 \text{ julios}$$

y de este modo se cumple el principio de conservación de la energía (1.97), que aplicado a este caso nos da:

$$W_e = \Delta W_m + \Delta W_{mec} \quad \Rightarrow \quad 6{,}28 = 3{,}14 + 3{,}14 \text{ julios}$$

Se puede dar una interpretación del trabajo mecánico desarrollado en función de la variación en la coenergía magnética. Téngase en cuenta que según (1.98) se cumple:

$$W'_m = \mathscr{F}\Phi - W_m$$

por lo que las coenergías magnéticas para cada valor del entrehierro serán:

$$W'_{m1} = \mathscr{F}\Phi_1 - W_{m1} = 10^4 \cdot 6{,}28 \cdot 10^{-4} - 3{,}14 = 3{,}14 \text{ julios}$$
$$W'_{m2} = \mathscr{F}\Phi_2 - W_{m2} = 10^4 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-4} - 6{,}28 = 6{,}28 \text{ julios}$$

que coinciden con las energías magnéticas calculadas en el apartado 3, en virtud de la linealidad del circuito magnético. De este modo el cambio en la coenergía magnética será:

$$\Delta W'_m = W'_{m2} - W'_{m1} = 6{,}28 - 3{,}14 = 3{,}14 \text{ julios}$$

que coincide con el trabajo mecánico W_{mec} calculado anteriormente, lo que confirma la condición (1.101):

$$W_{mec} = \Delta W'_m = 3{,}14 \text{ julios}$$

Es decir, el trabajo mecánico se ha realizado a expensas del aumento en la coenergía magnética almacenada en el sistema.

6. *a*) Si el movimiento se realiza a flujo constante, la energía magnética almacenada responderá a la expresión (1.95)

$$W_m = \frac{1}{2}\,\mathscr{R}\,\Phi^2 = \frac{1}{2}\,\frac{x}{\mu_0 S}\,\Phi^2$$

donde el flujo es un parámetro constante y que para x_1 = 2 cm vale, según el apartado 1:

$$\Phi = \Phi_1 = 6{,}28 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

De este modo las energías magnéticas almacenadas para x_1 = 2 cm y x_2 = 1 cm son:

$$W_{m1} = \frac{1}{2}\frac{2 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}}(6{,}28 \cdot 10^{-4})^2 = 3{,}14 \text{ Julios}$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2}\frac{1 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}}(6{,}28 \cdot 10^{-4})^2 = 1{,}57 \text{ Julios}$$

y como consecuencia de ello el cambio en la energía magnética almacenada será:

$$\Delta W_m = W_{m2} - W_{m1} = -1{,}57 \text{ Julios}$$

lo que implica una reducción en la energía magnética almacenada.

b) Si el flujo es constante, de acuerdo con (1.91) no habrá energía eléctrica suministrada por la fuente, es decir, $W_e = 0$.

c) El trabajo mecánico desarrollado se obtendrá integrando (1.96):

$$W_{mec} = \int f\,dx = \int -\frac{1}{2}\Phi^2 \frac{d\mathscr{R}}{dx}dx = \int_{\mathscr{R}_1}^{\mathscr{R}_2} -\frac{1}{2}\Phi^2\,d\mathscr{R} = -\frac{1}{2}\Phi^2(\mathscr{R}_2 - \mathscr{R}_1)$$

es decir:

$$W_{mec} = -\frac{1}{2}(6{,}28 \cdot 10^{-4})^2(7{,}96 \cdot 10^6) = +1{,}57 \text{ Julios}$$

y el principio de conservación de la energía nos dará:

$$W_e = \Delta W_m + W_{mec} \quad \Rightarrow \quad 0 = \Delta W_m + W_{mec}$$

que sustituyendo valores es:

$$0 = -1{,}57 + 1{,}57 = 0$$

lo que indica que el trabajo mecánico se ha realizado a expensas de la reducción en la energía magnética almacenada. Es instructivo para el lector que desarrolle los apartados 5 y 6 de este ejemplo, construyendo las Figuras 1.38 y 1.37, respectivamente, para cada situación. Téngase en cuenta que las relaciones flujo-f.m.m. representadas en estas figuras serán ahora líneas rectas en virtud de considerar la reluctancia del hierro despreciable.

Ejemplo de aplicación 1.9: Relé electromagnético

En la Figura 1.44 se muestra el mecanismo de un relé electromagnético. Al aplicar una corriente continua a la bobina, se produce la atracción de la armadura móvil que cierra los contactos ***a*** y ***a'*** *haciendo funcionar una carga de mayor consumo que la necesaria por la bobina del relé, lo que permite controlar grandes intensidades de cargas por actuación sobre intensidades pequeñas necesarias para la excitación de la bobina. Si la corriente que circula por la bobina es igual a 20 mA, y se desprecia la f.m.m. necesaria para el hierro, calcular: a) Fuerza y coeficiente de autoinducción de la bobina cuando el entrehierro x es igual a 3 mm. b) Ídem cuando x = 3,6 mm. c) Si la resistencia de la bobina es igual a 100 Ω, calcular la tensión que es necesario aplicar a la misma para mantener constante la corriente, cuando la armadura se mueve entre las dos posiciones (el tiempo necesario para esta traslación es de 11 ms).*

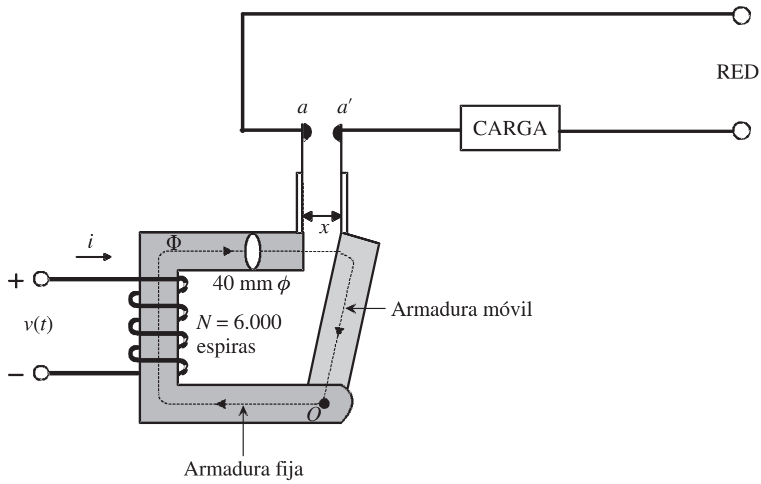


Figura 1.44. Relé electromagnético.

Solución

a) La fuerza producida a corriente constante será:

$$f = +\left[\frac{\partial W'_m}{\partial x}\right]_{i=cte} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\mathcal{R}\,\Phi^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}}\right)$$

y como quiera que:

$$\mathcal{F} = N i \quad ; \quad \mathcal{R} = \frac{x}{\mu_0 S}$$

se tendrá:

$$f = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{1}{2}N^2 i^2 \frac{\mu_0 S}{x}\right) = -\frac{1}{2}N^2 i^2 \frac{\mu_0 S}{x^2}$$

cuando $x = 3$ mm, y teniendo en cuenta que

$$S = \frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{\pi\, 40^2}{4} = 1.256 \text{ mm}^2 \quad ; \quad Ni = 6.000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 120 \text{ A.v}$$

se obtiene:

$$f = \frac{1}{2}\, 120^2 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.256 \cdot 10^{-6}}{(3 \cdot 10^{-3})^2} = 1{,}263 \text{ newton}$$

Como quiera que el coeficiente de autoinducción de la bobina vale:

$$L = N\frac{\Phi}{i} = N\frac{\mathcal{F}/\mathcal{R}}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = N^2\frac{\mu_0 S}{x}$$

se obtiene:

$$L = 6.000^2 \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.256 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-3}} = 18{,}94 \text{ henrios}$$

b) Aplicando los mismos conceptos que en el apartado anterior se obtiene:

$$L = 15{,}783 \text{ H} \quad ; \quad f = 0{,}877 \text{ newton}$$

c) La tensión aplicada a la bobina será:

$$v = Ri + N\frac{d\Phi}{dt} = Ri + \frac{d}{dt}(Li) = Ri + L\frac{di}{dt} + i\frac{dL}{dt}$$

Como quiera que no hay variación de la corriente, se tendrá:

$$v = Ri + i\frac{\Delta L}{\Delta t} = 1.000 \cdot 20 \cdot 10^{-3} + 20 \cdot 10^{-3}\frac{18{,}94 - 15{,}783}{11 \cdot 10^{-3}} = 25{,}74 \text{ V}$$

Ejemplo de aplicación 1.10: Contactor electromagnético

En la Figura 1.45 se muestra el circuito magnético de un dispositivo electromecánico denominado ***contactor****. El sistema consiste en un núcleo ferromagnético en forma de E, cuya sección central lleva el devanado de excitación, y tiene doble superficie que las secciones laterales. Se tiene una pestaña P que limita el espesor del entrehierro a un valor adecuado. Existen unos contactos m y n que se cierran al aplicar a la bobina una excitación de c.a. dando alimentación a una carga externa. Considerando las dimensiones indicadas en la Figura 1.45, que el entrehierro es de 0,5 cm y que se aplica a la bobina una tensión del tipo* $v = \sqrt{2}\,220 \cos \omega t$ *con una frecuencia de 50 Hz, calcular,*

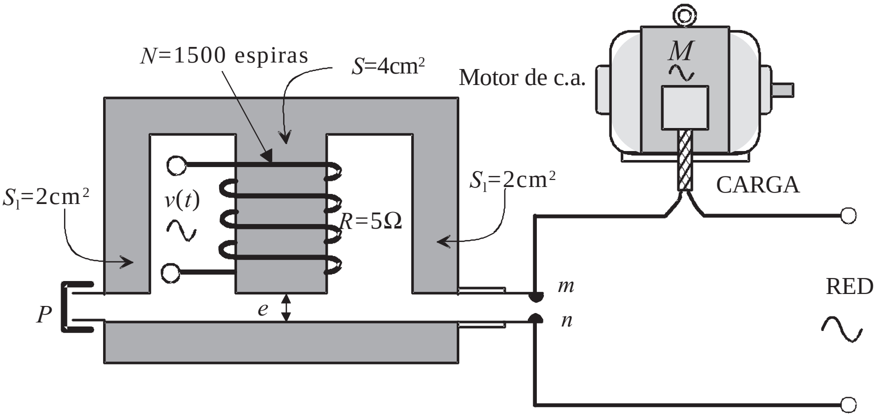


Figura 1.45. Contactor electromagnético.

en el supuesto de que se desprecie la reluctancia del hierro y que la resistencia eléctrica de la bobina es de 5 Ω: a) Coeficiente de autoinducción de la bobina. b) Corriente instantánea que circula por la bobina. c) Expresión instantánea del flujo y de la inducción en el núcleo central. d) Expresión de la fuerza instantánea ejercida sobre la armadura móvil. e) Comprobar que el valor del flujo obtenido en el apartado. c) partiendo del estudio magnético del sistema no coincide con el obtenido aplicando la expresión (1.80), ¿a qué se debe esta diferencia?

Solución

a) El circuito equivalente eléctrico es el indicado en la Figura 1.46. Las reluctancias de los entrehierros valen:

$$\mathcal{R} = \frac{e}{\mu_0 S} \quad ; \quad \mathcal{R}_1 = \frac{e}{\mu_0 S_1} = \frac{2e}{\mu_0 S}$$

ya que $S_1 = S/2$.

El flujo en la columna central, teniendo en cuenta el circuito de la Figura 1.46*b*, será:

$$\Phi = \frac{Ni}{\mathcal{R} + \mathcal{R}_1/2} = \frac{Ni}{2e}\mu_0 S$$

resultando un valor para el coeficiente de autoinducción de la bobina, dado por:

$$L = N\frac{\Phi}{i} = N^2\frac{\mu_0 S}{e} = 1.500^2\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2}} = 0{,}113 \text{ H}$$

b) Para obtener el valor de la corriente, es preciso calcular antes la reactancia e impedancia del circuito eléctrico. La reactancia será:

$$X_L = L\omega = 0{,}113 \cdot 2\pi \cdot 50 = 35{,}53\ \Omega$$

y como la resistencia de la bobina es igual a 5 Ω, la impedancia compleja valdrá:

$$\mathbf{Z} = R + jX_L = 5 + j\,35{,}53 = 35{,}88 \angle 81{,}99°$$

La corriente que circula por la bobina será:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{220 \angle 0°}{35{,}88 \angle 81{,}99°} = 6{,}13 \angle -81{,}99°$$

donde se ha tomado como referencia la tensión aplicada.

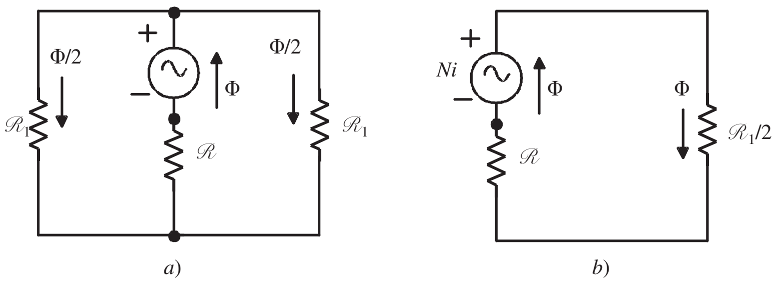


Figura 1.46.

La expresión instantánea de la corriente será, en consecuencia:

$$i = \sqrt{2} \cdot 6{,}13 \cos(\omega t - 81{,}99°)$$

c) El flujo en la sección central vale, según lo calculado en el apartado *a*):

$$\Phi = \frac{\mu_0 SNi}{2e} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 1.500 \cdot 6{,}13}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 4{,}62 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

que corresponde a un valor instantáneo:

$$\Phi = \sqrt{2} \cdot 4{,}62 \cdot 10^{-4} \cos(\omega t - 81{,}99°) = 6{,}53 \cdot 10^{-4} \cos(\omega t - 81{,}99°)$$

lo que indica una densidad de flujo en la columna central:

$$B = \frac{\Phi}{S} = 1{,}64 \cos(\omega t - 81{,}99°) \text{ Teslas}$$

En las columnas laterales la densidad de flujo es la misma, pues existe un flujo mitad con sección mitad que en la columna central.

d) La fuerza en cada entrehierro será de la forma:

$$f = \frac{1}{2}\frac{B^2 S}{\mu_0}$$

que al aplicar a nuestro sistema da:

$$f_T = \frac{1}{2}\frac{B^2 S}{\mu_0} + 2\left(\frac{1}{2}\frac{B^2 S_1}{\mu_0}\right)$$

ya que existen dos secciones laterales. Pero como quiera que $S_1 = S/2$, resulta una fuerza total:

$$f_T = \frac{B^2 S}{\mu_0} = \frac{[1{,}64 \cos(\omega t - 81{,}99°)]^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}}$$

cuyo valor es:

$$f_T = 856{,}64 \cos^2(\omega t - 81{,}99°)$$

e) El valor del flujo instantáneo, de acuerdo con el apartado *c*), era:

$$\Phi = 6{,}53 \cdot 10^{-4} \cos(\omega t - 81{,}99°)$$

que corresponde a un valor máximo:

$$\Phi_m = 6{,}53 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

Si se aplica directamente (1.80) se obtiene:

$$V = 4{,}44\, f N \Phi_m$$

siendo V la tensión aplicada eficaz, y de aquí se deduce el valor máximo del flujo:

$$\Phi_m = \frac{220}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 1.500} = 6{,}60 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

que no coincide con el valor anterior. Esto se debe a que la expresión (1.80) es aproximada y que se suponía que la resistencia del devanado era despreciable. La expresión correcta es la (1.75), que volvemos a escribir:

$$v = Ri + N\frac{d\Phi}{dt}$$

o en forma compleja (llamando **E** al valor complejo de $N\, d\Phi/dt$), queda:

$$\mathbf{E} = \mathbf{V} - R\mathbf{I} = 220 \angle 0° - 5 \cdot 6{,}13 \angle -81{,}99° = 217{,}85 \angle +8{,}01°$$

o en forma instantánea:

$$\sqrt{2} \cdot 217{,}85 \cos(\omega t + 8{,}01°) = N\frac{d\Phi}{dt}$$

de donde se deduce, integrando:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{2} \cdot 217{,}85 \operatorname{sen}(\omega t + 8{,}01°)}{\omega N} = \frac{\sqrt{2} \cdot 217{,}85}{\omega N} \cos(\omega t - 81{,}99°)$$

y teniendo en cuenta que $\omega = 2\pi f = 314$ rad/s y $N = 1.500$ espiras, resulta:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{2} \cdot 217{,}85}{314 \cdot 1.500} = 6{,}53 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

que coincide exactamente con el valor de flujo obtenido en el apartado *c*).

1.9. CONVERSIÓN DE ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS CON MOVIMIENTO DE ROTACIÓN. MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS

En el epígrafe anterior se ha analizado la conversión de energía en sistemas magnéticos excitados por una sola fuente y que disponen de una armadura móvil dotada de movimiento de traslación, lo que ha permitido explicar el funcionamiento de los electroimanes.

En general, las máquinas eléctricas son dispositivos electromagnéticos dotados de movimiento de rotación. Para analizar la conversión de energía en estos sistemas vamos a considerar las dos situaciones que frecuentemente se presentan en la práctica: *a*) que el sistema magnético disponga de una sola fuente de alimentación, *b*) que el sistema magnético disponga de varias fuentes de alimentación, normalmente dos.

1.9.1. Sistemas magnéticos de rotación alimentados con una sola fuente. Motores de reluctancia

Considérese el sistema mostrado en la Figura 1.47, que es la versión rotativa del sistema de traslación mostrado en la Figura 1.36. La parte fija de este convertidor se denomina estátor y la parte móvil recibe el nombre de rotor.

Sobre el estátor está arrollada una bobina de N espiras conectada a una red de $v(t)$ voltios. En la Figura 1.47 se muestran los respectivos ejes magnéticos (ejes de simetría) del estátor y del rotor, que forman un ángulo θ entre sí. De un modo análogo al estudiado en el epígrafe anterior aparecerán fuerzas en el sistema móvil que tenderán a producir un movimiento de rotación. Si se considera que el giro se produce a flujo constante, la ecuación (1.93) representará el principio de conservación de la energía aplicado al sistema:

$$dW_{mec} = -dW_m \tag{1.113}$$

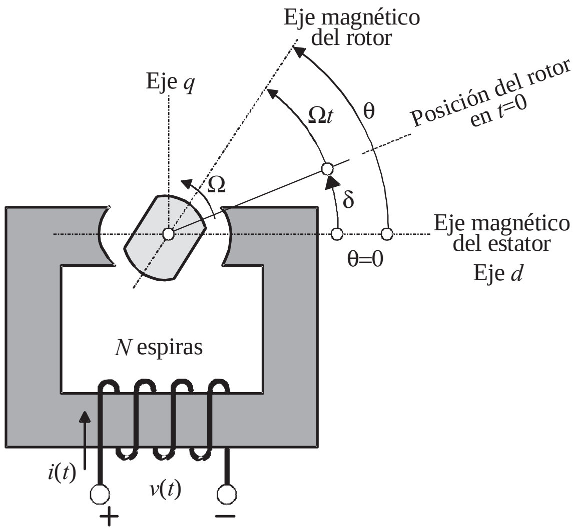


Figura 1.47. Motor de reluctancia variable.

Ahora bien, si se denomina T al par desarrollado y $d\theta$ al ángulo girado por el rotor, el primer miembro de la ecuación anterior será igual a:

$$dW_{mec} = T\, d\theta \tag{1.114}$$

de donde se deduce el valor del par:

$$T = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial \theta}\right]_{\Phi=cte} \tag{1.115}$$

que es una ecuación análoga a (1.94) aplicada a sistemas de rotación. Si el sistema se considera lineal, lo que equivale a suponer que la única reluctancia existente es la del entrehierro, entonces se cumplirá:

$$W_m = \frac{1}{2}\mathscr{R}\,\Phi^2 \tag{1.116}$$

valor que llevado a (1.115) nos da:

$$T = -\frac{1}{2}\Phi^2\frac{d\mathscr{R}}{d\theta} \tag{1.117}$$

lo que indica que el par actúa en el sentido de reducir la reluctancia entre el estátor y el rotor, que en términos prácticos ***significa que el par tiende a alinear el eje magnético del rotor con el del estátor***. De una forma similar a la analizada en los movimientos de traslación, si el movimiento se produce a corriente constante (f.m.m. constante), las ecuaciones (1.104) y (1.105) se transforman, respectivamente, en:

$$T = \frac{1}{2}\mathscr{F}^2\frac{d\mathscr{P}}{d\theta} \quad ; \quad T = \frac{1}{2}i^2\frac{dL}{d\theta} \tag{1.118}$$

en las que $\mathscr{P}$ y L representan, respectivamente, la permeancia del circuito magnético y la inductancia de la bobina.

Es fácil demostrar, observando la Figura 1.47, que tanto la reluctancia como la permeancia y la inductancia es función doble del ángulo θ que forman el estátor con el rotor. Desde el punto de vista de la teoría de circuitos resulta más útil trabajar con parámetros de inductancia que con valores de reluctancias o permeancias, por lo que será más práctico emplear la última expresión del par (1.118). Por consiguiente, vamos a demostrar únicamente la evolución de la inductancia L con el ángulo θ para poder determinar el sentido del par que se ejerce sobre el rotor.

De acuerdo con la definición de inductancia (1.56) y (1.58), su valor será máximo cuando el rotor esté alineado con el eje del estátor (denominado eje directo), ya que corresponde a una posición de máximo flujo en el entrehierro o mínima reluctancia del mismo, y denominando L_d a este valor se tendrá:

$$L(\theta = 0) = L(\theta = \pi) = L_d \tag{1.119}$$

Análogamente, la inductancia será mínima cuando el rotor forme 90° (eje cuadratura) con el eje del estátor. Denominando L_q a este valor se tendrá:

$$L(\theta = \pi/2) = L(\theta = 3\pi/2) = L_q \tag{1.120}$$

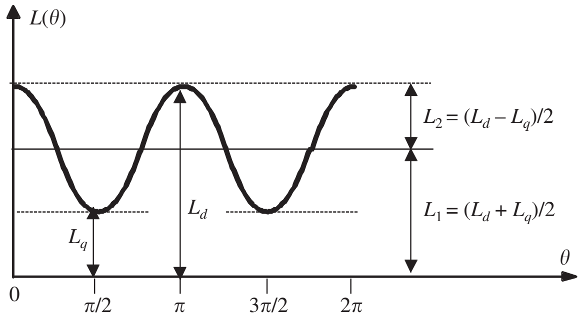


Figura 1.48. Variación de la inductancia con la posición del rotor.

En la Figura 1.48 se muestra la variación de L con θ, que se considera que evoluciona entre L_d y L_q siguiendo una ley sinusoidal:

$$L(\theta) = L_1 + L_2 \cos 2\theta \tag{1.121}$$

en $\theta = 0$ se cumplirá:

$$L(\theta = 0) = L_1 + L_2 = L_d \tag{1.122}$$

y en $\theta = \pi/2$:

$$L(\theta = \pi/2) = L_1 - L_2 = L_q \tag{1.123}$$

lo que permite identificar a L_1 y L_2 en función de las inductancias L_d y L_q como:

$$L_1 = \frac{L_d + L_q}{2} \quad ; \quad L_2 = \frac{L_d - L_q}{2} \tag{1.124}$$

y llevando la expresión (1.121) a la ecuación del par resultará:

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{d}{d\theta} (L_1 + L_2 \cos 2\theta) \tag{1.125}$$

es decir:

$$T = -i^2 L_2 \operatorname{sen} 2\theta = -i^2 \frac{L_d - L_q}{2} \operatorname{sen} 2\theta \tag{1.126}$$

Es evidente de la expresión anterior que si $L_d = L_q$ no se desarrolla ningún par. Esta situación se produce cuando el rotor es cilíndrico y por consiguiente el entrehierro es uniforme. Cuando el rotor es asimétrico, como es el caso de la Figura 1.47, existe un par expresado por (1.126). Si se considera que la corriente de alimentación es constante (tipo c.c.) y se supone que el rotor se desplaza de la posición horizontal un ángulo θ en dirección contraria a las agujas del reloj (posición mostrada en la Fig. 1.47), el par (1.126) es un par restaurador orientado en el sentido de las agujas del reloj. Si en el proceso de regresar el rotor a la posición horizontal, debido a su momento, sobrepasa esta posición, el campo magnético ejerce entonces un par en sentido contrario a las agujas del reloj. En otras palabras, si la corriente es constante, el par que se ejerce sobre el rotor no es unidireccional y está orientado en sentido contrario al que el rotor tiende a moverse. Es por ello que el rotor permanecerá estacionario en posición horizontal (mínima reluctancia); cualquier modificación de la posición del rotor producirá una oscilación sobre el eje horizontal hasta que se pare finalmente en esta posición.

Supóngase ahora que el rotor se mueve (accionado en principio por un motor exterior) a una velocidad Ω; entonces la posición del rotor, de acuerdo con el esquema de la Figura 1.47, será:

$$\theta = \Omega t + \delta \tag{1.127}$$

donde $\theta = +\delta$ representa la posición del rotor en $t = 0$. Si en esta situación se alimenta el estátor con una corriente sinusoidal:

$$i(t) = I_m \cos \omega t \tag{1.128}$$

entonces, de acuerdo con (1.126), se producirá un par:

$$T = -i^2 L_2 \operatorname{sen} 2\theta = -I_m^2 \cos^2 \omega t\, L_2 \operatorname{sen} 2(\Omega t + \delta) \tag{1.129}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \tag{1.130}$$

por lo que el par se puede escribir:

$$T = -\frac{1}{2} I_m^2 L_2 \operatorname{sen} 2(\Omega t + \delta)(1 + \cos 2\omega t) \tag{1.131}$$

y sabiendo de trigonometría que:

$$\operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(a - b)] \tag{1.132}$$

resulta finalmente:

$$T = -\frac{1}{2} I_m^2 L_2 \left\{\operatorname{sen} 2(\Omega t + \delta) + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2[(\Omega + \omega)t + \delta] + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2[(\Omega - \omega)t + \delta]\right\} \tag{1.133}$$

se observa en la expresión anterior que el par medio es cero para velocidades $\Omega \neq \omega$. Sin embargo si el rotor gira a la velocidad ω, ($\Omega = \omega$), denominada **velocidad de sincronismo**, el par medio es:

$$T_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T\, d(\omega t) = -\frac{1}{4} I_m^2 L_2 \operatorname{sen} 2\delta \tag{1.134}$$

lo que demuestra que si se verifica:

$$|\Omega| = |\omega| \quad \Rightarrow \quad \Omega = \pm\omega \tag{1.135}$$

se producirá un par medio de rotación, para los dos sentidos de giro que cumplan (1.135). Esta velocidad de rotación se denomina *velocidad de sincronismo,* lo que significa que la velocidad mecánica de rotación Ω en rad/s coincide con la pulsación o frecuencia angular ω de la alimentación. Éste es el principio en que se basan los motores de reluctancia. El motor tiende a mantener su sentido de giro aun después de que se desconecte el motor primario.

En la Figura 1.49 se muestra la representación del par medio (1.134) en función del ángulo δ, que se denomina ***ángulo de par***. Para $\delta < 0$ el par medio es positivo, lo que significa, de acuerdo con la Figura 1.47, que actúa en el sentido de rotación de la máquina, que

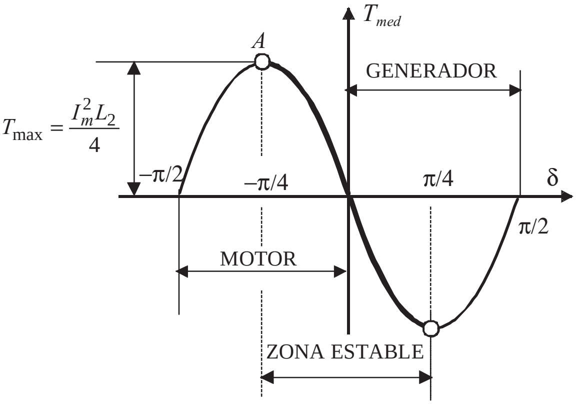


Figura 1.49. Variación del par electromagnético desarrollado por un motor de reluctancia.

trabaja entonces como **motor**. Si se considera el motor ideal (sin pérdidas) y que no existe par resistente, entonces la máquina girará inicialmente con $\delta = 0$, y al arrastrar en este caso una carga mecánica, se necesitará que la máquina genere un par motor. Como en la situación anterior el par motor era cero, se producirá un régimen dinámico en el que se reducirá la velocidad, y como resultado de ello el ángulo δ comenzará a tomar valores negativos y desarrollará un par motor definido por (1.134) que equilibrará al par resistente y la máquina volverá a girar a la velocidad de sincronismo.

Conforme el par resistente aumente, el ángulo δ se hará cada vez más negativo; esta situación puede llegar hasta que el valor de δ sea igual a $-\pi/4$, ya que entonces el par desarrollado alcanza su valor máximo; si el par resistente es superior a este valor, la máquina se saldrá del sincronismo y se acabará parando. De este modo la *zona estable* como motor está comprendida entre 0 y $-\pi/4$, ya que en esta zona a medida que aumenta el par resistente también aumenta el par motor debido a que δ toma valores (absolutos) mayores; sin embargo, si se sobrepasa el punto A, un aumento del par resistente no se ve compensado por un aumento del par motor.

Si $\delta > 0$, el par desarrollado es negativo, lo que significa, de acuerdo con la Figura 1.47, que actúa en sentido contrario al giro de la máquina, y trabajando entonces como **generador**, el dispositivo mecánico conectado al eje debe suministrar par y potencia al rotor. Hay entonces un flujo de potencia eléctrica de la máquina a la red. De un modo análogo al estudiado en el comportamiento como motor, la zona estable como generador está comprendida entre 0 y $+\pi/4$. La aplicación más conocida de los motores de reluctancia está en los relojes eléctricos, y como quiera que no producen par de arranque, se inicia el giro dando un impulso mecánico al rotor por encima de la velocidad de sincronismo, de tal forma que se alcanza un estado estable al pasar por la velocidad de sincronismo, manteniendo esta velocidad.

1.9.2. Sistemas magnéticos de rotación alimentados con dos fuentes

Estos sistemas son los que normalmente se encuentran en las máquinas eléctricas convencionales. Considérese el esquema de la Figura 1.50, que muestra un sistema magnético con dos alimentaciones tanto en el estátor como en el rotor.

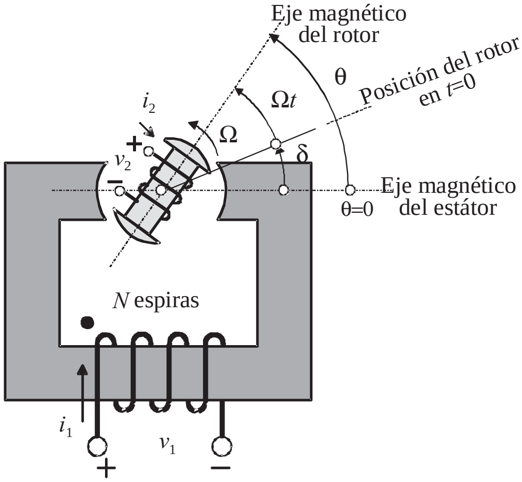


Figura 1.50. Sistema electromagnético doblemente alimentado.

Si se considera el sistema magnético lineal y recordando la teoría de los circuitos acoplados, los flujos magnéticos **totales** ψ_1 y ψ_2 que atraviesan los devanados 1 y 2 estarán expresados por las siguientes ecuaciones:

$$\psi_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 = N_1 \Phi_1 \quad ; \quad \psi_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 = N_2 \Phi_2 \tag{1.136a}$$

que en forma matricial se escribe:

$$\begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\psi\} = [L]\{i\} \tag{1.136b}$$

donde $\{\psi\}$ es el vector de flujos, $[L]$ es la matriz de inductancias de los devanados en la que L_{11} representa el coeficiente de autoinducción del devanado 1, L_{22} es el correspondiente del devanado 2 y $L_{12} = L_{21}$ es el coeficiente de inducción mutua entre ambos devanados, y finalmente $\{i\}$ es el vector de las corrientes que circulan por los arrollamientos.

Los flujos magnéticos Φ_1 y Φ_2 son los flujos que atraviesan *cada una de las espiras* de los devanados del estátor y del rotor, respectivamente. De acuerdo con esta nomenclatura, la energía magnética total almacenada (que es igual a la coenergía por ser el sistema lineal) se obtendrá aplicando (1.54) a cada uno de los arrollamientos, lo que da lugar a:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2}\mathcal{F}_1\Phi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{F}_2\Phi_2 = \frac{1}{2} i_1\psi_1 + \frac{1}{2} i_2\psi_2 \tag{1.137}$$

ya que:

$$\mathcal{F}_1 = N_1 i_1 \quad ; \quad \mathcal{F}_2 = N_2 i_2 \tag{1.138}$$

y teniendo en cuenta (1.136), la ecuación (1.137) se transforma en:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 \tag{1.139}$$

y de un modo análogo a (1.102) puede demostrarse que aparece un par en el rotor de valor:

$$T = +\left[\frac{\partial W'_m}{\partial \theta}\right]_{i=cte} \tag{1.140}$$

y al sustituir (1.139) en (1.140) resulta:

$$T = \frac{1}{2}\, i_1^2\, \frac{dL_{11}}{d\theta} + \frac{1}{2}\, i_2^2\, \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_1 i_2\, \frac{dL_{12}}{d\theta} \tag{1.141a}$$

o en notación matricial:

$$T = \frac{1}{2}\,[i_1 \quad i_2]\,\frac{\partial}{\partial \theta}\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; T = \frac{1}{2}\,\{i\}^t\,\frac{\partial}{\partial \theta}\,\{[L]\{i\}\} \tag{1.141b}$$

donde $\{i\}^t$ es el vector traspuesto de $\{i\}$. Como era de esperar, las ecuaciones anteriores (1.141*a*) o (1.141*b*) son una generalización del resultado (1.118) que se obtuvo para sistemas alimentados con una sola fuente. Los dos primeros sumandos de (1.141*a*) representan pares de reluctancia debidas a las inductancias propias de cada devanado; el tercer sumando representa el par que se obtiene cuando varía la inductancia mutua entre ambos devanados. En general, para una disposición magnética como la que se indica en la Figura 1.50, y de acuerdo con lo desarrollado en el epígrage 1.9.2, las expresiones de L_{11} y L_{22} serán de la forma:

$$L_{11} = L_a + L_b \cos 2\theta \quad ; \quad L_{22} = L_c + L_d \cos 2\theta \tag{1.142}$$

mientras que el coeficiente de inducción mutua dependerá del ángulo que forman entre sí los ejes magnéticos del estátor y del rotor:

$$L_{12} = L_m \cos\theta \tag{1.143}$$

lo que era lógico suponer teniendo en cuenta la propia definición del coeficiente de inducción mutua, como flujo que llega a un devanado producido por el otro. Cuando los ejes están alineados el flujo será máximo, es decir, todo el flujo que produce un devanado atravesará el otro; cuando los ejes formen 90° no habrá flujo que saliendo de un devanado atraviese el otro.

En general, para una posición arbitraria deberá aplicarse la ecuación (1.143), que es válida sean cuales sean las disposiciones magnéticas del estátor y del rotor. No ocurre así con las expresiones (1.142), ya que la evolución de las inductancias propias o coeficientes de autoinducción en función de θ dependerá de las simetrías magnéticas de las estructuras del estátor y rotor. Por ejemplo, si ambas son cilíndricas, L_{11} y L_{22} serán constantes y no dependerán de θ porque al moverse el rotor ninguno de los devanados apreciará ningún cambio de reluctancia. Si el estátor tiene salientes magnéticos y el rotor es cilíndrico, entonces L_{11} será constante y L_{22} vendrá expresado por la segunda ecuación (1.142), y a la inversa, si el estátor es cilíndrico y el rotor tiene polos salientes, entonces L_{22} será constante y L_{11} tendrá la forma indicada en (1.142).

En el caso de que se desee relacionar las tensiones aplicadas con las corrientes en cada devanado deberá aplicarse el 2.º lema de Kirchhoff a cada arrollamiento. Si se denomina R_1 y R_2 a las resistencias respectivas de los devanados, teniendo en cuenta (1.136) resultará:

$$v_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} = R_1 i_1 + \frac{d}{dt}\,(L_{11} i_1 + L_{12} i_2)$$

$$v_2 = R_2 i_2 + \frac{d\psi_2}{dt} = R_2 i_2 + \frac{d}{dt}\,(L_{21} i_1 + L_{22} i_2) \tag{1.144a}$$

o en notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \{v\} = [R]\{i\} + \frac{d}{dt}[L]\{i\} \quad (1.144b)$$

En el caso genérico de que existan más de dos devanados (excitación múltiple), el estudio correspondiente es análogo al aquí expuesto, teniendo en cuenta que entonces la ecuación (1.139) de la energía almacenada será de la forma:

$$W_m = W'_m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij} i_i i_j \quad (1.145a)$$

o en notación matricial:

$$W_m = W'_m = \frac{1}{2} \{i\}^t [L]\{i\} \quad (1.145b)$$

Las notaciones matriciales son expresiones más convenientes cuando se desea realizar un estudio generalizado de las máquinas eléctricas.

Ejemplo de aplicación 1.11: Motores monofásicos síncronos y asíncronos

Considérese la máquina con simetría cilíndrica mostrada en la Figura 1.51. Los valores de las inductancias de los devanados son de la forma: $L_{11} = a$ (constante); $L_{22} = b$ (constante); $L_{12} = L_m \cos\theta$, en donde θ está medido a partir de la posición de referencia en sentido contrario a las agujas del reloj. a) Si el rotor se alimenta con una corriente continua $i_1 = I_1$ y se aplica al estátor una c.a. de la forma $i_2 = I_{m2} \cos \omega t$, determinar la expresión del par instantáneo y medio desarrollado si el rotor gira a una velocidad angular $\Omega = \omega$. ***Este montaje describe el comportamiento de un motor síncrono monofásico de polos lisos o rotor cilíndrico.*** *b) Si se aplican corrientes alternas a ambos devanados de la forma:*

$$i_1 = I_{m1} \operatorname{sen} \omega_1 t \quad ; \quad i_2 = I_{m2} \operatorname{sen} \omega_2 t$$

y el rotor gira a una velocidad angular Ω rad/s, ¿cuál debe ser la relación entre ω_1, ω_2 y Ω para que se produzca un par neto en el rotor? ¿Cuál será la expresión del par medio en esas condiciones? ***Este montaje describe el comportamiento de un motor asíncrono monofásico.***

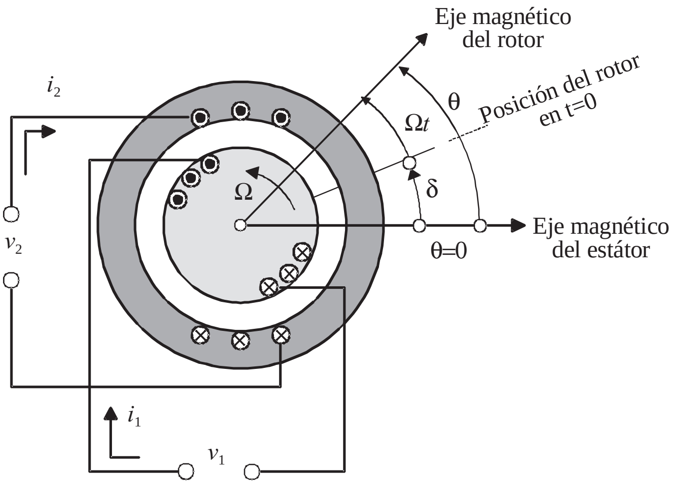


Figura 1.51. Motor asíncrono monofásico. Motor síncrono con rotor de polos lisos (cilíndrico).

Solución

a) De acuerdo con (1.141), y teniendo en cuenta que L_{11} y L_{22} son constantes, se tendrá un par:

$$T = i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} = I_1 I_{m2} \cos \omega t \, (-L_m \operatorname{sen} \theta)$$

como quiera además que $\theta = \Omega t + \delta$, y al ser $\Omega = \omega$ resultará:

$$T = -L_m I_1 I_{m2} \cos \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \delta)$$

que haciendo una transformación trigonométrica se convierte en un par instantáneo:

$$T = -\frac{L_m I_1 I_{m2}}{2} [\operatorname{sen} (2\omega t + \delta) + \operatorname{sen} \delta]$$

Ahora bien, si se tiene en cuenta que el valor medio del término dependiente del tiempo es cero, el valor medio del par resultante será:

$$T_{med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d(\omega t) = -\frac{L_m I_1 I_{m2}}{2} \operatorname{sen} \delta$$

La expresión anterior indica: *1) existe un par medio distinto de cero que es proporcional a sen* δ*, 2) la máquina no puede arrancar por sí misma pero puede desarrollar un par neto si gira a la velocidad* $\Omega = \omega$ *(velocidad de sincronismo)* para lo cual se requiere la acción de un motor primario externo que impulse el rotor hasta la velocidad de sincronismo; en ese momento, aunque se desconecte el motor externo, la máquina podrá seguir girando por sí misma.

b) Si se aplican corrientes alternas a ambos devanados, al aplicar (1.141) se obtendrá un par instantáneo:

$$T = (I_{m1} \operatorname{sen} \omega_1 t)(I_{m2} \operatorname{sen} \omega_2 t)(-L_m \operatorname{sen} \theta)$$

y teniendo en cuenta que $\theta = \Omega t + \delta$, después de una transformación trigonométrica resulta:

$$T = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} \operatorname{sen} \omega_1 t \, [\cos (\omega_2 t - \Omega t - \delta) - \cos (\omega_2 t + \Omega t + \delta)]$$

es decir:

$$T = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} [\operatorname{sen} \omega_1 t \cos (\omega_2 t - \Omega t - \delta) - \operatorname{sen} \omega_1 t \cos (\omega_2 t + \Omega t + \delta)]$$

y aplicando a cada sumando contenido entre los corchetes la transformación trigonométrica (1.132) se obtiene:

$$T = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{4} \{\operatorname{sen} [(\omega_1 + \omega_2 - \Omega)t - \delta] + \operatorname{sen} [(\omega_1 - \omega_2 + \Omega)t + \delta]\} +$$

$$+ \frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{4} \{\operatorname{sen} [(\omega_1 + \omega_2 + \Omega)t + \delta] + \operatorname{sen} [(\omega_1 - \omega_2 - \Omega)t - \delta]\}$$

si se elige la velocidad del rotor de tal modo que se cumpla:

$$|\Omega| = |\omega_1 - \omega_2| \quad \Rightarrow \quad \Omega = \pm(\omega_1 - \omega_2) \qquad (a)$$

se obtiene tanto para el signo positivo de Ω como para el signo negativo un par medio resultante distinto de cero de valor:

$$T_{med} = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{4} \operatorname{sen} \delta \qquad (b)$$

La condición (*a*) indica que la velocidad de rotación está relacionada directamente con las frecuencias de las corrientes que circulan por los devanados del estátor y del rotor. Como se señalará más adelante en el Capítulo 2, el cociente entre las frecuencias del rotor y del estátor se denomina deslizamiento y se representa por la letra *s*, es decir:

$$s = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{2\pi f_2}{2\pi f_1} = \frac{f_2}{f_1}$$

de donde se deduce que la expresión *a*) se puede escribir así:

$$\Omega = \pm(\omega_1 - \omega_2) = \pm\omega_1(1 - s) \qquad (c)$$

la descripción anterior explica el comportamiento de un motor asíncrono o de inducción monofásico que produce un par medio resultante proporcional a sen δ. La máquina no puede arrancar por sí misma y tiene que ser impulsada por un medio mecánico exterior en el sentido de rotación que se desee.

Realmente, por el devanado del rotor no se introduce ninguna corriente externa, la corriente i_2 se obtiene por inducción del campo magnético del estátor estando el bobinado del rotor en cortocircuito. El deslizamiento de estos motores suele estar comprendido entre el 10 y el 20 por 100, de ahí que según (*c*) haya que impulsar el rotor hasta velocidades del orden de 80 al 90 por 100 de ω_1 para obtener un par neto en el eje. En el Capítulo 4 se explicará con detalle el funcionamiento de este tipo de motores.

Ejemplo de aplicación 1.12: Motor monofásico síncrono y de reluctancia

En la Figura 1.52 se muestra una máquina eléctrica denominada de polos salientes (situados en el rotor):

$$L_{11} = a \text{ (constante)} \quad ; \quad L_{22} = L_a + L_b \cos 2\theta \quad ; \quad L_{12} = L_m \cos\theta$$

en donde θ está medido a partir de la posición de referencia en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Las resistencias de los devanados son despreciables: a) Si el rotor se alimenta con una corriente continua $i_1 = I_1$ y se aplica al estátor una c.a. de la forma $i_2 = I_{m2} \cos \omega t$, ¿cuál deberá ser la velocidad del rotor para que se obtenga un par neto en el eje del mismo? Determinar a continuación el par medio resultante. ***Este montaje describe el comportamiento de un motor síncrono monofásico de polos salientes.*** *b) Responder a la pregunta anterior si el devanado del rotor se deja abierto ($i_1 = 0$) y la corriente del estátor sigue siendo la misma.* ***Este montaje describe el comportamiento de un motor sincrono de reluctancia variable.***

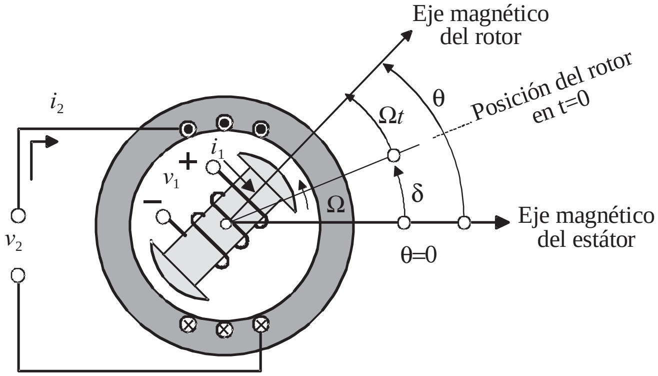


Figura 1.52. Motor síncrono de polos salientes. Motor de reluctancia.

Solución

a) De acuerdo con (1.141), la expresión del par desarrollado será igual a:

$$T = \frac{1}{2} i_2^2 (-2L_b \text{ sen } 2\theta) + i_1 i_2 (-L_m \text{ sen } \theta)$$

que al sustituir los valores de i_1, i_2 y θ nos da lugar a:

$$T = -I_{m2}^2 L_b \cos^2 \omega t \text{ sen } 2(\Omega t + \delta) - I_1 I_{m2} L_m \cos \omega t \text{ sen } (\Omega t + \delta)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

resulta:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b (1 + \cos 2\omega t) \text{ sen } 2(\Omega t + \delta) - I_1 I_{m2} L_m \cos \omega t \text{ sen } (\Omega t + \delta)$$

y al aplicar la transformación trigonométrica (1.132) se convierte en:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \left\{ \text{sen } 2(\Omega t + \delta) + \frac{1}{2} [\text{sen } 2(\omega t + \Omega t + \delta)] + \frac{1}{2} [\text{sen } 2(-\omega t + \Omega t + \delta)] \right\} -$$

$$- \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m \{\text{sen } (\omega t + \Omega t + \delta) + \text{sen } (-\omega t + \Omega t + \delta)\}$$

Cada término de la ecuación anterior es una función senoidal del tiempo, por lo que el valor medio del par será nulo. Para que se obtenga un par medio diferente de cero, el rotor deberá girar a una velocidad:

$$|\Omega| = |\omega| \quad \Rightarrow \quad \Omega = \pm\omega$$

ya que en esta situación se obtiene un par:

1. Para $\Omega = \omega$:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \left[\text{sen } 2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} \text{sen } 2(2\omega t + \delta) + \frac{1}{2} \text{sen } 2\delta \right] -$$

$$- \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m [\text{sen } (2\omega t + \delta) + \text{sen } \delta)]$$

2. Para $\Omega = -\omega$:

$$T = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \left[\text{sen } 2(-\omega t + \delta) + \frac{1}{2} \text{sen } 2\delta + \frac{1}{2} \text{sen } 2(-2\omega t + \delta) \right] -$$

$$- \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m [\text{sen } \delta + \text{sen } (-2\omega t + \delta)]$$

que en ambos casos da lugar a un par medio:

$$T_{med} = -\frac{I_{m2}^2}{2} L_b \text{ sen } 2\delta - \frac{I_1 I_{m2}}{2} L_m \text{ sen } \delta$$

La expresión anterior indica que el par medio se compone de dos términos: *el primero representa el par de reluctancia que se debe a la forma de polos salientes que tiene el rotor y que no depende de la corriente que circula por este devanado, el segundo representa el par de excitación que es función de la corriente rotórica.* La máquina no puede arrancar por sí misma pero desarrolla un par neto cuando gira a velocidad $\Omega = \pm\,\omega$.

b) En esta situación solamente se produce un par de reluctancia de valor medio:

$$T_m = -\frac{I_{m2}^2 L_b}{4} \text{ sen } 2\delta$$

siempre que el rotor gire a la velocidad de sincronismo $\Omega = \pm\,\omega$, como ya se ha demostrado en el apartado anterior.

Ejemplo de aplicación 1.13: Motor bifásico síncrono

Considérese la máquina con simetría cilíndrica mostrada en la Figura 1.53. El estátor tiene dos devanados desfasados 90° en el espacio (se dice entonces que están situados en cuadratura), que se alimentan por medio de dos corrientes alternas desfasadas en el tiempo 90°, es decir:

$$i_a = I_{m1} \cos \omega_1 t \quad ; \quad i_b = I_{m1} \text{ sen } \omega_1 t$$

El rotor lleva incorporado un devanado 2, siendo las inductancias de los devanados las siguientes:

$$L_{aa} = L_{bb} = L_1 \quad ; \quad L_{22} = L_2 \quad ; \quad L_{a2} = L_m \cos \theta \quad ; \quad L_{b2} = L_m \text{ sen } \theta \quad ; \quad L_{ab} = 0$$

a) *Si el rotor gira a una velocidad angular Ω y se alimenta con una c.c. de valor $i_2 = I_2$, ¿cuál deberá ser el valor de Ω para que se obtenga un par neto en el rotor? ¿Qué par medio desarrolla la máquina?* ***Este montaje describe el comportamiento de un motor síncrono bifásico de polos lisos.***

b) *Si el rotor gira a una velocidad angular Ω y se aplica al devanado del mismo una corriente alterna de valor $i_2 = I_{m2} \cos \omega_2 t$, ¿para qué velocidad del rotor se obtiene un par medio distinto de cero? ¿Cuál es el valor del par medio correspondiente? Las corrientes del estátor son las definidas previamente.*

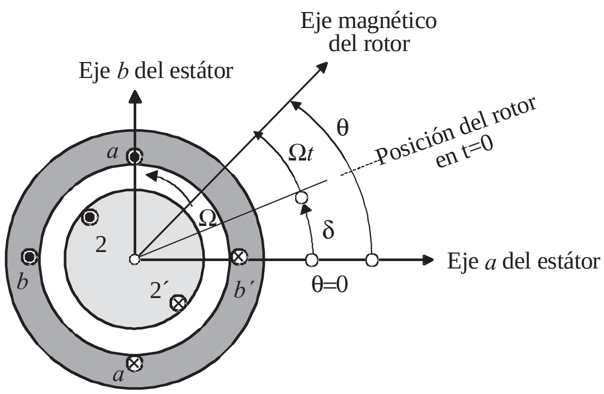


Figura 1.53. Motor síncrono bifásico de polos lisos.

Solución

a) El par responderá a la expresión genérica matricial (1.141*b*), teniendo en cuenta que existen tres devanados que interaccionan entre sí. Y así se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}\{i_a \quad i_b \quad i_2\} \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{a2} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{b2} \\ L_{2a} & L_{2b} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_2 \end{bmatrix}$$

que al desarrollar conduce a la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2} i_a^2 \frac{dL_{aa}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_b^2 \frac{dL_{bb}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta} + i_a i_b \frac{dL_{ab}}{d\theta} + i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

que teniendo en cuenta que existen inductancias que no dependen de θ, se obtiene:

$$T = i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

al sustituir los valores resulta un par instantáneo:

$$T = I_2 I_{m1} \cos \omega_1 t\,(-L_m \operatorname{sen} \theta) + I_2 I_{m1} \operatorname{sen} \omega_1 t\,(L_m \cos \theta)$$

es decir:

$$T = I_{m1} I_2 L_m (-\operatorname{sen} \theta \cos \omega_1 t + \cos \theta \operatorname{sen} \omega_1 t) = I_{m1} I_2 L_m \operatorname{sen} (\omega_1 t - \theta)$$

y como quiera que $\theta = \Omega t + \delta$, se convierte en:

$$T = I_{m1} I_2 L_m \operatorname{sen} (\omega_1 t - \Omega t - \delta) \qquad (a)$$

si el rotor gira a una velocidad $\Omega = \omega_1$, denominada velocidad de sincronismo, se obtiene un par instantáneo que no depende del tiempo:

$$T = -I_{m1} I_2 L_m \operatorname{sen} \delta \qquad (b)$$

Lo anterior explica *el funcionamiento de un motor síncrono de polos lisos*. La máquina no puede arrancar por sí misma, ya que cuando $\Omega = 0$ el par medio es nulo; sin embargo, se obtiene un par neto resultante si la máquina gira a la velocidad de sincronismo $\Omega = \omega_1$. Estos motores requieren un accionamiento o motor primario externo que impulse el rotor hasta la *velocidad de sincronismo*; alcanzada esta velocidad el rotor se enclava magnéticamente con el denominado campo giratorio del estátor de tal modo que aunque se desconecte el motor externo, la máquina podrá seguir girando por sí misma. Es importante que el lector se dé cuenta de que si $\Omega = -\omega_1$, el par medio resultante es, según la expresión (*a*), igual a cero. A diferencia con el motor síncrono monofásico (véase ejemplo de aplicación 1.11), que produce un par neto a velocidades $\Omega = \pm\omega_1$, *el motor bifásico (y en general polifásico) tiene un sentido de rotación definido*. Esto se debe, como se demostrará en el Capítulo 2, a que el devanado bifásico, trifásico, etc., produce un campo magnético giratorio que arrastra el rotor como si estuviera enclavado mecánicamente con él. El ángulo δ de la Figura 1.53 representa entonces la diferencia de fase espacial entre el eje del campo magnético giratorio que se produce en el estátor con el eje magnético del rotor. Para unas determinadas corrientes I_{m1} e I_2, la expresión (*b*) nos indica que el par motor producido es proporcional al sen δ. El par resistente se equilibra con el par motor para un determinado ángulo δ, y si en esta situación el par resistente aumenta se elevará el ángulo δ hasta un valor máximo de 90°; por encima de este valor, el par, según (*b*), vuelve a disminuir, y al no poder arrastrar la carga resistente el motor síncrono pierde su sincronismo, es decir, Ω deja de ser igual a ω_1, por lo que el valor del par medio se hace cero. En esta situación el par resistente del motor obligará a reducir la velocidad del rotor hasta que finalmente se pare.

b) El par resultante, de un modo análogo al calculado en el apartado anterior, será igual a:

$$T = i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta}$$

que al sustituir valores nos da:

$$T = I_{m1} I_{m2} L_m \cos \omega_2 t \operatorname{sen} (\omega_1 t - \theta)$$

y teniendo en cuenta que $\theta = \Omega t + \delta$, resulta:

$$T = I_{m1} I_{m2} L_m \cos \omega_2 t \operatorname{sen} (\omega_1 t - \Omega t - \delta)$$

que haciendo una transformación trigonométrica da lugar a:

$$T = \frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} \{\operatorname{sen} [(\omega_1 + \omega_2 - \Omega)t - \delta] + \operatorname{sen} [(\omega_1 - \omega_2 - \Omega)t - \delta]\}$$

si $\Omega = \omega_1 \pm \omega_2$, se obtiene un par medio de valor:

$$T_{med} = -\frac{I_{m1} I_{m2} L_m}{2} \operatorname{sen} \delta$$

Obsérvese también que a diferencia con el caso anterior, si $\Omega = \omega_1$, el par medio es cero. La velocidad a la que puede girar el motor depende de las frecuencias del rotor y el estátor y la máquina no puede arrancar por sí misma, ya que para $\Omega = 0$ el par medio es cero.

Ejemplo de aplicación 1.14: Motor asíncrono bifásico con rotor monofásico

Considérese la máquina con simetría cilíndrica mostrada en la Figura 1.54. Al igual que en el ejemplo anterior, el estátor tiene dos devanados desfasados 90° en el espacio que se alimentan con corrientes bifásicas:

$$i_a = I_{m1} \cos \omega_1 t \quad ; \quad i_b = I_{m1} \operatorname{sen} \omega_1 t$$

El rotor lleva incorporado un devanado 2 de resistencia R_2 ohmios, siendo las inductancias de los devanados las siguientes:

$$L_{aa} = L_{bb} = L_1 \quad ; \quad L_{22} = L_2 \quad ; \quad L_{a2} = L_m \cos \theta \quad ; \quad L_{b2} = L_m \operatorname{sen} \theta \quad ; \quad L_{ab} = 0$$

a) *Si el rotor gira a velocidad angular Ω, calcular la expresión de la f.e.m. inducida en el mismo en circuito abierto.*
b) *Si se cortocircuita el devanado del rotor, determinar la corriente que circulará por este devanado en régimen permanente.*
c) *Calcular en la situación del apartado anterior el par medio que se produce en el rotor y la potencia mecánica desarrollada por la máquina.*

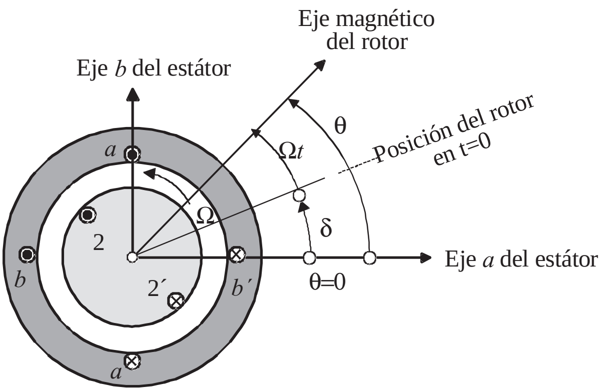


Figura 1.54. Motor asíncrono bifásico.

Solución

a) La f.e.m. inducida en el rotor será:

$$e_2 = -\frac{d\psi_2}{dt}$$

donde ψ_2 representa el flujo total concatenado por el devanado del rotor. De un modo análogo a (1.136), el flujo anterior será igual a:

$$\psi_2 = L_{a2}i_a + L_{b2}i_b + L_{22}i_2 = L_{a2}i_a + L_{b2}i_b$$

donde se ha tenido en cuenta la propiedad conmutativa de los coeficientes de inducción mutua y que $i_2 = 0$ al estar el rotor abierto. De este modo la f.e.m. inducida en el rotor será:

$$e_2 = -\left[\frac{d}{dt}(L_{a2}i_a) + \frac{d}{dt}(L_{b2}i_b)\right] = -\left[\frac{dL_{a2}}{dt}i_a + L_{a2}\frac{di_a}{dt} + \frac{dL_{b2}}{dt}i_b + L_{b2}\frac{di_b}{dt}\right] \qquad (a)$$

donde los valores de las derivadas, teniendo en cuenta que $\theta = \Omega t + \delta$, son:

$$\frac{dL_{a2}}{dt} = \frac{d}{dt}[L_m \cos(\Omega t + \delta)] = -\Omega L_m \operatorname{sen}(\Omega t + \delta) \quad ; \quad \frac{dL_{b2}}{dt} = \Omega L_m \cos(\Omega t + \delta)$$

$$\frac{di_a}{dt} = -I_{m1}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_1 t \quad ; \quad \frac{di_b}{dt} = I_{m2}\omega_1 \cos\omega_1 t$$

y al sustituir los valores anteriores en la ecuación *a*) y haciendo algunas transformaciones trigonométricas se obtiene:

$$e_2 = L_m I_{m1}(\omega_1 - \Omega)\operatorname{sen}[(\omega_1 - \Omega)t - \delta]$$

obsérvese en la expresión anterior que si el motor girase a la velocidad de sincronismo ($\Omega = \omega_1$) no se producirá f.e.m. en este devanado. La pulsación de la f.e.m. vale ω_2:

$$\omega_2 = \omega_1 - \Omega$$

si se denominan n_1 a las r.p.m. del rotor y f_1 y f_2 a las frecuencias del estátor y del rotor, respectivamente, la última ecuación se puede escribir así:

$$2\pi f_2 = 2\pi f_1 - 2\pi\frac{n}{60} \quad \Rightarrow \quad f_2 = f_1 - \frac{n}{60}$$

expresión que relaciona la frecuencia del rotor con la del estátor y la velocidad de giro. Al estudiar motores asíncronos (véase Capítulo 4) se acostumbra a definir el concepto de deslizamiento del motor *s* como cociente de las frecuencias estátor/rotor:

$$s = \frac{f_2}{f_1} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

de este modo se puede escribir:

$$\omega_2 = s\omega_1 = \omega_1 - \Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \omega_1(1 - s)$$

que al sustituir en la expresión de la f.e.m. e_2 da lugar a:

$$e_2 = L_m I_{m1} s\omega_1 \operatorname{sen}(s\omega_1 t - \delta)$$

que se puede escribir de la forma

$$e_2 = sE_{m2}\operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta)$$

donde se ha llamado E_{m2} y ω_2 a:

$$E_{m2} = L_m \omega_1 I_{m1} \quad ; \quad \omega_2 = s\omega_1$$

E_{m2} representa la f.e.m. máxima inducida en el rotor cuando $s = 1$, es decir, cuando $\Omega = 0$ (rotor parado).

b) Al cortocircuitar el rotor se producirá una corriente de circulación por el mismo que se obtendrá aplicando el 2.º lema de Kirchhoff a este circuito, resultando la siguiente ecuación diferencial:

$$e_2 = sE_{m2} \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta) = L_2 \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 \qquad (b)$$

para determinar la corriente instantánea i_2 de régimen permanente, que es la solución particular de la ecuación diferencial anterior, se resolverá la ecuación fasorial (en valores máximos y tomando como referencia la función seno) siguiente:

$$sE_{m2} \angle -\delta = R_2 \mathbf{I}_{m2} + j\omega_2 L_2 \mathbf{I}_{m2}$$

que conduce a un valor complejo de $\mathbf{I}_{m2}$:

$$\mathbf{I}_{m2} = \frac{sE_{m2} \angle -\delta}{R_2 + j\omega_2 L_2} = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + \omega_2^2 L_2^2}} \angle (-\delta - \varphi)$$

donde $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega_2 L_2}{R_2}$, por lo que la correspondiente corriente instantánea o solución de la ecuación (*b*) será:

$$i_2 = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + \omega_2^2 L_2^2}} \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta - \varphi)$$

y como quiera que $\omega_2 = s\omega_1$, si se denomina $X_2 = \omega_1 L_2$, la expresión de la corriente será:

$$i_2 = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}} \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta - \varphi) = I_{m2} \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta - \varphi)$$

donde $I_{m2} = \dfrac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}}$

c) El par desarrollado por la máquina responde a la ecuación:

$$T = i_a i_2 \frac{dL_{a2}}{d\theta} + i_b i_2 \frac{dL_{b2}}{d\theta} \qquad (c)$$

que teniendo en cuenta que:

$$\frac{dL_{a2}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(L_m \cos\theta) = -L_m \operatorname{sen}\theta = -L_m \operatorname{sen}(\Omega t + \delta)$$

$$\frac{dL_{b2}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(L_m \operatorname{sen}\theta) = +L_m \cos\theta = +L_m \cos(\Omega t + \delta)$$

y los valores de i_a e i_b:

$$i_a = I_{m1} \cos\omega_1 t \quad ; \quad i_b = I_{m1} \operatorname{sen}\omega_1 t$$

y recordando que $\Omega = \omega_1 (1 - s)$; $\omega_2 = s\omega_1$, al sustituir en (*c*) resulta:

$$T = L_m I_{m1} i_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta)$$

Y al sustituir el valor de i_2 calculado en el epígrafe anterior se obtiene:

$$T = L_m I_{m1} I_{m2} \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta - \varphi) \operatorname{sen}(\omega_2 t - \delta)$$

es decir

$$T = \frac{L_m I_{m1} I_{m2}}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega_2 t - 2\delta - \varphi)]$$

que corresponde a un valor medio:

$$T_{med} = \frac{L_m I_{m1} I_{m2}}{2} \cos \varphi$$

pero teniendo en cuenta que al ser tg $\varphi = \omega_2 L_2 / R_2$, el valor del cos φ es:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}} \quad ; \quad X_2 = \omega_1 L_2$$

y como quiera que

$$E_{m2} = L_m \omega_1 I_{m1}$$

resulta un par medio:

$$T_{med} = \frac{E_{m2} I_{m2}}{2\omega_1} \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}}$$

y como además se tiene que:

$$I_{m2} = \frac{sE_{m2}}{\sqrt{R_2^2 + s^2 X_2^2}}$$

el valor del par medio en función de I_{m2} es:

$$T_{med} = \frac{R_2 I_{m2}^2}{2s\omega_1}$$

Como quiera además que para una onda sinusoidal, la corriente eficaz I_2 es igual al valor máximo I_{m2} dividido por $\sqrt{2}$, el par medio resultante anterior se puede expresar también como:

$$T_{med} = \frac{R_2 I_2^2}{s\omega_1}$$

o en función de la f.e.m. eficaz E_2 del rotor:

$$T_{med} = \frac{R_2 s^2 E_2^2}{\omega_1 (R_2^2 + s^2 X_2^2)}$$

de este modo el motor asíncrono bifásico produce un par medio distinto de cero, cuya magnitud depende de la velocidad. En particular *en el arranque* se cumple $s = 1$, por lo que el par correspondiente será:

$$T_a = \frac{R_2 E_2^2}{\omega_1 (R_2^2 + X_2^2)}$$

Obsérvese que si Ω fuera igual a ω_1 se cumplirá $s = 0$, y en estas condiciones *el par medio sería cero*. El motor nunca podrá girar a la velocidad de sincronismo y es por ello que

estos motores se denominan **asíncronos**. Generalmente el motor suele trabajar para deslizamientos comprendidos entre el 2 y el 8 por 100.

La potencia mecánica que desarrollará el motor cuando gire a la velocidad angular ω_m será:

$$P_{mec} = T_{med} \cdot \Omega$$

pero teniendo en cuenta que $\Omega = \omega_1 (1 - s)$, resultará:

$$P_{mec} = \frac{R_2 I_2^2}{s\omega_1} \omega_1 (1 - s) = R_2 I_2^2 \left(\frac{1}{s} - 1\right)$$

expresión que se demostrará de un modo más tradicional en el Capítulo 4, dedicado a motores asíncronos.

Ejemplo de aplicación 1.15: Motores paso a paso de reluctancia variable. (4)

*Un motor paso a paso (**step-step** o **stepper**) es un dispositivo electromecánico que convierte una serie de impulsos eléctricos en desplazamientos angulares discretos. En la Figura 1.55 se representa un motor de este tipo cuyo estátor consta de tres secciones: a, b y c. El rotor tiene ocho salientes magnéticos. Cada devanado del estátor está distribuido alrededor de la periferia formando ocho salientes magnéticos, de tal modo que los salientes o dientes correspondientes a cada fase están desplazados 15° entre sí. Las inductancias de cada devanado o fase son máximas cuando están enfrentados los dientes del rotor con los correspondientes del estátor de cada fase. Si se denomina θ al ángulo que forma el centro de un diente del rotor con el correspondiente más cercano del estátor de la fase «a» (medido, por ejemplo, en el sentido de las agujas del reloj), las inductancias propias de los devanados de cada fase, en función de la posición del rotor, vendrán expresadas por las ecuaciones:*

$$L_a = L_0 + L_m \cos 8\theta \quad ; \quad L_b = L_0 + L_m \cos 8(\theta - 15°) \quad ; \quad L_c = L_0 + L_m \cos 8(\theta + 15°)$$

Calcular la expresión del par resultante en el rotor en los casos siguientes: 1) cuando se excita únicamente el devanado «a»; 2) cuando se excita solamente el devanado «b»; 3) cuando se excitan a la vez los devanados a y b.

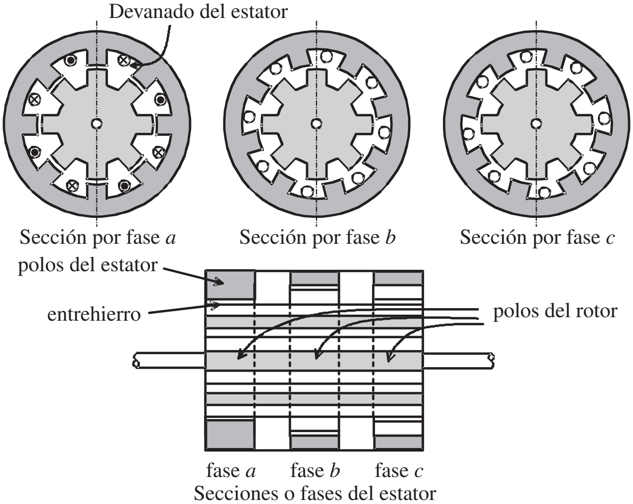


Figura 1.55. Motor paso a paso.

Solución

1. La expresión del par, de acuerdo con (1.118), será:

$$T_a = \frac{1}{2} i_a^2 \frac{dL_a}{d\theta} = -4 i_a^2 L_m \text{ sen } 8\theta$$

lo que significa que el rotor girará en sentido contrario a las agujas del reloj (signo menos de la expresión anterior) hasta que el par sea nulo, es decir, para $\theta = 0$, lo que corresponde a una posición en la que se enfrentan los dientes del rotor con los correspondientes del estátor de la fase *a*.

2. En este caso resultará:

$$T_a = \frac{1}{2} i_b^2 \frac{dL_b}{d\theta} = -4 i_b^2 L_m \text{ sen } 8(\theta - 15°)$$

que significa que el rotor girará un ángulo de 15° en sentido antihorario, lo que corresponde al enfrentamiento de los dientes del rotor con los del estátor de la fase *b*.

3. En este caso se cumplirá:

$$T_{ab} = T_a + T_b = -4 i_b^2 L_m \,[\text{sen } 8\theta + \text{sen } 8(\theta - 15°)]$$

donde se ha supuesto que las corrientes de ambos devanados son iguales, es decir:

$$i_a = i_b = i$$

y el par anterior se puede escribir también:

$$T_{ab} = -8i^2 \cos 60°\, L_m \text{ sen } 8(\theta - 7{,}5°) = -4\sqrt{3}\, i^2 L_m \text{ sen } 8(\theta - 7{,}5°)$$

El par anterior se anula para $\theta = 7{,}5°$ y tiene un valor máximo que es $\sqrt{3}$ veces del que se obtiene excitando una sola bobina. Si se hubiera partido de la excitación de la bobina *a*, se observa que al excitar a la vez dos devanados *a* y *b* se producirá un giro antihorario de 7,5°. De este modo el motor paso a paso aquí descrito permite realizar desplazamientos angulares de 7,5°.

En la práctica existen motores paso a paso con escalones de 2; 2,5; 5; 7,5 y 15° por cada impulso aplicado a los devanados del estátor. Este tipo de motores se utiliza en sistemas de control digital, en los que el motor recibe un tren de impulsos para situar la posición del rotor en el ángulo deseado. Cada impulso aplicado a las bobinas del estátor hace girar el rotor el ángulo θ_g de paso. El sentido puede ser directo o inverso según sea el orden de sucesión de impulsos en las bobinas. Las ventajas de estos motores son: 1) respuesta rápida (menos de 1 milisegundo), 2) insensibilidad a las vibraciones y choques, 3) larga duración (del orden de millones de ciclos), 4) posicionamiento preciso, 5) insensibilidad a las variaciones de tensión y a las amplitudes de los impulsos. La versatilidad de estos motores es también muy importante y se pueden utilizar como: *a*) motores de frecuencia variable, es decir, de velocidad variable; *b*) motores de c.c. sin escobillas; *c*) servomotores en circuito abierto que eliminan la realimentación, y *d*) motores síncronos.

Las aplicaciones más importantes incluyen el posicionamiento de piezas en máquinas-herramientas, impresoras de ordenador, accionamientos para plumillas de sistemas registradores, *plotters x-y*, relojes eléctricos, etc. Por ejemplo, en las impresoras de ordenadores, los motores paso-paso se utilizan para efectuar el avance del papel; existe un sistema de engranajes o caja de velocidad de relación 4,5:1 entre el motor y el papel, de tal modo que al aplicar impulsos al devanado del estátor, se pueden conseguir avances con pasos en el papel de 6 a 8 líneas por pulgada.

PROBLEMAS

1.1. Calcular la intensidad que debe aplicarse a la bobina del circuito magnético de la Figura P.1.1. para establecer en la columna derecha un flujo de 10^{-3} Wb. La permeabilidad relativa se supone que es constante en todos los puntos y de valor $\mu_r = 400$, y la sección $S = 10$ cm^2 es la misma en toda la estructura, excepto en la columna izquierda, que vale 20 cm^2. La longitud l es igual a 10 cm. Calcular también el flujo en el brazo central.

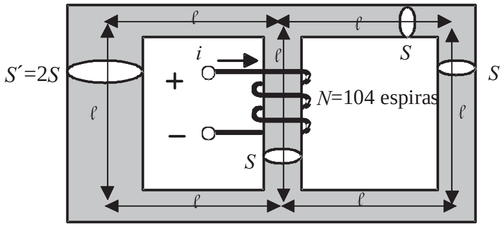


Figura P.1.1.

[Resp.: I = 9,95 A; Φ = 2,2 mWb.]

1.2. Un circuito magnético tiene una sección uniforme de 8 cm^2 y una longitud magnética media igual a 0,3 metros. Si la curva de magnetización del material viene expresada aproximadamente por la ecuación:

$$B = \frac{1{,}55\,H}{77 + H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

Calcular la c.c. en amperios que debe introducirse en la bobina de excitación, que tiene 100 espiras, para producir un flujo en el núcleo de $8 \cdot 10^{-4}$ Wb.

[Resp.: 0,42 A.]

1.3. Calcular la corriente necesaria en la bobina de la Figura P.1.2 para producir una densidad de flujo en el entrehierro igual a 0,8 Teslas. El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene dada por:

$$B = \frac{1{,}6\,H}{75 + H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

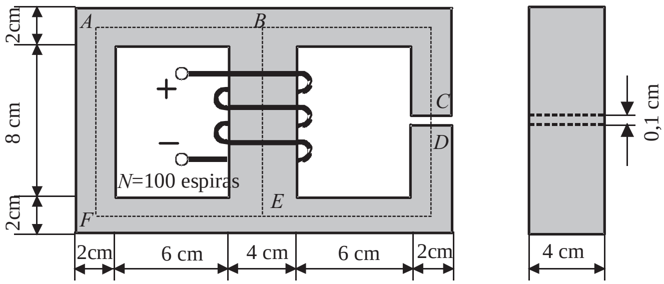


Figura P.1.2.

[Resp.: 6,83 A.]

1.4. En la estructura magnética mostrada en la Figura P. 1.3, la densidad de flujo en el entrehierro de la derecha es de 1 Wb/m^2. El núcleo está hecho de un material cuya curva de imanación viene dada por:

$$B = \frac{1{,}5\,H}{1.000 + H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

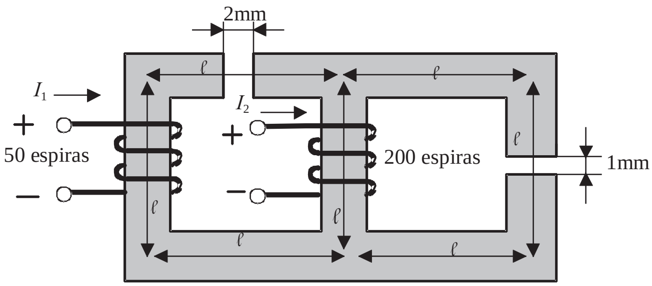


Figura P.1.3.

la longitud 1 = 10 cm y la sección transversal es uniforme y vale 5 cm^2. Calcular las corrientes I_1 e I_2 que deben circular por las bobinas para que el flujo en el entrehierro izquierdo sea nulo.

[Resp.: $I_1 \approx 28$ A; $I_2 \approx 8$ A.]

1.5. La estructura magnética mostrada en la Figura P. 1.4 está construida con un material cuya curva de imanación se expresa por:

$$B = \frac{1{,}5\,H}{100 + H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

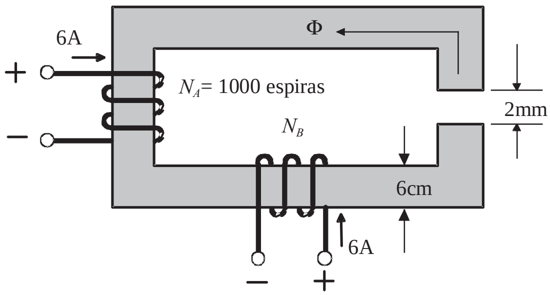


Figura P.1.4.

La longitud de la trayectoria magnética media en el núcleo es igual a 0,75 m. Las medidas de la sección transversal son de 6 × 8 cm^2. La longitud del entrehierro es de 2 mm y el flujo en el mismo es igual a 4 mWb (en el sentido indicado en la Figura P.1.4). Determinar el número de espiras de la bobina B.

[Resp.: $N_B \approx$ 1.237 espiras.]

1.6. El núcleo magnético mostrado en la Figura P.1.5 tiene una sección transversal uniforme igual a 100 cm^2. La bobina A tiene 1.000 espiras, circulando una c.c. de 0,5 A. en la dirección indicada. Determinar la corriente I_B, para conseguir un flujo nulo en el brazo central. La permeabilidad relativa es $\mu_r = 200$.

[Resp.: $I_B = 1{,}25$ A.]

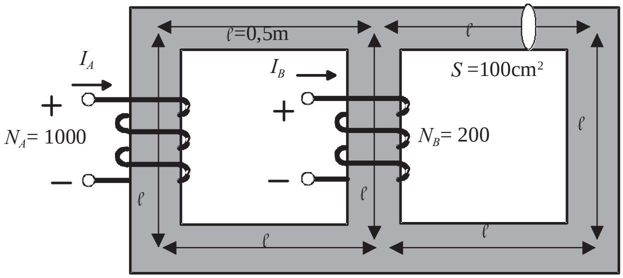


Figura P.1.5.

1.7. El circuito magnético de la Figura P.1.6 está construido con un material, cuya curva de magnetización viene dada por:

$$B = \frac{1{,}5\, H}{50 + H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

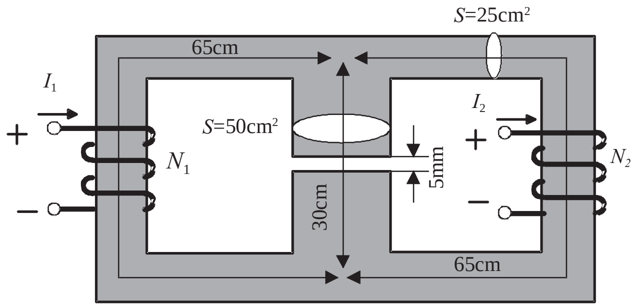


Figura P.1.6.

La sección de la columna central vale 50 cm^2 y en el resto es uniforme y de valor 25 cm^2. Si $N_1 = N_2 = 360$ espiras, calcular el valor de $I_1 = I_2$ para producir un flujo de $5 \cdot 10^{-3}$ Wb en el entrehierro.

[Resp.: 11,32 A.]

1.8. La estructura magnética de la Figura P.1.7 está fabricada con dos tipos de materiales, cuyas curvas de magnetización vienen expresadas por las ecuaciones:

$$B_1 = \frac{1{,}1\, H_1}{5.000 + H_1} \quad ; \quad B_2 = \frac{2{,}1\, H_2}{2.000 + H_2} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

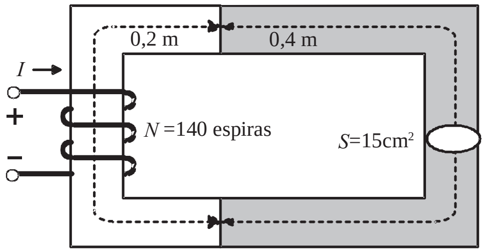


Figura P.1.7.

Calcular la intensidad I que debe circular por la bobina para producir un flujo de $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Wb, si la sección es uniforme y vale 15 cm^2.

[Resp.: 1 A.]

1.9. Una estructura magnética homogénea tiene una longitud magnética media igual a 50 cm; y tiene una sección uniforme de 10 cm^2. Si la bobina tiene 100 espiras y la curva de magnetización viene expresada por:

$$B = \frac{15\,H}{100 + H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

Cuando circula por la bobina una intensidad de 0,1 A se pide el valor del coeficiente de autoinducción calculado por los tres procedimientos siguientes: *a*) Empleando la fórmula: $L = N\, d\Phi/di$. *b*) Utilizando la expresión: $L = N\,\Phi/i$. *c*) Calculando la energía magnética almacenada por medio de la expresión (1.54) e igualando a $1/2\ Li^2$.

[Resp.: *a*) 2,08 H; *b*) 2,5 H; *c*) 2,34 H.]

1.10. Una bobina con núcleo de hierro, tiene 500 espiras, siendo su resistencia despreciable. La sección del núcleo es uniforme y vale 25 cm^2, siendo la longitud magnética media igual a 80 cm. La curva de imanación del material es:

$$B = \frac{2\,H}{150 + H} \qquad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

Si la tensión aplicada es alterna y de 220 V eficaces y la frecuencia es de 50 Hz, calcular: *a*) Circuito equivalente de la bobina. *b*) Corriente de excitación.

NOTA: *Se conoce, por la información proporcionada por el constructor, que a la tensión nominal de 220 V las pérdidas en el núcleo son de 5 W/kg. El peso específico del material es igual a 7,8 kg/dm³.*

[Resp.: *a*) $R_{Fe} = 620{,}5\ \Omega$; $X_\mu = 1.972\ \Omega$; *b*) 0,372 A.]

1.11. Una bobina con núcleo de hierro absorbe una corriente de 0,5 A cuando se aplica una tensión sinusoidal de 220 V eficaces a sus bornes. Si la potencia absorbida fue de 30 W, deducir el circuito equivalente de la bobina.

[Resp.: $R_{Fe} = 1.617{,}64\ \Omega$; $X_\mu = 457{,}38\ \Omega$.]

1.12. Un **cerrojo eléctrico** consiste en una armadura fija cilíndrica hueca y un vástago cilíndrico, dispuestos como se indica en la Figura P.1.8. Supuesto que la reluctancia

del hierro es despreciable frente a la del entrehierro, y que la unión vástago-armadura presenta un entrehierro despreciable frente al entrehierro principal *e*, calcular: *a*) La energía almacenada en el entrehierro en julios si *e* = 1 cm; la superficie del entrehierro es de 0,8 cm^2 y la intensidad de excitación es de 1 A de c.c. *b*) Fuerza magnética en el caso anterior.

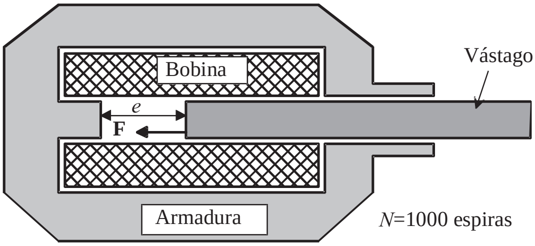


Figura P.1.8.

[Resp.: *a*) $5 \cdot 10^{-3}$ julios; *b*) 0,497 Newton.]

1.13. El núcleo magnético de la Figura P.1.9 tiene una sección transversal cuadrada de 3 × 3 cm. El entrehierro x = 5 mm. La bobina tiene 250 espiras y una resistencia de 11 Ω. La f.m.m. que necesita el hierro es despreciable. Calcular la energía almacenada en el entrehierro y la fuerza total que actúa sobre la armadura cuando se aplican a la bobina 220 V de c.c.

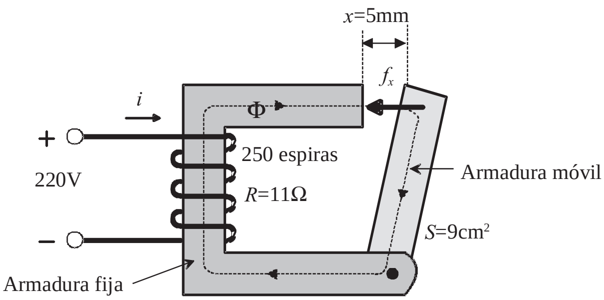


Figura P.1.9.

[Resp.: 2,82 julios; 565,8 N.]

1.14. La estructura magnética de la Figura P.1.10 tiene una permeabilidad relativa μ_r = 100; la longitud de la trayectoria magnética media es igual a 1 m en el hierro. El valor de la sección transversal es de 100 cm^2. La longitud total del entrehierro (dos partes) es de 0,2 cm. El flujo en el entrehierro es de $4 \cdot 10^{-3}$ Wb y su sentido es el indicado en la figura. La bobina A tiene 1.000 espiras y la B tiene N espiras, circulando por ambas bobinas una c.c. de 6 A.

Se pide: *a*) Determinar el número de espiras de la bobina B. *b*) Calcular la fuerza con que es atraída la armadura móvil. *c*) Si se coloca una espira como se indica en la Figura P.1.10, ¿cuál será la lectura del voltímetro? 1) Si la corriente de alimentación es de c.c. 2) Si la corriente de alimentación es sinusoidal y de tal magnitud que produzca el mismo valor eficaz de flujo en el entrehierro. La frecuencia es de 50 Hz.

NOTA: Se supone que para resolver el apartado. c) el entrehierro está abierto.

[Resp.: *a*) 363 espiras. *b*) 130 kg. *c*) 0 volt., 1,25 V.]

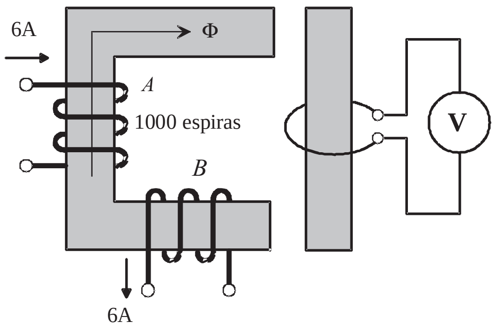


Figura P.1.10

1.15. Hallar una expresión de la fuerza en el bloque deslizante A de la Figura P.1.11. Despreciar la reluctancia del hierro. Las bobinas están alimentadas con c.c. y los parámetros son:

$$N_1 = 200 \;\; ; \;\; N_2 = 100 \;\; ; \;\; i_l = 10 \text{ A} \;\; ; \;\; i_2 = 15 \text{ A} \;\; ; \;\; x = 3 \text{ mm} \;\; ; \;\; a = 10 \text{ mm} \;\; ; \;\; s = 10 \text{ cm}^2$$

[Resp.: 250,4 *N* hacia la izquierda.]

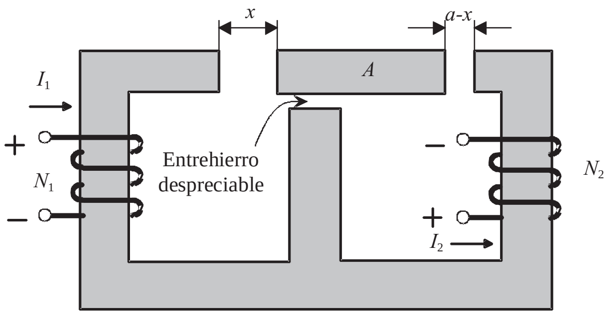


Figura P.1.11.

1.16. Las inductancias de un dispositivo electromagnético mostrado en la Figura P.1.12 son:

$$L_{aa} = L_1 + L_2 \cos 2\theta \;\; ; \;\; L_{bb} = L_1 - L_2 \cos 2\theta \;\; ; \;\; L_{a2} = L_m \cos\theta \;\; ;$$
$$L_{b2} = L_m \operatorname{sen}\theta \;\; ; \;\; L_{ab} = L_2 \operatorname{sen} 2\theta \;\; ; \;\; L_{22} = \text{constante}$$

Si el rotor se mueve a una velocidad angular $\Omega = \omega$, estando definida su posición por la expresión $\theta = \Omega t + \delta$. Calcular la expresión del par producido si las corrientes son de la forma:

$$i_a = I_m \cos\omega t \;\; ; \;\; i_b = I_m \operatorname{sen}\omega t \;\; ; \;\; i_2 = I_2$$

[Resp.: $T = -I_m^2 L_2 \operatorname{sen} 2\delta - L_m I_m I_2 \operatorname{sen}\delta$.]

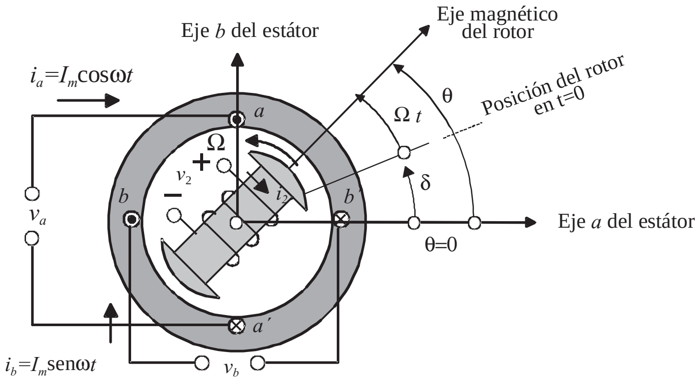


Figura P.1.12.

1.17. Para el sistema de la Figura 1.50 del capítulo, los valores de las inductancias son:

$$L_{11} = 5 + 2\cos 2\theta \quad ; \quad L_{22} = 3 + \cos 2\theta \quad ; \quad L_{12} = 10\cos\theta$$

si los devanados se alimentan con corrientes continuas de valores: $i_1 = 1$ A; $i_2 = 0{,}5$ A. Calcular: *a*) Energía magnética almacenada en función de θ; *b*) Par mecánico desarrollado en función de θ.

[Resp.: *a*) $W_m = 2{,}875 + 1{,}125\cos 2\theta + 5\cos\theta$; *b*) $T = -2{,}25\,\text{sen}\,2\theta - 5\,\text{sen}\,\theta$.]

1.18. El dispositivo electromagnético mostrado en la Figura 1.50 del capítulo tiene una inductancia máxima y mínima en el devanado del rotor de 0,6 H y 0,3 H, respectivamente, y los valores máximos y mínimos de la inductancia correspondiente del estátor son de 1 H y 0,5 H, respectivamente. La inductancia mutua máxima es de 0,7 H. Ambos devanados llevan una corriente constante de valor $\sqrt{2}$ amperios. *a*) Calcular el par cuando $\theta = 45°$. *b*) Si el rotor se mueve lentamente desde $\theta = 90°$ hasta $\theta = 0°$, calcular: 1) trabajo mecánico realizado, 2) cambio en la energía magnética almacenada, 3) entrada eléctrica. *c*) Si el rotor gira a una velocidad de 100 rad/s, calcular las f.e.m.s. e_1 y e_2 producidas en las bobinas cuando $\theta = 45°$.

[Resp.: *a*) −1,79 N.m.; *b*) 1) 2,2 Julios, 2) 2,2 Julios, 3) 4,4 Julios; *c*) +140,71 V, +112,43 V.]

1.19. Una máquina eléctrica tiene forma cilíndrica tanto en la estructura del estátor como en la del rotor. Los valores de las inductancias son:

$$L_{11}\,(\text{estátor}) = 0{,}1\ [\text{H}] \quad ; \quad L_{22}\,(\text{rotor}) = 0{,}04\ [\text{H}] \quad ; \quad L_{12} = 0{,}05\cos\theta\ [\text{H}]$$

donde θ expresa el ángulo que forman los ejes de ambos devanados. *a*) Si la máquina gira a una velocidad $\Omega = 200$ rad/s y por uno de los devanados circula una corriente 10 sen 200*t*, ¿cuál será la f.e.m. máxima (de pico) inducida en la otra bobina? *b*) Supóngase que los devanados se conectan en serie y circula por ellos una corriente 10 sen 200*t*. ¿Para qué velocidades del rotor desarrollará la máquina un par medio? *c*) ¿Cuál es el valor máximo del par medio que puede obtenerse en el caso *b*)?
NOTA: Despreciar las resistencias eléctricas de los devanados.

[Resp.: *a*) 100 V; *b*) 0; $2\omega = 2 \cdot 200 = 400$ rad/s; *c*) 1,25 N.m.]

1.20. Una máquina eléctrica con salientes magnéticos tanto en el estátor como en el rotor tiene las siguientes inductancias:

$$L_{11}\,(\text{estátor}) = 0{,}75 + 0{,}35 \cos 2\theta \text{ Henrios} \quad ; \quad L_{22}\,(\text{rotor}) = 0{,}5 + 0{,}2 \cos 2\theta \text{ Henrios}$$

$$L_{12}\,(\text{estátor-rotor}) = 0{,}8 \cos \theta \text{ Henrios}$$

Las resistencias de los devanados son despreciables. Si por el devanado del estátor circula una corriente $i_1(t) = \sqrt{2}$ sen $314t$, y el rotor está en cortocircuito, calcular la corriente $i_2(t)$ que circulará por el rotor y el par resultante, cuando $\theta = 135°$.

[Resp.: $i_2(t) = 1{,}6$ sen $314t$; $T = 0{,}034\,(\cos 628t - 1)$.]

Biografías

Barkhausen, Heinrich (1881-1956). Físico alemán. Catedrático de Comunicaciones en la Universidad de Dresden (1911). Su mayor contribución a la física se refiere a la magnetización del hierro. Al someter al hierro a un campo magnético continuamente creciente, su magnetización se incrementa a saltos, y no continuamente. Esos saltos van acompañados de sonidos que, previamente amplificados, se pueden escuchar en un altavoz, como una serie de chasquidos. Este *efecto Barkhausen* se explicó finalmente, al llegarse a conocer que el hierro está constituido por unas zonas o dominios, en los que los espines están alineados; la alineación de las zonas ocasiona rozamientos entre ellas; provocando los chasquidos que se pueden escuchar en el altavoz.

Bell, Alexander Graham (1847-1922). Físico inglés-americano. Estudió en Londres y más tarde en Canadá, estuvo perfeccionando el sistema de enseñanza para sordomudos inventado por su padre. Fue nombrado profesor de fisiología vocal en Boston (1872). Se interesó en la producción mecánica del sonido, basando su trabajo en las teorías de Helmholtz. Inventó más tarde, en 1876, el teléfono, solicitando el mismo día que Elisha Gray la patente correspondiente. Mejoró también el fonógrafo de Edison; inventó la balanza de inducción, se interesó por la aeronáutica e hizo experimentos en relación con el aire acondicionado. No descuidó en ningún momento sus estudios pedagógicos, sobre todo en lo relacionado con la enseñanza de los sordomudos.

Bohr, Niels Henrik David (1885-1962). Físico danés. Estudió en la Universidad de Copenhague y amplió estudios en Cambridge, donde trabajó con Rutherford. En 1916 fue nombrado catedrático de Física en Copenhague. Basándose en las teorías de Rutherford y en la teoría cuántica de Planck, demostró un modelo del átomo de hidrógeno que explicaba las líneas espectrales descubiertas por Fraunhofer y las regularidades descritas por Balmer. El modelo creado por Bohr fue completado por Sommerfeld considerando las órbitas de los electrones de forma elíptica. Premio Nobel de Física en 1922. En 1943, durante la Segunda Guerra Mundial, se trasladó a los Estados Unidos para evitar ser encarcelado por los alemanes; trabajó en el proyecto de la bomba atómica en los Álamos hasta 1945. Bohr trabajó incansablemente en favor del desarrollo de la energía atómica para usos pacíficos.

Foucault, Jean Bernard Leon (1819-1868). Físico francés. Estudió Medicina hasta doctorarse, pero abandonó esta carrera para dedicarse exclusivamente a las ciencias físicas y, sobre todo, a la óptica (trabajando con Armand Fizau). Son importantes sus experimentos para determinar la velocidad de la luz, demostrando que la velocidad en el aire es mucho mayor que en el agua. El nombre de Foucault se asocia más a menudo con una serie de experimentos espectaculares que empezaron en 1851 para estudiar el movimiento de rotación de la Tierra con ayuda del péndulo.

Froelich, Oskar (1843-1909). Ingeniero eléctrico suizo. Estudió en Berna y Königsberg. Trabajó como ingeniero en la Casa de Siemens y Halske (1873). En 1902 fue nombrado profesor de metalurgia práctica y electroquímica de la Escuela Superior Industrial de Charlotenburgo. Publicó varios

libros de electricidad y magnetismo y otro de máquinas dinamoeléctricas. Fue el primero en dar una aproximación matemática a la curva de imanación de un material ferromagnético, para simplificar el modelo del circuito magnético de una máquina eléctrica.

GILBERT, William (1540-1603). Físico y médico inglés. Ejerció la medicina en Londres; más tarde fue médico de la reina Isabel y del rey Jacobo I, de los cuales recibió una pensión anual para sus investigaciones científicas. Su obra maestra fue *De magnete magneticisque corporibus*, en la que resumía todos los conocimientos que en esa época se conocían sobre el magnetismo terrestre. La gran contribución de Gilbert consistió en considerar a la Tierra como un inmenso imán esférico, por lo que las agujas imantadas apuntaban hacia los polos magnéticos terrestres. También elaboró teorías sobre la estructura del universo que fueron avanzadas y atrevidas para aquella época.

HOPKINSON, John (1849-1898). Ingeniero y físico inglés. Estudió en el Trinity College de Cambridge y más tarde en Londres (1871). Entre 1872 y 1878 trabajó en una fábrica de faros en Birminghan, introduciendo grandes perfeccionamientos en estos aparatos, y luego se estableció como ingeniero consultor en Londres. En 1890 fue nombrado catedrático del recién fundado Laboratorio Siemens en el King's College de Londres. Hopkinson tenía una gran formación teórica y mostraba una gran habilidad práctica, por lo que son notables sus investigaciones teóricas y la solución concreta de problemas de ingeniería. Escribió más de sesenta artículos, con una gran maestría y conocimiento de la materia, y varios libros sobre la corriente alterna y máquinas eléctricas. Sus trabajos fundamentales se refieren al estudio de la magnetización del hierro, asentando las bases científicas para la construcción y el cálculo de las máquinas eléctricas (junto con su hermano Edward); fue el primero que estudió con rigor la estabilidad estática del acoplamiento de alternadores y las condiciones que debían cumplirse para poder efectuar dicho acoplamiento. Fue ingeniero consultor de la *English Edison Company*, donde su misión era rediseñar las dinamos ineficientes construidas por la Compañía Edison americana. Desgraciadamente, murió prematuramente en un accidente de montaña en una ascensión a los Alpes junto con tres de sus hijos.

MORSE, Samuel Finley Breese (1791-1872). Inventor americano. Graduado en Yale, estudió arte en Inglaterra. Se aficionó a los experimentos eléctricos y fue ayudado por Henry en todas sus dudas cuando estuvo construyendo su célebre telégrafo (1844). El primer mensaje de Morse fue ¿Qué ha creado Dios?, que envió en una clave de puntos y rayas invención suya, y que por ello aún se denomina «código Morse». Morse nunca reconoció la ayuda de Henry en sus experimentos. Realmente la idea del telégrafo se debe a varios científicos: Henry en Estados Unidos, y Wheatstone, Gauss y Weber en Europa. El mérito de Morse fue crear su celébre código.

PICOU, Romuald Victor (1855-1942). Ingeniero francés. Estudió en la Escuela Central de Artes y Oficios (1877). En ese mismo año realizó una instalación de alumbrado por arco eléctrico alimentada por una dinamo Gramme. En la Exposición Internacional de París de 1881 fue invitado por un grupo de financieros franceses para que hiciera un informe sobre las primeras lámparas Edison expuestas en la Feria y los sistemas de generación y distribución de energía eléctrica para instalaciones de alumbrado. Su informe favorable hizo que se estableciera la Compañía Edison francesa en 1882 y Picou se encargó de la supervisión de la construcción de la fábrica de lámparas en Ivry. Unos meses más tarde se trasladó a los Estados Unidos, donde conoció a Edison y aprendió a diseñar y proyectar centrales eléctricas. A su vuelta a Francia en 1883 se le nombró director de la planta de Ivry. Como ingeniero proyectó gran número de Centrales eléctricas para la Sociedad Lebon y otras Compañías. Fue ingeniero jefe responsable de los Servicios eléctricos en las Exposiciones de París de 1889 y 1900. Autor de varios libros de texto sobre máquinas eléctricas, distribución y transporte de la electricidad, etc. Fue *profesor de Electrotecnia durante diez años en la Ecole National des Ponts et Chaussées.* Miembro fundador de la sociedad francesa de Electricistas, siendo Presidente de la misma en 1898.

ROTERS, Herbert C. (1903-1973). Ingeniero eléctrico americano. Se graduó en el Instituto de Tecnología Stevens y más tarde, en 1930, obtuvo el título de Master en Ciencias en el MIT. Fue profesor adjunto de Ingeniería Eléctrica en Stevens durante más de quince años. Escribió en 1941 el

libro *Electromagnetic Devices*, que fue y sigue siendo un texto de referencia sobre circuitos magnéticos para muchos ingenieros, habiéndose traducido a varios idiomas, entre ellos el ruso. Ganó fama mundial por sus estudios sobre el motor de histéresis. En 1947 fue premiado por el AIEE por sus investigaciones sobre máquinas eléctricas. Fue presidente de la Empresa *Hysteresis Motor Research,* una firma especializada en el diseño y desarrollo del motor de histéresis.

Weber, Wilhelm Eduard (1804-1891). Físico alemán. Estudió en la Universidad de Halle, donde obtuvo el grado de Doctor en 1826. En 1831 fue nombrado catedrático de Física en Gotinga, donde permaneció hasta 1837, fecha en que fue expulsado de la Universidad por protestar contra el rey de Hannover (duque de Cumberland), que había derogado la constitución. En 1833 inventó un primitivo telégrafo electromagnético. En 1843 aceptó la Cátedra de Física en Leipzig y seis años más tarde volvió a Gotinga para hacerse cargo de su antiguo puesto, en el que permaneció el resto de su vida. Colaboró con el gran matemático Gauss en teorías del magnetismo. Introdujo en 1846 un sistema lógico de unidades eléctricas, de un modo análogo al que unos años antes había desarrollado Gauss con las unidades magnéticas.

Referencias

Chatelain, J.: *Traité d'électricité,* vol. X, *Machines électriques.* Éditions Georgi, Lausanne, 1983.

Chai, H.D.: *Electromechanical Motion Devices.* Prentice Hall PTR, Upper-Saddle River, NJ, 1998.

Daniels, A. R.: *Introduction to Electrical Machines.* MacMillan Press, London, 1976.

Del Toro, V.: *Electric Machines and Power Systems.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.

El-Hawary, M. E.: *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications.* Reston Book, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1986.

Engelmann, R. H.: *Static and Rotating Electromagnetic Devices.* Marcel Sekker, Inc., New York, 1982.

Fitzgerald, A. E.; Kingsley, CH. Jr.; Umans, S. D.: *Electric Machinery,* fourth ed. (SI). McGraw-Hill Book Co., New York, 1985.

Gehmlich, D. K.; Hammond, S. B.: *Electromechanical Systems.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1967.

Gibbs, W. J.: *Conformal Transformations in Electrical Engineering*, Chapman & Hall, London, 1958.

Gönen, T.: *Electrical Machines.* Power International Press, California, 1998.

Gourishankar, V.: *Conversión de Energía Electromecánica.* Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A., International Textbook Co., México, 1969.

Gray, C. B.: *Máquinas Eléctricas y Sistemas Accionadores.* Ed. Alfaomega, S.A. México D.F, 1993.

Grellet, G.; Clerc, G.: *Actionneurs Électriques. Principles. Modèles. Commande*, Ed. Enrolles, Paris, 1997.

Guru, B. S., Hiziroglu, H. R.: *Electrical Machinery and Transformers,* 2nd Ed. Oxford University Press, New York, 1995.

Kinnard, I. F.: *Medidas Eléctricas y sus aplicaciones.* Ediciones Técnicas Marcombo S.A.; Barcelona, 1967.

Matsch, L. W.: *Máquinas electromagnéticas y electromecánicas.* Representaciones y Servicios de Ingeniería S.A., International Textbook Co., México, 1974.

MIT: *Magnetic Circuit and Transformers.* Department of Electrical Engineering, Massachusetts Institute of Technology. J. Wiley & Sons, New York, 13th Printing, 1961.

Morgan, A. T.: *General theory of Electrical Machines.* Heyden, London, 1979.

Nagrath, I. J.; Kothari, D. P.: *Electric Machines.* Tata McGraw-Hill Pub., New Delhi, 1985.

Parker, R. J.; Studders, R. J.: *Permanent Magnets and their Application.* J. Wiley & Sons, Inc, New York, 1962.

ROTERS, H. C.: *Electromagnetic devices.* John Wiley Sons, New York, 1941.

SANZ FEITO, J.: *Máquinas Eléctricas.* Prentice Hall, Pearson Educación S.A., Madrid, 2002.

SARMA, M. S.: *Electric Machines,* 2nd ed. PWS Publishing Co. International Thomsom Pub., Boston, 1996.

SAY, M. G.: *Introduction to the Unified Theory of Electromagnetic Machines.* Pitman, London, 1971.

SCHMITZ, N. L.; NOVOTNY, D. W.: *Introductory Electromechanics.* The Ronald Press Co., New York, 1965.

SLEMON, G. R.; STRAUGHEN, A.: *Electric Machines.* Addison-Wesley Pub., Reading, Massachusetts, 1980.

STEIN, R.; HUNT, W. T.: *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.

STEVEN, R. E.: *Electrical Machines and Power Electronics.* Van Nostrand Reinhold Co., England, 1983.

CAPÍTULO 2

Principios generales de las máquinas eléctricas

2.1. INTRODUCCIÓN

Las máquinas eléctricas son el resultado de una aplicación inteligente de los principios del electromagnetismo y en particular de la ley de inducción de Faraday. Las máquinas eléctricas se caracterizan por tener circuitos eléctricos y magnéticos entrelazados. Durante todo el proceso histórico de su desarrollo desempeñaron un papel rector, que determinaba el movimiento de toda la ingeniería eléctrica, merced a su aplicación en los campos de la generación, transporte, distribución y utilización de la energía eléctrica. Las máquinas eléctricas realizan una conversión de energía de una forma a otra, una de las cuales, al menos, es eléctrica. En base a este punto de vista, estrictamente energético, es posible clasificarlas en tres tipos fundamentales:

1. **GENERADOR**: que transforma la energía mecánica en eléctrica. La acción se desarrolla por el movimiento de una bobina en un campo magnético, resultando una f.e.m. inducida que al aplicarla a un circuito externo produce una corriente que interacciona con el campo y desarrolla una fuerza mecánica que se opone al movimiento. En consecuencia, el generador necesita una energía mecánica de entrada para producir la energía eléctrica correspondiente.
2. **MOTOR**: que transforma la energía eléctrica en mecánica. La acción se desarrolla introduciendo una corriente en la máquina por medio de una fuente externa, que interacciona con el campo produciendo un movimiento de la máquina; aparece entonces una f.e.m. inducida que se opone a la corriente y que por ello se denomina fuerza contraelectromotriz. En consecuencia, el motor necesita una energía eléctrica de entrada para producir la energía mecánica correspondiente.
3. **TRANSFORMADOR**: que transforma una energía eléctrica de entrada (de c.a.) con determinadas magnitudes de tensión y corriente en otra energía eléctrica de salida (de c.a.) con magnitudes diferentes.

Los generadores y motores tienen un acceso mecánico y por ello son máquinas dotadas de movimiento, que normalmente es de rotación; por el contrario, los transformadores son máquinas eléctricas que tienen únicamente accesos eléctricos y son máquinas estáticas.

Cada máquina en particular cumple el principio de reciprocidad electromagnética, lo cual quiere decir que son reversibles, pudiendo funcionar como generador o como motor (en la práctica, existe en realidad alguna diferencia en su construcción, que caracteriza uno u otro modo de funcionamiento). El estudio de las máquinas eléctricas ha experimentado grandes cambios en su exposición a lo largo de la historia. El análisis tradicional consistía en estudiar

independientemente cada una de las máquinas por separado, destacando las diferencias entre ellas desde el punto de vista de funcionamiento, diseño, construcción, etc.; actualmente, y a partir de los estudios de Park y Kron, se han expuesto teorías generalizadas y unificadas, dando lugar a una serie de textos ya clásicos en esta materia debidos a White-Woodson, Adkins, Jones, Gibbs, etc., donde se destacaban más las analogías que las diferencias, permitiendo también un análisis transitorio de estas máquinas, a base de ecuaciones de circuito del tipo matricial e incluso tensorial; este enfoque tiene un gran atractivo en cursos de doctorado pero resulta poco físico para aquellos ingenieros cuya formación requiere un conocimiento práctico de las máquinas en cuanto a sus aplicaciones tecnológicas se refiere. Por ello, en este libro sobre máquinas eléctricas se ha preferido seguir un método que se acerca más a la enseñanza tradicional, pero destacando en este capítulo aquellos aspectos que son comunes a todas las máquinas eléctricas, de tal forma que en lecciones posteriores pueda hacerse un análisis particular de cada tipo de máquina, dejando a un lado aquellos aspectos de diseño y construcción que pertenecen a áreas más específicas de la ingeniería.

El capítulo comienza describiendo los elementos básicos que incorporan las máquinas eléctricas rotativas, en sus aspectos eléctricos magnéticos y mecánicos. Se muestran detalles constructivos de la forma del estampado de las chapas magnéticas, ranuras, etc. Se analiza el comportamiento de los colectores de anillos y del colector de delgas o conmutador, haciendo especial hincapié en la forma de ondas que se obtienen en los mismos. A continuación, se incluye una descripción sucinta de la forma de los devanados de las máquinas eléctricas, pero sin llegar a estudiar las leyes de los bobinados, que pertenecen a áreas más especializadas de la ingeniería eléctrica. Se analizan los conceptos generales de pérdidas y calentamiento, describiendo los tipos de aislamientos empleados de acuerdo con la Norma UNE EN 60034-1:2005 y CEI-85 (1984). Se incluye a continuación una pregunta en la sección de Amplíe sus Conocimientos, sobre el calentamiento y enfriamiento de las máquinas eléctricas. Se indica el concepto de potencia asignada de una máquina, las clases de protección IP y los tipos de servicio a los que se destinan. También se hace un análisis del rendimiento de las máquinas eléctricas, destacando la variación del rendimiento en función de la potencia suministrada.

Comienza luego el análisis de las f.m.m.s. y campo magnético en el entrehierro producido por diferentes configuraciones de los devanados: concentrado y distribuido. Se realiza con gran detalle la exposición del teorema de Ferraris y su importancia en la producción de campos magnéticos giratorios. Se expone el teorema de Leblanc, en el que se identifica un campo alternativo con un doble campo giratorio. Se incluye una Sección de Ampliación en la que se estudia la f.m.m. producida por un devanado trifásico alimentado con corrientes desequilibradas, para destacar que entonces el campo giratorio tiene naturaleza elíptica. También se analizan los campos giratorios producidos por sistemas bifásicos y trifásicos utilizando métodos geométricos.

A continuación, se hace un análisis general de la f.e.m. inducida en una máquina eléctrica y los factores que intervienen en la mejora de la calidad de la onda producida; en especial se estudian los armónicos de f.e.m. y su eliminación utilizando el acortamiento y distribución de las bobinas. Se completa el estudio anterior con el análisis de los distintos campos giratorios que aparecen en las máquinas eléctricas que presentan armónicos espaciales. También se estudia la creación del par electromagnético en una máquina eléctrica a partir de los fasores espaciales de f.m.m. Se analiza también la potencia y el tamaño de las máquinas eléctricas y la variación tanto de la potencia como de las pérdidas en máquinas homotéticas para ver la influencia de los factores de escala, lo que es importante para los ingenieros de diseño y construcción de máquinas eléctricas. Posteriormente, y de acuerdo con la relación entre las frecuencias de inductor e inducido y la velocidad del rotor, se hace una clasificación general

de las máquinas y posteriormente se describen de un modo cualitativo los principales tipos de maquinas. En capítulos posteriores se hacen los estudios detallados de cada una de las máquinas eléctricas.

2.2. ELEMENTOS BÁSICOS DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

En términos generales, se puede decir que una máquina eléctrica rotativa se compone de dos partes, como se indica esquemáticamente en la Figura 2.1. Hay una parte fija, que se denomina **estátor** y que tiene forma cilíndrica; en el caso de máquinas de gran velocidad, dicho cilindro es largo en comparación con su diámetro, mientras que para las de pequeña velocidad es relativamente corto. En la cavidad del estátor se coloca el **rotor**, que, como su nombre indica, es la parte giratoria de la máquina. El rotor se monta en un eje que descansa en dos rodamientos o cojinetes; éstos pueden estar montados en sendos pedestales que se apoyan en la bancada, o formar parte de las culatas o tapas que están sujetas a la carcasa del estátor. El espacio de aire que separa el estátor del rotor, necesario para que pueda girar la máquina, se denomina **entrehierro**, siendo el campo magnético existente en el mismo el que constituye el medio de acoplamiento entre los sistemas eléctrico y mecánico.

Normalmente tanto en el estátor como en el rotor existen devanados hechos con conductores de cobre por los que circulan corrientes suministradas o cedidas a un circuito exterior que constituye el **sistema eléctrico**. Uno de los devanados tiene por misión crear un flujo en el entrehierro y por ello se denomina **inductor**, y también **excitación** o **campo**. El otro devanado recibe el flujo del primero y se inducen en él corrientes que se cierran por el circuito exterior y se denomina **inducido**. Lo mismo puede situarse el inductor en el estátor y el inducido en el rotor o viceversa; lo que realmente cuenta es el movimiento relativo entre ambos devanados y teóricamente puede elegirse cualquiera de ambas soluciones, aunque en la práctica su situación la determinan las condiciones tecnológicas de facilidad de construcción, aislamiento, refrigeración, etc. Desde el punto de vista de la construcción, el estátor tiene su parte exterior recubierta por la **carcasa** o culata, estando constituida por un cilindro hueco al que se unen los pies y los dispositivos de fijación de la máquina (Fig. 2.2). En las máquinas pequeñas se construye en forma de un monobloque de fundición de hierro colado y en las máquinas grandes se compone de dos o cuatro partes ensambladas. La forma de la carcasa varía de un constructor a otro, estando condicionada por el sistema de refrigeración y por la protección exigible en el lugar de trabajo (contra objetos sólidos, polvo, agua, antide-

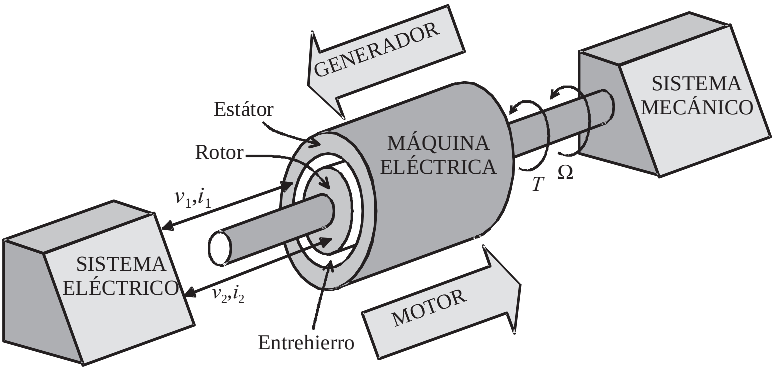


Figura 2.1. La máquina eléctrica como convertidor de energía.

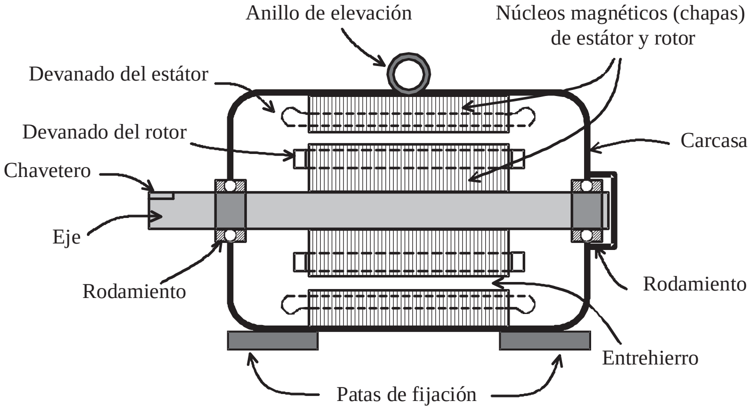


Figura 2.2. Aspectos constructivos de una máquina eléctrica.

flagrantes, etc.) En los lados de la carcasa van colocadas las tapas que cerrarán el motor y que tienen un hueco central en su interior para alojar los cojinetes del rotor.

El estátor y el rotor se construyen con material ferromagnético, de tal forma que para evitar pérdidas en el hierro suelen realizarse con chapas magnéticas de acero al silicio, convenientemente ranuradas para alojar en su interior los devanados correspondientes.

En la Figura 2.3 se muestran diversas formas de chapas magnéticas empleadas en la construcción de máquinas eléctricas; se observa que las que configuran el rotor disponen en el centro de un agujero circular, para introducir por el mismo el eje, disponiendo también de su correspondiente chavetero para que la sujeción sea perfecta. En las máquinas grandes existen también unos agujeros en las chapas distribuidos en su superficie que hacen de conductos de ventilación, para que penetre por ellos el aire producido por un ventilador acoplado al mismo eje, evitándose en gran parte el aumento de temperatura que se obtendría debido a las pérdidas en el hierro.

Las ranuras para alojar los conductores de los devanados pueden ser del tipo abierto, semicerrado y cerrado, como se indica en la Figura 2.4. Exceptuando el caso de las ranuras cerradas, que se emplean casi exclusivamente en la construcción del devanado del rotor de los

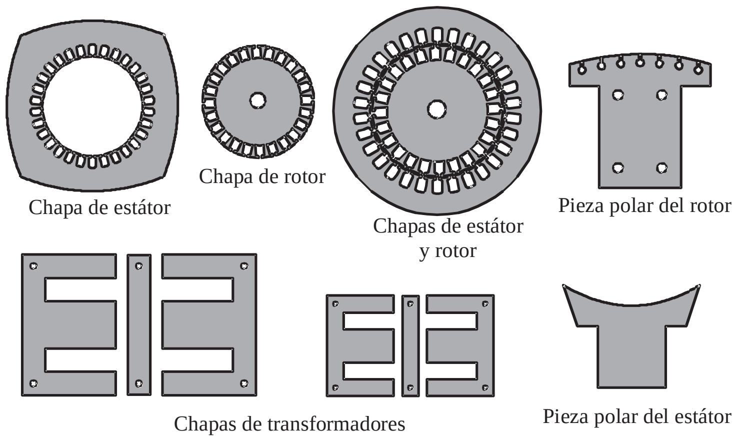


Figura 2.3. Tipos de chapas magnéticas.

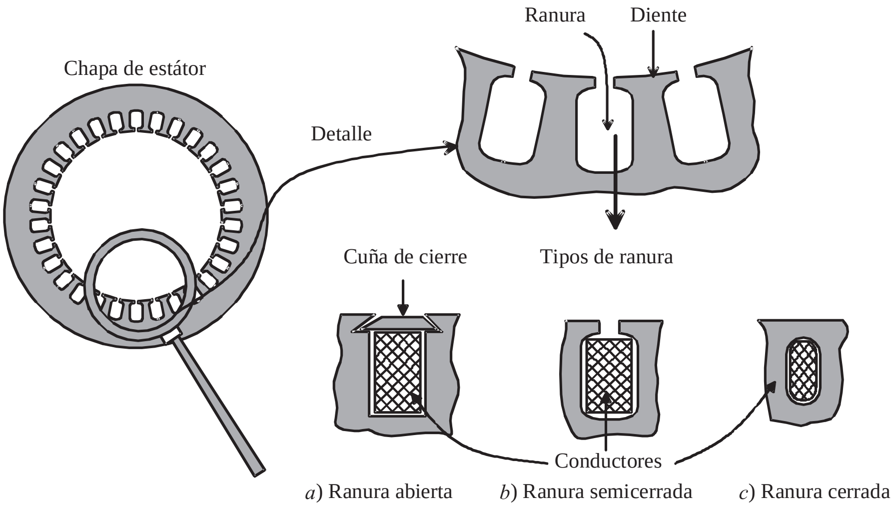


Figura 2.4. Tipos de ranura.

motores de inducción (asíncronos) en jaula de ardilla, las ranuras suelen presentar una sección del tipo rectangular; las abiertas se utilizan en las grandes máquinas, donde el devanado se prepara con sus bobinas totalmente acabadas en una bobinadora o torno de baja velocidad, de tal forma que permite la colocación de la bobina entera en la ranura, cerrando ésta por medio de un calzo aislante; las ranuras semicerradas se emplean en las máquinas pequeñas, donde el devanado se coloca, haciendo deslizar los hilos conductores de la bobina, uno por uno por la garganta de entrada.

Desde el punto de vista de la configuración física, las máquinas eléctricas adoptan tres formas básicas, como se indica en la Figura 2.5. En el caso *a*) se tienen dos superficies totalmente cilíndricas, con un entrehierro uniforme; esta disposición se encuentra en las máquinas asíncronas, estando situado el inductor en el estátor y también se emplea en los turboalternadores de las centrales térmicas, situando el inductor en el rotor. En los casos *b*) y *c*) la superficie del estátor o del rotor presenta unos «salientes» magnéticos denominados polos que están provistos a su vez de unas expansiones o cuernos polares (Fig. 2.5*c*); en estos polos se sitúa siempre el devanado inductor, recorrido normalmente por c.c. y creando un campo

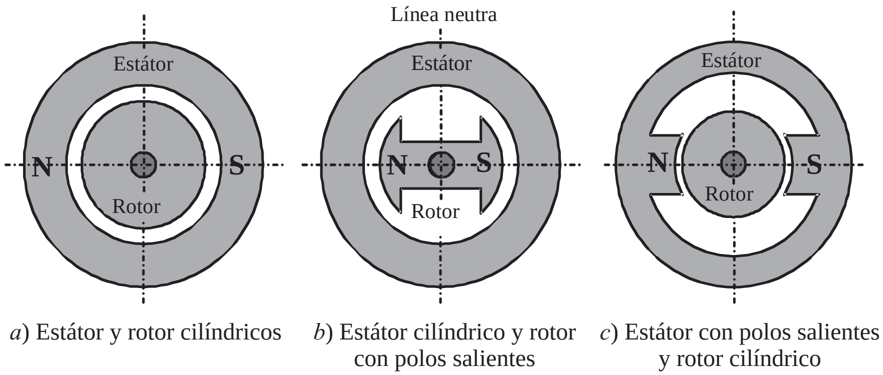


Figura 2.5. Configuraciones básicas de estátor-rotor.

magnético que puede asimilarse al que produce un imán permanente. La disposición indicada en la Figura 2.5*b* es la empleada en las máquinas síncronas y la de la Figura 2.5*c* se utiliza en las máquinas de c.c.

Todos los esquemas de la Figura 2.5 presentan un circuito magnético que forma dos polos; se dice entonces que la máquina es bipolar. La máquina mostrada en la Figura 2.6*a* es también bipolar, pero existen máquinas con un número superior de polos, denominadas multipolares, donde los polos N y S se suceden de una forma alternativa; por ejemplo, en la Figura 2.6*b* se muestra una máquina tetrapolar. La línea media entre un polo y el siguiente se denomina **línea neutra**, y la distancia entre dos polos consecutivos se denomina **paso polar**. En una máquina bipolar, por ejemplo la de la Figura 2.6*a*, se produce un ciclo completo magnético en una vuelta completa del rotor; sin embargo, para una máquina multipolar con p pares de polos, en una revolución completa del rotor se recorren p ciclos magnéticos completos; por ej., para la máquina representada en la Figura 2.6*b*, se tiene $p = 2$ (es decir, 4 polos), y una revolución del rotor corresponde a **dos** ciclos magnéticos. Como quiera que una revolución del rotor corresponde a un **ángulo geométrico** de 360°, y un ciclo magnético corresponde a un recorrido de 360° magnéticos, se concluye que para una máquina de p pares de polos un ángulo geométrico α corresponde a un **ángulo magnético** θ dado por la siguiente igualdad:

$$\theta = p \cdot \alpha \tag{2.1}$$

La expresión anterior es muy importante en el estudio de las máquinas eléctricas ya que permite relacionar los ángulos geométricos medidos por un observador con los grados magnéticos que efectivamente vé la máquina. Por ejemplo, para la máquina bipolar ($p = 1$) de la Figura 2.6*a*, el ángulo geométrico entre los polos N y S es de 180° que corresponde a medio ciclo magnético, es decir a 180° magnéticos, sin embargo para la máquina tetrapolar ($p = 2$) de la Figura 2.6*b*, el ángulo geométrico entre dos polos N y S consecutivos es de 90°, que corresponde a medio ciclo magnético, es decir, a 180° magnéticos. En lo sucesivo, si no existe una indicación especial, expresaremos los ángulos sólo en grados magnéticos, también llamados **grados eléctricos**, ya que las f.e.m.s. inducidas en las bobinas dependen de la variación entre posiciones magnéticas.

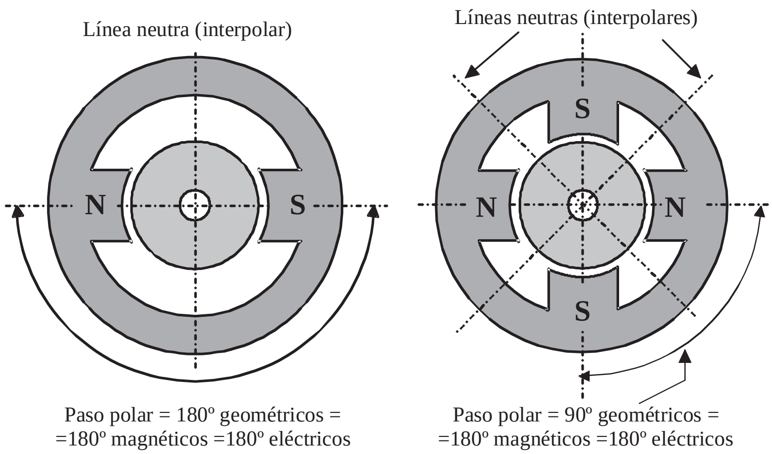


Figura 2.6. Máquinas bipolares y tetrapolares. Ángulos geométricos y eléctricos.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

¿Por qué las máquinas eléctricas utilizan material de hierro para la conversión de energía electromecánica? *La respuesta a esta simple pregunta no suele ser razonada adecuadamente por los estudiantes. En primer lugar, es evidente que para conseguir altas f.e.m.s inducidas en los devanados de las máquinas eléctricas conviene, de acuerdo con la ley de Faraday, tener grandes flujos magnéticos en los entrehierros de las máquinas eléctricas (y por supuesto deben variar además con respecto al tiempo), lo que se consigue utilizando devanados inductores de cobre alimentados por c.c. o c.a, ya que con corrientes relativamente reducidas que circulen por estos arrollamientos (es decir con un pequeño campo magnético H aplicado) se pueden conseguir grandes inducciones B en los entrehierros, debido a la alta permeabilidad relativa de los materiales ferromagnéticos.*

Por otro lado, los entrehierros de las máquinas eléctricas almacenan la energía de campo magnético procedente de las corrientes que circulan por sus devanados inductor e inducido. La densidad de energía magnética almacenada en el entrehierro (energía por unidad de volumen) tiene un valor $B^2/2\mu_0$ *y como las inducciones en el aire del entrehierro suelen ser del orden de 1 tesla, la densidad de energía magnética almacenada correspondiente es por ello de* 4.10^5 *J/m*^{3}*. Para hacerse una idea de lo que representa el valor anterior, se puede comparar con la densidad de energía eléctrica almacenada por una máquina electrostática que responde a la expresión* $\varepsilon_0 E^2/2$ *y teniendo en cuenta que la rigidez dieléctrica del aire es del orden de* 3.10^6*V/m (que representa el máximo campo eléctrico posible en el aire sin que se produzca disrupción en el mismo), la densidad de energía electrostática correspondiente sería del orden de 40 J/m*^{3}*. Es decir, de estos simples cálculos se deduce que la densidad de energía magnética es 10.000 veces superior a la densidad de energía electrostática y de ahí la justificación de construir máquinas electromagnéticas y no electrostáticas.*

Nota adicional: *Debe señalarse que los sistemas hidroneumáticos manejan fluidos con presiones máximas del orden de 300 bares (1 bar =* 10^5 *N/m*^{2}*) que corresponde a una densidad de energía (igual a la presión) del orden de* 3.10^7*J/m*^{3}*, es decir 75 veces superiores a los sistemas electromagnéticos. Es por ello que en el proceso productivo industrial se utilizan muy a menudo sistemas oleohidráulicos para el accionamiento de muchas máquinas y en especial las empleadas en obras civiles que requieren accionamientos que deben desarrollar fuerzas muy elevadas. Otros aspectos complementarios como por ejemplo los relativos a la respuesta en el dominio de la frecuencia hacen que en la práctica se utilicen unos u otros sistemas; por ejemplo los sistemas mecánicos tienen una frecuencia máxima de actuación del orden de 100Hz sin embargo los sistemas magnéticos alcanzan 50 kHz y los electrostáticos llegan a 1 MHz.*

2.3. COLECTOR DE DELGAS Y COLECTOR DE ANILLOS

Se ha indicado en el apartado anterior que una máquina eléctrica rotativa está formada por dos partes denominadas estátor y rotor, que llevan unos devanados que reciben los nombres de inductor e inducido. Para introducir o sacar corrientes de los bobinados situados en el estátor de la máquina basta con hacer unas conexiones fijas directas desde el sistema exterior a estos devanados; sin embargo, para realizar esta operación con las bobinas del rotor es preciso recurrir a sistemas **colectores**, que difieren entre sí, según sea la máquina de c.a. o de c.c.

Para ver el funcionamiento de estos colectores se va a considerar el estudio de un generador elemental, constituido por un imán en el estátor, que hace de inductor, y una espira en el rotor, que hace de inducido. Consideremos el esquema de la Figura 2.7, donde una espira gira a una velocidad Ω rad/s dentro del campo magnético **B** de un imán permanente. Los extremos

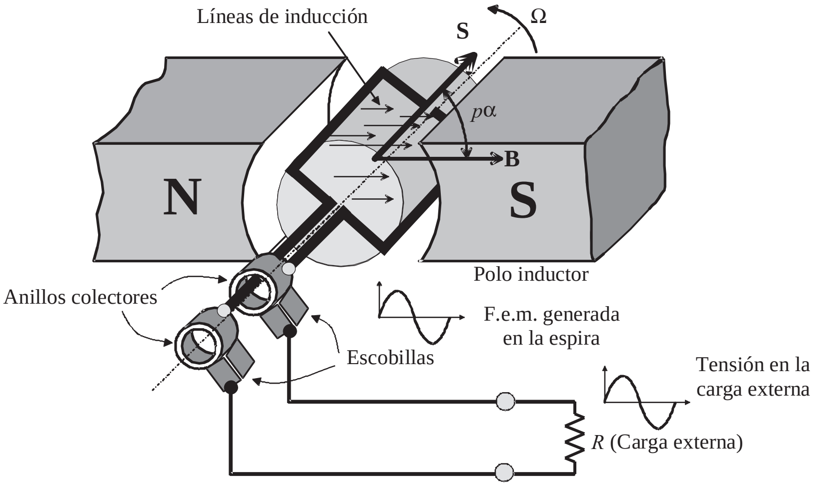


Figura 2.7. Colector de anillos.

de la espira van a parar a dos **anillos** de bronce sobre los que rozan unas **escobillas** de grafito, a las cuales se conecta el circuito exterior, compuesto por un receptor de energía, simulado por una resistencia de carga R. Los vectores **B**, inducción magnética, y **S**, superficie de la espira, forman en un momento determinado un ángulo eléctrico $p\alpha$, siendo p el número de pares de polos de la máquina y α el ángulo geométrico correspondiente. De acuerdo con la ley de Faraday, la f.e.m. inducida en la espira al girar dentro del campo magnético del imán será:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ S \cos p\alpha) \tag{2.2}$$

teniendo en cuenta que se cumple:

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = 2\pi\,\frac{n}{60} \tag{2.3}$$

donde n indica el número de r.p.m. de la espira, y tomando como referencia $p\alpha = 0$ en $t = 0$, se obtendrá la siguiente f.e.m. en el inducido:

$$e = B\ S\ p\Omega\ sen\ p\Omega t \tag{2.4}$$

que al comparar con la expresión general de una f.e.m. alterna de pulsación $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia en Hz, expresada por:

$$e = E_m \text{ sen } \omega t \tag{2.5}$$

se deduce que la relación entre las r.p.m. de la máquina y la frecuencia de la f.e.m. alterna obtenida es:

$$\omega = 2\pi f = p\Omega = p2\pi\,\frac{n}{60} \tag{2.6}$$

es decir:

$$f = \frac{np}{60} \tag{2.7}$$

En consecuencia, en la espira se obtiene una f.e.m. alterna, cuya frecuencia es proporcional a la velocidad de giro y al número de pares de polos de la máquina. Por otra parte, al estar

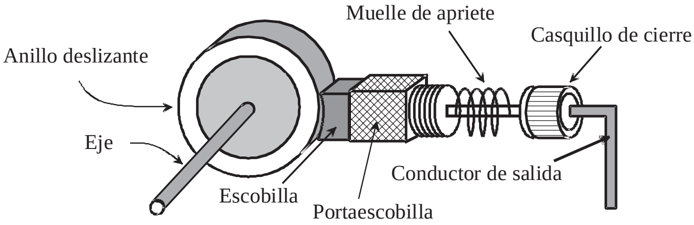


Figura 2.8. Anillo deslizante y escobilla.

las escobillas rozando los anillos colectores, **se consigue que la corriente que circula por el circuito exterior sea de la misma forma que la que se obtiene en la espira del inducido**. Para evitar falsos contactos, existe un muelle que presiona ligeramente la escobilla a la superficie cilíndrica del anillo, como se observa en la Figura 2.8. Las escobillas se hacen modernamente con grafito electrolítico, aunque a veces son metalografíticas; la elección de este elemento se debe a su ventaja de poseer buena conductividad eléctrica a la par de no desgastar excesivamente los anillos.

Existe otra forma de enviar la f.e.m. inducida en la espira a un circuito exterior, y es emplear el llamado colector de delgas, cuyo funcionamiento, en el caso más elemental, se puede explicar con ayuda del esquema de la Figura 2.9. Se observa que ahora los extremos de la espira van a parar a un anillo formado por dos segmentos de cobre, denominados **delgas**, aislados entre sí y del eje de la máquina por medio de un cilindro de mica. Sobre las delgas van colocadas unas escobillas, fijas en el espacio, a las cuales se conecta el circuito exterior. La misión del colector de delgas es obligar a que la corriente que atraviesa el circuito exterior circule siempre en el mismo sentido, de tal forma que aunque la f.e.m. inducida en la espira sea sinusoidal (c.a.), y como ya se ha demostrado en el caso anterior, la corriente que atraviesa el circuito sea unidireccional; esta operación se denomina **rectificación**, y se realiza de una forma automática con el colector de delgas. La posición de las escobillas no es indiferente, ya que para rectificar totalmente la c.a. del inducido es necesario colocar las escobillas tal como

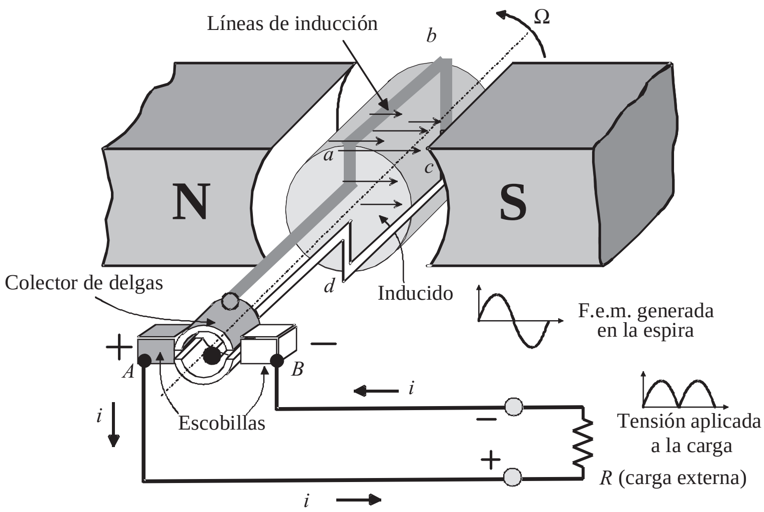


Figura 2.9. Colector de dos delgas.

muestra la Figura 2.9, es decir, de tal modo que la f.e.m. inducida en la espira sea igual a cero en el momento en el que la escobilla pasa de una delga a la otra. Para ver más claramente el proceso de rectificación, en la Figura 2.10 se ha representado una revolución completa de la espira, habiéndose sustituido la resistencia *R* del circuito de la Figura 2.9 por un milivoltímetro con el cero en el centro, para hacer más patente la polaridad de la tensión resultante entre las escobillas de la máquina.

En la parte inferior de la Figura 2.10 se ha representado la tensión correspondiente en cada instante de tiempo. Para comprender la forma de esta onda generada, debe suponerse que la inducción producida por el imán se distribuye de forma sinusoidal en el entrehierro de la máquina, es decir, *la inducción es máxima debajo de cada polo y nula en la zona de la línea neutra.* La f.e.m. inducida en la espira viene expresada por la ley de Faraday y es una f.e.m. de movimiento:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_{\gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\, d\mathbf{l} \tag{2.8}$$

En el caso de la Figura 2.10, en el instante t_1, el plano de la espira es vertical, por lo que el flujo magnético es máximo y en consecuencia la f.e.m. inducida es nula, lo que está de acuerdo con (2.2), que es en definitiva la parte izquierda de (2.8). Al mismo resultado se llega analizando el término integral de (2.8); en este caso en los tramos *ab* y *cd* de la espira se inducen unas f.e.m.s. nulas, ya que en esta situación las inducciones en *ambas ramas* de la espira son nulas por estar situadas en la línea neutra, y en consecuencia el voltímetro de la Figura 2.10*a* señalará cero voltios. Al pasar la espira desde el instante t_1 al instante t_2, la f.e.m. inducida irá aumentando progresivamente, ya que va elevándose la inducción en las ramas de la espira, al acercarse las mismas al centro de los polos. De hecho, en el instante t_2 la f.e.m. inducida será máxima ya que corresponde a la máxima inducción en las ramas de la espira, la f.e.m. en la parte oscura de la espira se dirigirá de *b* a *a*, en el sentido atrás-adelante, que es el sentido del producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que aparece en (2.8), mientras que en la parte clara de la espira la f.e.m. inducida irá de *d* a *c*, sentido adelante-atrás, y de ahí el sentido de la desviación que aparece en el voltímetro de

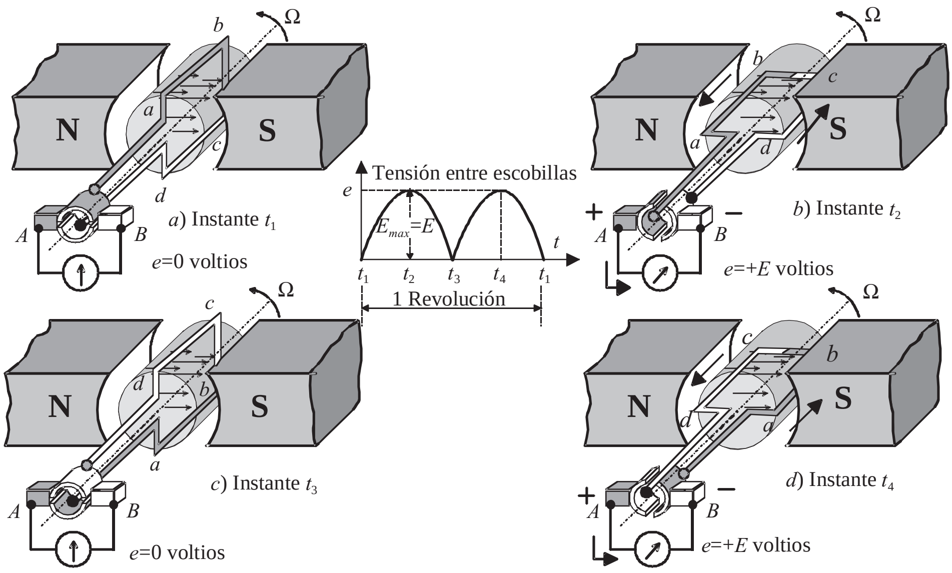


Figura 2.10. Funcionamiento del colector de delgas y tensión obtenida entre escobillas.

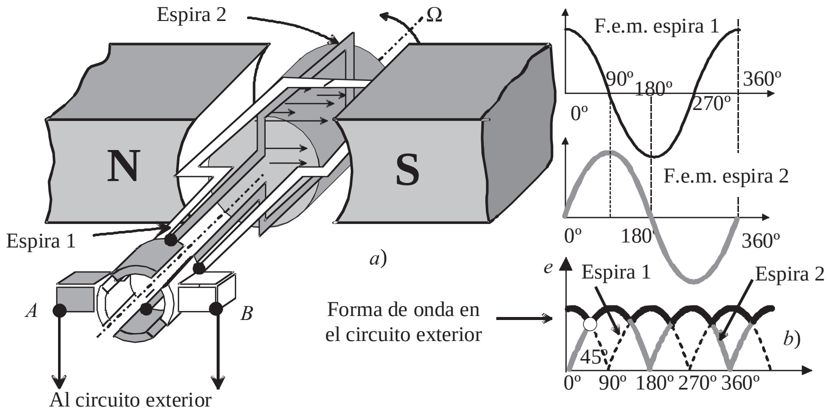


Figura 2.11. Inducido con dos bobinas y colector con cuatro delgas.

la Figura 2.10 en el instante t_2, que se dirige de la escobilla negra a la escobilla blanca. Como quiera que al moverse la espira, la escobilla *negra*/blanca siempre hace contacto con el conductor que se encuentra bajo el polo *norte*/sur, la polaridad de la escobilla *negra*/blanca será siempre *positiva*/negativa, por lo que la corriente se dirigirá siempre en el circuito exterior desde la escobilla *negra* a la escobilla *blanca*, lo que significa que la tensión de salida tiene carácter unidireccional. De este modo con un colector de delgas **se consigue que la forma de onda que se obtiene en el circuito exterior sea diferente a la forma de onda que existe en el inducido**. En particular, una señal de c.a. en el inducido se transforma en unidireccional (c.c.) en el circuito exterior.

En la práctica, para obtener una c.c. que tenga menos rizado (menor oscilación) se aumenta el número de delgas del colector, con más bobinas en el inducido. En la Figura 2.11*a* se muestra un colector con cuatro delgas y dos bobinas, observándose en la Figura 2.11*b* que la forma de onda que se obtiene posee menos variación, y se acerca más a una c.c. menos oscilatoria (es decir con menor rizado).

En las máquinas reales, con el fin de que las ondulaciones de la f.e.m. se reduzcan aún más y de que la d.d.p. entre las delgas no llegue a ser tan alta que produzca chispas en el colector, se procura que el número de delgas sea relativamente grande. En la Figura 2.12 se

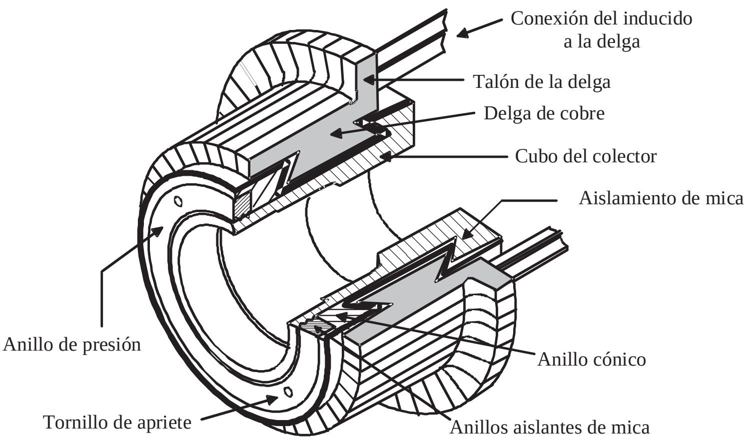


Figura 2.12. Perspectiva y sección de un colector de delgas.

muestra un colector de delgas, también llamado **conmutador**. Las delgas son de cobre endurecido a las que se da una forma adecuada para ser montadas en una estructura circular. Cada delga va soldada y remachada con un conductor vertical o talón para que sirva de pieza de contacto con la bobina correspondiente. El remache asegura la resistencia mecánica suficiente para la conexión y la soldadura mantiene un buen contacto eléctrico. Para evitar que las delgas puedan salirse del colector por la fuerza centrífuga, se construyen en forma de **cola de milano**. Las delgas van aisladas entre sí por separadores de mica y también están aisladas del cilindro soporte por láminas del mismo dieléctrico.

2.4. DEVANADOS

Se denominan devanados de una máquina eléctrica a los arrollamientos del inductor y del inducido. El material para la realización de las bobinas suele ser el cobre en forma de hilo esmaltado (la misión del aislante es ofrecer una separación eléctrica entre las espiras) en las máquinas pequeñas y en forma de pletina para las máquinas de gran potencia, cuyo aislamiento se realiza recubriéndolas con cinta de algodón. También se emplea el aluminio, pero su aplicación es casi exclusiva de los rotores en jaula de ardilla de los motores asíncronos. Los inductores de las máquinas síncronas y de las máquinas de c.c. se ejecutan en forma de arrollamiento **concentrado**, devanando una bobina alrededor de los polos tal como se señala en la Figura 2.13. Este sistema se emplea también en los transformadores, pero con detalles más específicos que se explicarán en el Capítulo 3.

Los inducidos de las máquinas de c.a. y c.c. se ejecutan en forma de arrollamientos **distribuidos** para cubrir toda la periferia de la máquina, situando las bobinas en las ranuras practicadas al efecto. En los albores de la electricidad estos arrollamientos se ejecutaban en forma de **devanado en anillo**, ejemplo de lo cual fue la célebre dinamo de Gramme (Fig. 2.14*a*), donde se arrollaba el hilo sobre un anillo cilíndrico recorriendo la periferia del inducido. El defecto de este tipo de bobinado es que sólo se aprovechan los conductores de la periferia exterior para producir f.e.m., ya que los conductores internos no son atravesados por ninguna inducción, debido a que el campo magnético después de saltar el entrehierro se encauza por dentro del anillo ferromagnético, antes de seguir recto, cruzando el cilindro interior del anillo, que presenta mayor reluctancia magnética. Hoy día solamente se emplean los **devanados en tambor**, donde la totalidad de los conductores están colocados en la superficie exterior del cilindro ferromagnético que forma el inducido.

En la Figura 2.14*b* se muestra un ejemplo de este tipo de bobinado aplicado a un inducido de una máquina de c.c.; se observa en este devanado que, exceptuando las dos partes frontales,

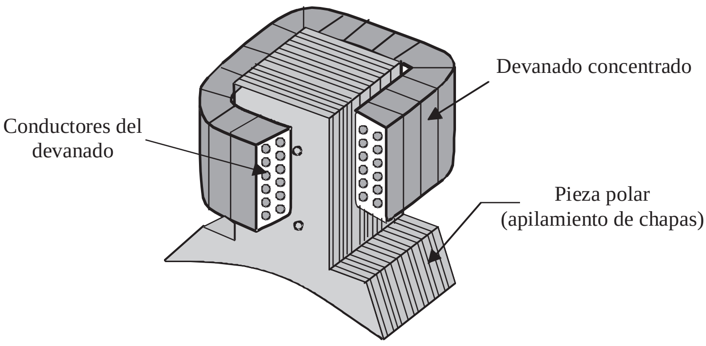
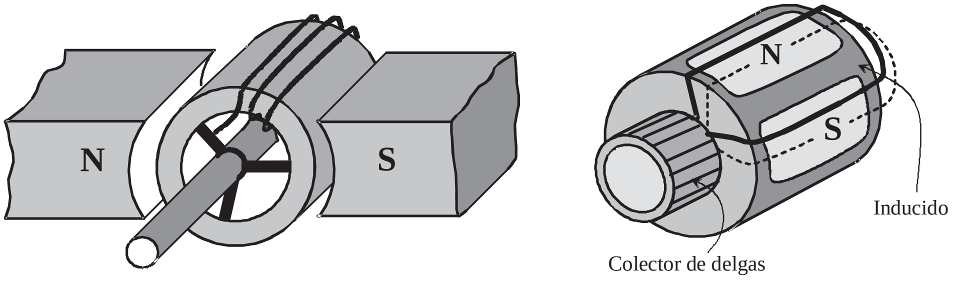


Figura 2.13. Perspectiva y sección del devanado concentrado de un polo.



a) Devanado en anillo *b*) Devanado en tambor

Figura 2.14. Tipos de inducidos.

todo el cobre del inducido es **activo**, es decir, corta o es atravesado por la inducción y actúa, por lo tanto, como generador de f.e.m. Normalmente las bobinas que forman el devanado suelen construirse fuera de la máquina, y posteriormente son encintadas antes de colocarlas en las ranuras correspondientes, con lo que se consigue una gran rapidez en la formación del inducido.

Dependiendo del número de ramas de bobina existente en una ranura, los devanados se clasifican en arrollamientos de una capa y de dos capas. En el arrollamiento de una capa, en cada ranura se sitúa un solo lado de bobina, mientras que en el de dos capas se sitúan dos lados de bobina por ranura; en este último caso, un lado de la bobina está colocado en la parte superior de una ranura y el otro lado se sitúa en la parte inferior de la otra. Los devanados pueden ser **abiertos** o **cerrados**; los devanados abiertos tienen un principio y un final y se emplean en las máquinas de c.a.; los devanados cerrados no tienen ni principio ni fin, y para sacar la corriente al exterior deben hacerse tomas intermedias (por medio de delgas), y este tipo de devanado es el que se emplea en las máquinas de c.c.

Desde el punto de vista de la forma de las bobinas, los devanados pueden clasificarse en **concéntricos** y **excéntricos** (empleados en c.a.), y también en **ondulados** e **imbricados** (empleados en c.c.). Los devanados concéntricos están formados por bobinas de diferente anchura o paso, que tienen un eje común; un ejemplo de ellos se muestra en la Figura 2.15*a*. Los

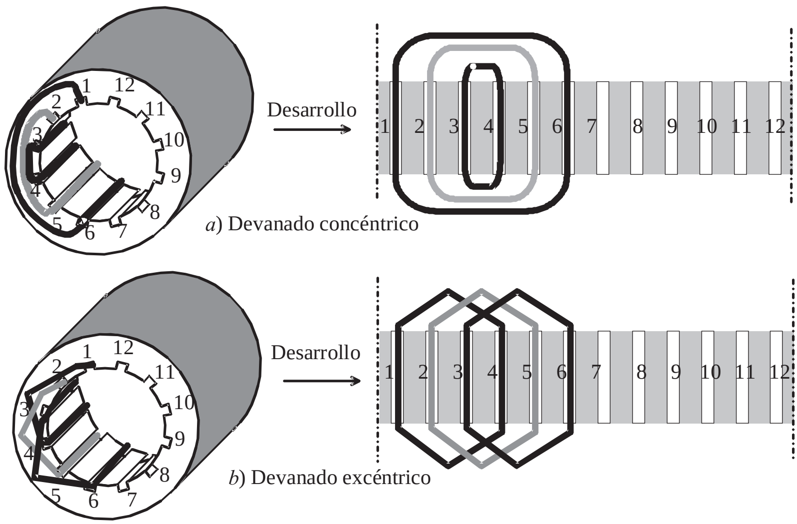


Figura 2.15. Devanados concéntricos y excéntricos.

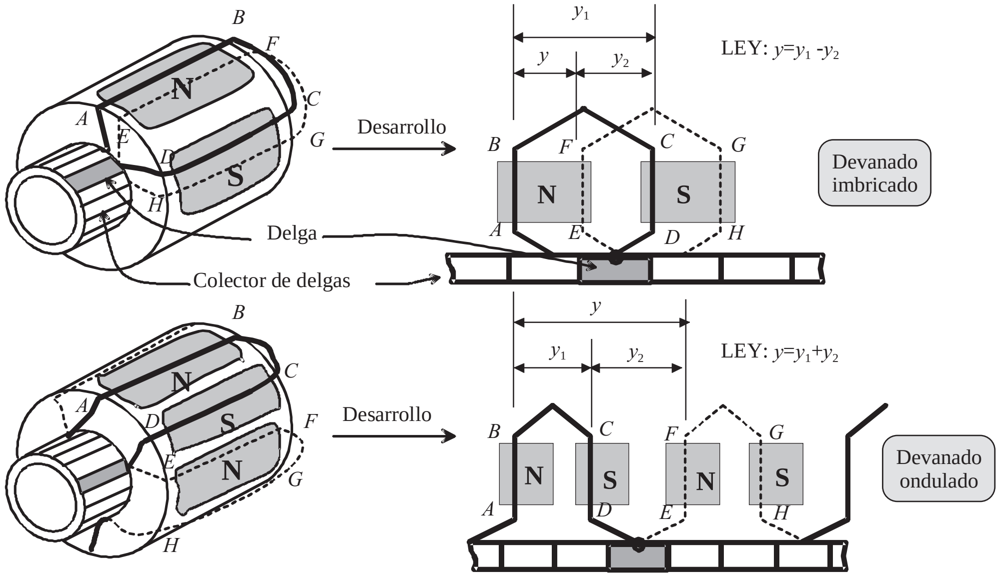


Figura 2.16. Devanado imbricado (arriba) Devanado ondulado (abajo)

devanados excéntricos están constituidos por bobinas de igual paso pero desfasadas entre sí en el espacio, como se indica en la Figura 2.15*b*.

Los devanados imbricados son análogos en la forma a los excéntricos y se emplean en las máquinas de c.c., haciéndose derivaciones al colector de delgas como indica la Figura 2.16*a*. Los devanados ondulados se caracterizan porque al bobinar se va recorriendo el inducido y en consecuencia el colector, formando las ramas de las bobinas una figura de onda como se indica en la Figura 2.16*b*. El estudio de la teoría de los bobinados no se dará en este libro, porque pertenece más a una asignatura de Cálculo y Construcción de Máquinas Eléctricas; sin embargo, como normas básicas se pueden citar los dos principios generales siguientes: *a) la anchura (paso) de cada bobina debe hacerse lo más cercana a un paso polar con objeto de que los dos lados de la bobina queden frente a dos polos adyacentes N y S, para obtener así la máxima f.e.m. inducida en cada una de las bobinas y aprovechar de este modo lo más posible el cobre del arrollamiento; b) en los devanados de los generadores de c.a. es conveniente que el arrollamiento se prevea para que genere una f.e.m. sinusoidal exenta lo más posible de armónicos, y para ello es preciso distribuir el devanado en las ranuras y emplear acortamientos de paso en las bobinas.*

2.5. PÉRDIDAS Y CALENTAMIENTO

En la transformación electromecánica de la energía que tiene lugar en una máquina eléctrica, una fracción de la potencia transformada se convierte en calor y prácticamente no se utiliza, constituyendo el conjunto las llamadas **pérdidas de la máquina**. Desde el punto de vista físico, una máquina tiene un circuito eléctrico, constituido por los devanados del inductor e inducido, donde se producen unas **pérdidas por efecto Joule**, llamadas vulgarmente **pérdidas en el cobre**, por ser éste el material que suele utilizarse para la fabricación de los bobina-

dos (aunque también puede ser el aluminio); por otra parte, los arrollamientos se colocan en una estructura magnética, realizada con chapas de acero al silicio que ofrecen, debido a los campos magnéticos variables, unas pérdidas denominadas **pérdidas en el hierro**; como quiera que además la máquina ofrece un acceso mecánico, aparecen en él unas **pérdidas mecánicas** debidas a los rozamientos o fricciones de las diversas partes del sistema.

El estudio de estas pérdidas es de gran interés, porque influyen sobre dos magnitudes muy importantes en la explotación: el rendimiento y el calentamiento de una máquina eléctrica. Vamos a analizar en consecuencia y más detalladamente cada una de estas pérdidas:

a) Pérdidas en el cobre

Son consecuencia de la inevitable resistencia que presentan los conductores eléctricos, dando lugar a una pérdida en forma de calor por efecto de Joule. En términos generales responden a la ecuación:

$$P_{cu} = \sum R_j i_j^2 \tag{2.9}$$

en donde R_j e i_j representan, respectivamente, la resistencia y corriente que corresponden al devanado j, ya sea del inductor o del inducido. Denominando ρ_j a la resistividad de los conductores, l_j a su longitud y s_j a su sección transversal; sustituyendo en (2.9) la resistencia por su valor $\rho_j l_j / s_j$ resulta:

$$P_{cu} = \sum \rho_j \left(\frac{l_j}{s_j}\right) i_j^2 = \sum \rho_j l_j \left(\frac{i_j}{s_j}\right)^2 s_j \tag{2.10}$$

llamando J_j a la densidad de la corriente, es decir, al cociente: i_j/s_j y al ser el volumen del cobre igual a $l_j s_j$ se obtiene:

$$P_{cu} = \sum \rho \cdot J_j^2 \cdot (\text{volumen}) \tag{2.11}$$

que expresa las pérdidas en el cobre en función de la resistividad, densidad de corriente y volumen del bobinado empleado. Se observa que las pérdidas son proporcionales al volumen del material y a la densidad de corriente que circula por los conductores, y esta densidad suele tomar un valor que varía entre 5 A/mm^2 para las máquinas pequeñas a 3 A/mm^2 en las máquinas grandes.

b) Pérdidas en el hierro

Se producen en todos los órganos de las máquinas que son recorridos por flujos variables. Como ya se ha estudiado en el capítulo anterior, se componen a su vez de las pérdidas por histéresis y las pérdidas por corrientes de Foucault (parásitas), y de acuerdo con (1.72) se tiene:

$$P_{Fe} = P_H + P_F = (k_H f B_m^{\alpha} + k_F f^2 B_m^2 a^2 \sigma) \cdot vol \tag{2.12}$$

siendo k_H y k_F constantes; f, la frecuencia; B_m, la inducción máxima; a, el espesor de las chapas magnéticas; σ, la conductividad de las mismas; α, un parámetro, y *vol*, el volumen de hierro. Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, la forma de reducir estas pérdidas es emplear núcleos magnéticos de acero al silicio en forma de chapas; esto disminuye el valor de las pérdidas por histéresis (ya que el ciclo se hace más estrecho) y reduce las pérdidas por corriente de Foucault debido a la adición de silicio y a aislar las chapas entre sí. La laminación puede hacerse en caliente o en frío (granos orientados), resultando unas pérdidas del orden de 0,8 a 1,3 W/kg a 1 Tesla para las chapas ordinarias (laminadas en caliente) y de 0,4

a 0,5 W/kg a 1 Tesla para las de grano orientado. Estas pérdidas se transforman en calor en la masa de hierro.

c) Pérdidas mecánicas

Son debidas a los rozamientos de los cojinetes, a la fricción de las escobillas y a la ventilación (rozamiento con el aire). Como es lógico estas pérdidas sólo existen en las máquinas que disponen de un órgano giratorio. Las pérdidas por rozamiento y fricción son directamente proporcionales a la velocidad, mientras que las pérdidas por ventilación se consideran proporcionales a la tercera potencia de la velocidad. En consecuencia:

$$P_m = A\,n + B\,n^3 \qquad (2.13)$$

La clasificación anterior se ha realizado teniendo en cuenta el lugar donde se producen las pérdidas, pero también puede realizarse teniendo en cuenta la forma en que varían las mismas y así se tienen: *a*) Pérdidas fijas: P_f; *b*) Pérdidas variables: P_V.

Las pérdidas fijas son aquellas que no varían aunque cambie la potencia absorbida o cedida por la máquina. A este respecto se observa que las pérdidas mecánicas, según se ha comentado en los párrafos anteriores, sólo dependen de la velocidad, y como quiera que la mayor parte de las máquinas tienen velocidad constante o sensiblemente constante, se podrán considerar estas pérdidas como constantes. También pueden suponerse fijas las pérdidas en el hierro, ya que las máquinas suelen trabajar con unos valores de B y f constantes y de acuerdo con (2.12) implicarán unas pérdidas constantes. Las pérdidas variables son aquellas que varían según sea la potencia que absorbe o cede la máquina; como quiera que una variación de potencia supone un cambio correspondiente en la corriente (la tensión de una máquina es sensiblemente constante), aparecerá una variación también en las pérdidas por efecto Joule en los devanados.

De los párrafos anteriores se deducen las siguientes igualdades:

$$P_f = P_{Fe} + P_m \quad ; \quad P_V = P_{cu} \qquad (2.14\ )$$

es decir, las pérdidas fijas están constituidas por las pérdidas en el hierro y mecánicas, mientras que las pérdidas variables son debidas al efecto Joule en el cobre.

Todas las pérdidas anteriores son transformadas en calor. Este calor se transmite en parte al ambiente, por radiación y convección, y es absorbido en parte por la estructura de la máquina, elevando su temperatura, elevación que está en relación con su calor específico. Cuando esta temperatura alcanza un determinado valor para el cual la cantidad de calor producida, correspondiente a las pérdidas, se iguala con la cantidad de calor cedida al ambiente, la temperatura permanece constante. Se dice entonces que la máquina ha alcanzado la **temperatura de régimen**.

La temperatura de régimen es una magnitud de gran importancia, ya que mediante la misma se puede determinar si los materiales aislantes con los que está construida la máquina van a trabajar correctamente. En efecto, los aislantes, constituidos en su gran parte por materiales orgánicos, se carbonizan a una determinada temperatura, perdiendo su cualidad de tales; también a temperaturas inferiores sufren un deterioro, siendo éste tanto más rápido cuanto más elevada sea la temperatura a la que están sometidos. Es evidente que al degenerar la función aislante de estos materiales, la máquina no trabaje en buenas condiciones y acabe averiándose al producirse cortocircuitos entre espiras o defectos a tierra. Existe una regla aproximada pero muy ilustrativa, llamada de **Montsinger**, debida a V. M. Montsinger, ingeniero de la *General Electric*, quien en 1930, tras un estudio exhaustivo de nueve años

sobre aislantes de transformadores, proporcionó una fórmula empírica conocida como la ley de los 10 °C, lo que significa *que para cada incremento de 10 °C de temperatura sobre el máximo recomendado, la vida del aislante se reducía a la mitad, e inversamente, una disminución de 10 °C doblaría su vida*. Debido a esto, se han establecido normas que especifican aquellas temperaturas máximas que no se deben sobrepasar en los devanados y en las diferentes partes de una máquina; más concretamente, en España las Normas UNE 21-305, UNE EN 60034-1:2005 y CEI-85 (1984) fijan una temperatura ambiente convencional y determinan la máxima temperatura que pueden soportar los aislantes, y en función de ésta se clasifican en:

1. **AISLAMIENTO CLASE A**. *Son aislamientos constituidos por materiales fibrosos a base de celulosa o seda, impregnados con líquidos aislantes; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 105 °C.*
2. **AISLAMIENTO CLASE E**. *Son aislamientos a base de fibras orgánicas sintéticas; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 120 °C.*
3. **AISLAMIENTO CLASE B**. *Son aislamientos formados por materiales a base de poliéster y poliimidos aglutinados con materiales orgánicos o impregnados con éstos; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 130 °C.*
4. **AISLAMIENTO CLASE F**. *Son aislamientos formados por materiales a base de fibra de mica, amianto y fibra de vidrio aglutinados con materiales sintéticos, como siliconas, poliésteres o epóxidos; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 155 °C.*
5. **AISLAMIENTO CLASE H**. *Son aislamientos formados por materiales a base de mica, amianto o fibra de vidrio aglutinados con siliconas de alta estabilidad térmica; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 180 °C.*
6. **AISLAMIENTO CLASE 200**. *Son aislamientos formados por materiales a base de mica, vidrio, cerámica, etc.; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 200 °C.*
7. **AISLAMIENTO CLASE 220**. *Son aislamientos formados por materiales a base de mica, vidrio, cerámica, etc., poliimidas tipo Kapton; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 220 °C.*
8. **AISLAMIENTO CLASE 250**. *Son aislamientos formados por materiales a base de mica, vidrio, cerámica, etc., poliimidas tipo Kapton; la temperatura máxima que en ningún caso debe sobrepasarse en este tipo de aislantes es de 250 °C.*

La temperatura ambiente del fluido refrigerante se toma, de acuerdo con la misma Norma, como 40 °C (para menos de 1.000 m de altitud)*. En consecuencia, los **calentamientos** (elevación de temperatura respecto de la ambiente) admisibles para los aislantes anteriores serán:

- Clase A: 65 °C; Clase E: 80 °C; Clase B: 90 °C; Clase F: 115 °C; Clase H: 140 °C.
- Clase 200: 160 °C; Clase 220: 180 °C; Clase 250: 210 °C.

---

* A grandes alturas la evacuación del calor de la máquina disminuye por ser menor la densidad del aire. Los datos expuestos se refieren a altitudes inferiores a 1.000 m. Para altitudes superiores se deben consultar las Normas (se establecen reducciones en los calentamientos que oscilan entre un 2 y un 5 por 100 por cada 500 m que sobrepasen los 1.000 m).

Amplíe sus conocimientos

Calentamiento y enfriamiento de las máquinas eléctricas

Se puede realizar un estudio generalizado del calentamiento de una máquina eléctrica suponiendo que es un cuerpo homogéneo e isótropo ideal, en el que se produce una cantidad de calor Q (medida en julios) que depende de la potencia perdida en la máquina P_p, de tal modo que en un diferencial de tiempo dt se tiene una energía calorífica:

$$\text{Calor} = dQ = P_p\, dt \tag{1}$$

esta energía calorífica provoca una elevación de temperatura de la máquina respecto a la temperatura ambiente. Si se denomina θ_t a la temperatura que adquiere la máquina y θ_a la temperatura ambiente, se denomina sobreelevación de temperatura θ_a:

$$\theta = \theta_t - \theta_a \tag{2}$$

Si M es la masa total de la máquina, c_e su calor específico y $d\theta$ el incremento de temperatura producido en la máquina en un dt, el calor almacenado por la máquina y que eleva su temperatura tiene un valor:

$$dQ_1 = Mc_e\, d\theta \tag{3}$$

Por otra parte, existe un calor emitido por la superficie exterior de la máquina S que depende del coeficiente de emisividad k del material, de la sobreelevación de temperatura $d\theta$ y del diferencial de tiempo dt, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$dQ_2 = kS\theta\, dt \tag{4}$$

de este modo la ecuación diferencial de calentamiento de la máquina viene expresada por:

$$P_p\, dt = Mc_e\, d\theta + kS\theta\, dt \tag{5}$$

Cuando se alcanza un estado de equilibrio o de régimen, la sobreelevación de temperatura alcanza su valor final $\theta_{\text{máx}}$ y no existe variación de la temperatura del cuerpo y todo el calor producido debido a las pérdidas en la máquina eléctrica se emite por la superficie externa, lo que equivale a decir que la ecuación (5) se convierte en:

$$P_p\, dt = kS\theta_{\text{máx}}\, dt \tag{6}$$

de donde se deduce la sobreelevación máxima de la temperatura que alcanza la máquina:

$$\theta_{\text{máx}} = \frac{P_p}{kS} \tag{7}$$

Si ahora en la ecuación (5) se divide cada término por kS se obtiene:

$$\frac{P_p}{kS}\, dt = \frac{Mc_e}{kS}\, d\theta + \theta\, dt \tag{8}$$

denominando *constante de tiempo térmica* T al cociente:

$$T = \frac{Mc_e}{kS} \tag{9}$$

Al sustituir (7) y (9) en (8) resulta:

$$\theta_{\text{máx}}\, dt = T\, d\theta + \theta\, dt \tag{10}$$

es decir:

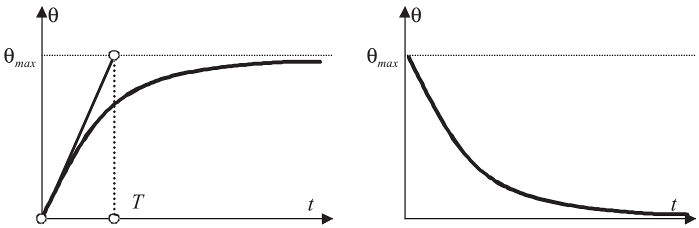
$$T = \frac{d\theta}{\theta_{\text{máx}} - \theta} \tag{11}$$

ecuación diferencial que al integrar da como resultado:

$$\theta = \theta_{\text{máx}}(1 - e^{-t/T}) \tag{12}$$

En la Figura 2.17*a* se representa la ecuación anterior, y que muestra la evolución de la sobreelevación de temperatura con el tiempo. Obsérvese en esta figura que la constante de tiempo T es el tiempo necesario para llevar la máquina hasta la temperatura máxima si no se refrigera, es decir si todo el calor provocado por las pérdidas se invirtiera en incrementar la temperatura. Para comprobarlo téngase en cuenta de acuerdo con (7) y (9) que se puede escribir:

$$T = \frac{Mc_e}{kS} = \frac{Mc_e\theta_{\text{máx}}}{P_p} \tag{13}$$



a) Curva de calentamiento *b*) Curva de enfriamiento

Figura 2.17. Curvas de calentamiento y enfriamiento.

El valor de la constante de tiempo térmica varía entre 30 minutos para las máquinas más pequeñas hasta dos o tres horas para las máquinas de gran potencia. Por otra parte, si una vez que la máquina ha alcanzado la temperatura de régimen, representada por la sobreelevación de temperatura $\theta_{\text{máx}}$, se para la máquina, es decir se interrumpe el suministro de calor a la misma al no existir pérdidas en esas condiciones, entonces la ecuación (5) se convierte en:

$$0 = Mc_e\, d\theta + kS\theta\, dt \tag{14}$$

que se puede escribir teniendo en cuenta (9) en:

$$0 = T\, d\theta + \theta\, dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{dt}{T} \tag{15}$$

de donde se deduce:

$$\theta = \theta_{\text{máx}} e^{-t/T} \tag{16}$$

Donde se ha tenido en cuenta que para $t = 0$ se cumple $\theta = \theta_{\text{máx}}$. La ecuación (16) define la curva de enfriamiento de la máquina eléctrica y se ha representado en la Figura 2.17*b*. Cuando la máquina trabaja en régimen intermitente se producen alternativamente períodos de calentamiento y enfriamiento sucesivos.

2.6. POTENCIA ASIGNADA O NOMINAL. TIPOS DE SERVICIO

De acuerdo con la Norma UNE EN 60034-1:2005 referente a *máquinas eléctricas rotativas. Parte 1: Características asignadas y características de funcionamiento,* en su sección 2 de definiciones se señala lo siguiente:

- ***Valor asignado:*** *valor de una magnitud, asignado generalmente por un fabricante, para una condición de funcionamiento especificada de una máquina.*
- ***Potencia asignada***: *valor numérico de la potencia incluido en las características asignadas.*

Se incluyen también en esta sección de la Norma UNE otras magnitudes asignadas para máquinas rotativas, indicándose más adelante que estas magnitudes son atribuidas por el fabricante, el cual debe elegir una de las clases asignadas según el tipo de servicio, y que en muchos casos suele ser el correspondiente al tipo continuo máximo basado en el servicio S1 (servicio continuo). De este modo la potencia asignada es un valor *que señala libremente el fabricante en función de la clase de servicio a que se destine la máquina sin que se produzcan calentamientos inadmisibles para la vida de los aislantes*; por ejemplo, para un motor que vaya a funcionar en servicio continuo el fabricante le puede asignar una potencia de 11 kW, pero si va a funcionar en régimen temporal con grandes períodos de reposo puede asignarle una potencia superior como por ejemplo 15 kW, teniendo en cuenta que los calentamientos previstos van a ser menores. La Norma UNE indicada señala también que las características asignadas de una máquina eléctrica se deben marcar en la placa de características. En definitiva, ***la potencia asignada es un concepto más versátil que el antiguo de potencia nominal*** (aunque en alguna parte de este libro se tomen como sinónimos debido a que la potencia asignada se marca o *nomina* en la placa de características) y representa la potencia que puede desarrollar una máquina, cuando las restantes condiciones son las asignadas, sin que aparezcan calentamientos en sus diversos órganos que alcancen o sobrepasen las correspondientes temperaturas límites expuestas en el apartado anterior y que dependen de la clase de servicio. Se observa de esta definición que la potencia asignada está estrechamente vinculada al problema del calentamiento de sus diversas partes constitutivas y en consecuencia a los aislantes que intervienen en su elaboración. En el epígrafe 8 de la Norma UNE EN 60034-1: 2005. Parte 1 se definen además las potencias asignadas de la forma siguiente:

a) **En generadores de c.c.**: la potencia asignada es la potencia eléctrica en los bornes, y debe expresarse en vatios (W).

b) **En generadores de c.a.**: la potencia asignada es la potencia eléctrica aparente en los bornes, y debe expresarse en voltio-amperios (VA) junto con la indicación del factor de potencia. El f.d.p. asignado para los generadores síncronos debe ser 0,8 sobreexcitado, salvo especificación contraria.

c) **En motores**: la potencia asignada es la potencia mecánica disponible en el eje, y debe expresarse en vatios (W).

d) **En transformadores**: la potencia asignada es la potencia eléctrica aparente en bornes del primario o del secundario y debe expresarse en voltamperios (VA). (Norma UNE 20-101.)

De acuerdo con la Sección 10 de la Norma UNE EN 60034-1:2005, todas las máquinas eléctricas ***deben estar provistas de una o varias placas de características*** en las que deben

marcarse de forma indeleble los puntos aplicables de la lista siguiente: 1) Nombre o marca del constructor. 2) Número de serie del fabricante o marca de fabricación. 3) Información para identificar el año de fabricación. 4) Código del fabricante para la máquina. 5) Para las máquinas de c.a., el número de fases. 6) Número(s) de las normas aplicables para las características asignadas y las características de funcionamiento. Si se indica 34, quiere decir que se cumplen todas las normas de la serie 34 de la CEI que sean pertinentes. 7) Grado de protección proporcionada por las envolventes (Código IP) de acuerdo con CEI 34-5. 8) Clasificación térmica o el calentamiento admisible. 9) Clase(s) de características asignadas y el(los) servicio(s) tipo(s) si la máquina está diseñada para características asignadas diferentes de las del tipo continuo máximo, servicio tipo S1. 10) Potencia(s) asignada(s). 11) Tensión(es) asignadas(s) o gama de tensiones asignadas. 12) Para las máquinas de c.a., la frecuencia asignada o la gama de frecuencias asignadas. 13) Intensidad(es) asignada(s). 14) Velocidad(es) asignada(s). 15) Para las máquinas trifásicas de c.a. con más de tres puntos de conexión, instrucciones de conexión mediante un diagrama en forma de texto... 26) Para máquinas previstas para funcionar en un solo sentido de giro, el sentido de giro indicado por una flecha.

En la Figura 2.18 se muestra a modo de ejemplo una placa de características típica de un motor asíncrono en el que se señalan las magnitudes asignadas más importantes.

El *grado de protección* de envolventes señalado en el punto 7 de la relación anterior viene definido en las Normas UNE-EN 60034-5:2003 (Máquinas eléctricas rotativas. Parte 5: Grados de protección proporcionados para el diseño integral de las máquinas eléctricas rotativas, código IP. Clasificación) y CEI 34-5:1991 y se expresa con las letras IP (***Índice de Protección***) seguidas de tres números: el primero indica la protección contra objetos sólidos, el segundo la protección contra el agua y el tercero la protección contra choques mecánicos, de acuerdo con lo indicado en la Tabla 2.1. La clase de protección representa en definitiva las características de la envolvente de la máquina con vistas a:

1.º *Proteger a las personas contra el peligro de tocar directamente partes móviles o que estén en contacto con partes bajo tensión. Es lo que se denomina protección contra contactos directos.*
2.º *Proteger la máquina contra la entrada de cuerpos sólidos y líquidos desde el medio ambiente exterior.*
3.º *Proteger la máquina contra choques mecánicos (generalmente omitido).*

Se pueden obtener tantas clases de protección como combinaciones posibles nos da la tabla, aunque no todas esas posibilidades se realizan en la práctica (por ejemplo la protección

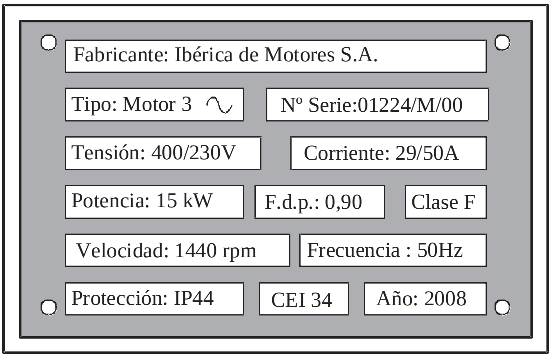


Figura 2.18. Placa de características de un motor eléctrico.

Tabla 2.1. Dígitos para indicar la clase de protección

CIFRA	*SIGNIFICADO*		
	1.ª CIFRA *Protección contra contactos directos y cuerpos extraños*	2.ª CIFRA *Protección contra la penetración de líquidos*	3.ª CIFRA *Protección contra los choques mecánicos*
0	Sin protección	Sin protección	Sin protección
1	Protección contra contactos directos casuales de grandes superficies, por ejemplo con la mano. Protección contra la penetración de cuerpos sólidos extraños de diámetro superior a 50 mm.	Protección contra la caída vertical de gotas de agua.	Energía de choque: 0,225 julios.
2	Protección contra contactos directos con los dedos. Protección contra la penetración de cuerpos sólidos extraños de diámetro superior a 12 mm.	Protección contra la caída de gotas de agua inclinadas en cualquier ángulo hasta 15° con la vertical.	
3	Protección contra contactos directos de herramientas, hilos, etc., mayores de 2,5 mm de diámetro. Protección contra la penetración de cuerpos sólidos extraños de diámetro superior a 2,5 mm.	Protección contra el rociado de agua en un ángulo de hasta 60° con la vertical.	Energía de choque: 0,5 julios.
4	Protección contra contactos directos con herramientas, hilos, etc., mayores de 1 mm de diámetro. Protección contra la penetración de cuerpos sólidos extraños de diámetro superior a 1 mm.	Protección contra la proyección de agua en todas las direcciones.	
5	Protección total contra contactos directos. Protección contra depósitos de polvo perjudiciales.	Protección contra chorros de agua en todas las direcciones.	Energía de choque: 2 julios.
6	Protección total contra contactos directos. Protección total contra la penetración de polvo.	Protección contra inundaciones pasajeras.	
7		Protección contra los efectos de inmersión.	Energía de choque: 6 julios.
8		Protección contra inmersión prolongada.	
9			Energía de choque: 20 julios

de las máquinas eléctricas contra choque mecánicos generalmente se omite). El tipo de protección que se utiliza con mayor frecuencia en ingeniería civil es el IP 44, pero dependiendo de las condiciones en las que se prevea el trabajo de la máquina, el usuario deberá definir el grado IP que más se adapte a sus necesidades. Por ejemplo los grupos motobomba sumergidos en pozos para suministro de agua a poblaciones tienen una protección IP68. En el caso de cuadros generales y acometidas eléctricas de obras que son de tipo intemperie y de montaje provisional es aconsejable que sean de al menos IP55.

Otro aspecto a considerar en las máquinas eléctricas es el concepto de servicio, y que se define como los períodos de funcionamiento en vacío y reposo a los que está sometida una máquina teniendo en cuenta su duración y secuencia en el tiempo. Las Normas UNE 20-113-7 y UNE-EN 60034-1:2005 definen diez clases de servicios (señalados con la letra S seguida de un dígito, del 1 al 10) y que significan:

1. **Servicio continuo - Servicio tipo S1**. Funcionamiento con carga constante y de una duración suficiente para que se establezca el equilibrio térmico.
2. **Servicio temporal - Servicio tipo S2**. Funcionamiento con carga constante durante un período de tiempo determinado, menor que el requerido para alcanzar el equilibrio térmico, seguido de un período de reposo suficiente para que la temperatura descienda hasta igualarse a la del fluido de refrigeración dentro de un margen de 2 K.
3. **Servicio intermitente periódico - Servicio tipo S3**. Sucesión de ciclos de servicios idénticos, comprendiendo cada uno un período de funcionamiento con carga constante y un período de reposo. En este servicio el ciclo es tal que la intensidad de arranque no influye de forma apreciable en el calentamiento.
4. **Servicio intermitente periódico con arranque - Servicio tipo S4**. Sucesión de ciclos de servicios idénticos, comprendiendo cada uno un período de tiempo de arranque, un período de funcionamiento con carga constante y un período de reposo.
5. **Servicio intermitente periódico con frenado eléctrico - Servicio tipo S5**. Sucesión de ciclos de servicios idénticos, comprendiendo cada uno un período de tiempo de arranque, un período de funcionamiento con carga constante, un período de frenado eléctrico rápido y un período de reposo.
6. **Servicio ininterrumpido periódico con carga intermitente - Servicio tipo S6**. Sucesión de ciclos de servicios idénticos, comprendiendo cada uno un período de funcionamiento con carga constante y un período de vacío. No existe período de reposo.
7. **Servicio ininterrumpido periódico con frenado eléctrico - Servicio tipo S7**. Sucesión de ciclos de servicios idénticos, comprendiendo cada uno un período de arranque, un período de funcionamiento con carga constante y un período de frenado eléctrico. No existe período de reposo.
8. **Servicio ininterrumpido periódico con cambios de carga y de velocidad relacionados - Servicio tipo S8**. Sucesión de ciclos de servicios idénticos, comprendiendo cada uno un período de funcionamiento con carga constante correspondiente a una velocidad de giro determinada, seguido de uno o varios períodos de funcionamiento con otras cargas constantes correspondientes a velocidades de giro diferentes (realizados, por ejemplo, por cambio del número de polos en el caso de motores de inducción). No existe período de reposo.
9. **Servicio con variaciones no periódicas de carga y de velocidad - Servicio tipo S9**. Servicio en el cual la carga y la velocidad tienen generalmente una variación no

periódica en el margen de funcionamiento admisible. Este servicio incluye frecuentemente sobrecargas aplicadas que pueden ser ampliamente superiores a la plena carga.

10. **Servicio con cargas constantes diferentes - Servicio tipo S10**. Servicio que consiste en un máximo de cuatro valores diferentes de carga, cada uno de los cuales se mantiene un tiempo suficiente para permitir que la máquina alcance el equilibrio térmico. La carga máxima en un ciclo de servicio puede tener un valor cero (vacío o reposo).

Finalmente, otro detalle a destacar en las máquinas son las formas constructivas externas. En España vienen definidas por la Norma UNE-EN 60034-7/A1-2003 (Máquinas eléctricas rotativas. Parte 7. Clasificación de los tipos de construcción, de las disposiciones de montaje y posición de caja de bornes, código IM). Existen dos códigos, el más simple utiliza una letra mayúscula B o V seguida de una o dos cifras, que sirven para definir la posición del eje: horizontal o vertical, si existe brida de sujeción o plato soporte, cojinetes, etc. Por otra parte, para reducir costes y permitir el intercambio de motores procedentes de distintos fabricantes, se ha llevado a cabo una normalización de las principales dimensiones mecánicas relativas al montaje de las máquinas: diámetro y longitud del eje, distancia entre patas, diámetro de la brida de anclaje, alturas de ejes, etc.

2.7. RENDIMIENTO

Como ya se ha indicado en el apartado 2.5, en las máquinas eléctricas, como en cualquier otro dispositivo de transformación de la energía, existen unas pérdidas, de tal forma que solamente se entrega a la salida una parte de la energía absorbida en la entrada. El rendimiento se define como el cociente entre la potencia útil y la potencia absorbida o total, de acuerdo con la expresión:

$$\eta = \frac{Potencia\ útil}{Potencia\ total} = \frac{P_u}{P_T} \tag{2.15}$$

llamando P_p a la potencia perdida se verifica:

$$P_T = P_u + P_p \tag{2.16}$$

en consecuencia (2.15), toma la forma:

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_p} \tag{2.17}$$

En el caso de un generador, la potencia útil es la potencia eléctrica entregada a la carga y en el caso de un motor es la potencia mecánica en el árbol de la máquina. La potencia perdida, teniendo en cuenta el apartado 2.5, es igual a:

$$P_p = P_{Fe} + P_m + P_{cu} \tag{2.18}$$

que teniendo en cuenta (2.14) se puede poner:

$$P_p = P_f + P_V \tag{2.19}$$

donde P_f indica las pérdidas constantes de la máquina y P_V las pérdidas variables con la carga.

Las pérdidas variables son debidas a las pérdidas en el cobre, y en consecuencia son proporcionales a I^2. Como quiera además que la corriente es proporcional a la potencia aparente ($S = VI$), se podrá escribir:

$$P_V = bS^2 \tag{2.20}$$

Teniendo en cuenta que $P_u = VI \cos \varphi = S \cos \varphi$, la expresión (2.17) se podrá escribir:

$$\eta = \frac{S \cos \varphi}{S \cos \varphi + P_f + bS^2} = \frac{S}{S + (P_f + bS^2)/\cos \varphi} \tag{2.21}$$

lo que indica que para una misma potencia aparente S, el rendimiento es tanto mejor cuanto mayor es el f.d.p. Si el f.d.p. es constante, (2.21) se podrá escribir denominando a al $\cos \varphi$, y resulta:

$$\eta = \frac{aS}{aS + P_f + bS^2} \tag{2.22}$$

Se puede dibujar ahora la curva $\eta = f(S)$, expresada por la ecuación anterior. Se observa que $\eta = 0$ para $S = 0$, y además la función tiene un máximo, definido por la condición:

$$\frac{d\eta}{dS} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_f = bS^2 \tag{2.23}$$

es decir, el rendimiento es máximo para una potencia aparente S tal, que coinciden para ese régimen las pérdidas fijas con las variables, esto es, las pérdidas en el cobre (pérdidas variables) son iguales a la suma de las pérdidas mecánicas más las del hierro (pérdidas fijas).

Se denomina **índice de carga** o **factor de utilización**: C, al cociente entre la potencia aparente útil S y la asignada S_N, de tal forma que:

$$C = \frac{S}{S_N} \tag{2.24}$$

El índice de carga es el **óptimo** cuando la potencia útil es la de máximo rendimiento, es decir:

$$C_{opt} = \frac{S_{\eta \text{máx}}}{S_N} \tag{2.25}$$

pero teniendo en cuenta (2.23):

$$S_{\eta \text{máx}} = \sqrt{\frac{P_f}{b}} \tag{2.26}$$

que al sustituir en (2.25) resulta:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_f}{bS_N^2}} = \sqrt{\frac{\text{Pérdidas fijas}}{\text{Pérdidas variables a la potencia nominal}}} \tag{2.27}$$

En la Figura 2.19 se indica la función $\eta = f(S)$, para un f.d.p. constante; se señala también a trazos la misma curva para un f.d.p. menor.

Observando la variación del rendimiento con la potencia, se pueden deducir las siguientes consecuencias prácticas:

a) *Se debe evitar el funcionamiento con cargas reducidas, ya que el rendimiento sería pequeño.*

b) *Se debe procurar que la máquina funcione con un índice de carga próximo al óptimo para obtener un mejor rendimiento.*

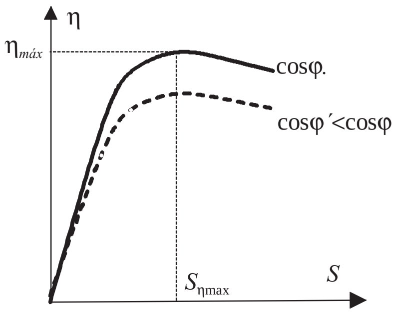


Figura 2.19. Curvas de rendimiento en función de la potencia para diversos f.d.p.

c) *Se debe rechazar toda máquina cuya potencia asignada sea demasiado elevada respecto al servicio a que se destina, pues trabajaría con carga reducida y su rendimiento sería pequeño. En consecuencia, para un mismo trabajo, la energía absorbida y pagada sería mayor.*

Ejemplo de aplicación 2.1

Una máquina eléctrica de 40 kVA tiene unas pérdidas en el hierro de 750 W, las pérdidas en el cobre a plena carga o asignada son de 2.000 W y las pérdidas mecánicas son de 1.000 W. Calcular: a) Potencia aparente de máximo rendimiento. b) Pérdidas en el cobre en el caso anterior. c) Rendimiento máximo para un f.d.p. unidad. d) Rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8. e) Rendimiento a media carga con f.d.p. 0,6.

Solución

a) El índice de carga óptimo de acuerdo con (2.27) es:

$$C = \sqrt{\frac{750 + 1.000}{2.000}} = 0,9354$$

lo que indica una potencia aparente de máximo rendimiento, según (2.25):

$$S_{\eta máx} = 0,9354 \cdot 40 = 37,41 \text{ kVA}$$

b) Cuando trabaja la máquina con máximo rendimiento, de acuerdo con (2.23) las pérdidas fijas y variables coinciden, es decir:

$$P_V = P_f = P_{Fe} + P_m = 750 + 1.000 = 1.750 \text{ W}$$

c) El rendimiento máximo será:

$$\eta = \frac{S_{\eta máx} \cos\varphi}{S_{\eta máx} \cos\varphi + 2P_f} = \frac{37,41 \cdot 1}{37,41 \cdot 1 + 2 \cdot 1,75} = 91,44\,\%$$

d) A plena carga el rendimiento tendrá por expresión:

$$\eta = \frac{S_N \cos\varphi}{S_N \cos\varphi + P_f + P_V} = \frac{40.000 \cdot 0,8}{40.000 \cdot 0,8 + 1.750 + 2.000} = 89,51\,\%$$

e) A media carga, es decir, mitad de potencia, las pérdidas del cobre, de acuerdo con (2.20) se reducirán a la cuarta parte, esto es, serán de 500 W y el rendimiento valdrá:

$$\eta = \frac{(S_N/2)\cos\varphi}{(S_N/2)\cos\varphi + P_f + P_V} = \frac{20.000 \cdot 0,6}{20.000 \cdot 0,6 + 1.750 + 500} = 84,21\,\%$$

2.8. F.M.M. Y CAMPO MAGNÉTICO EN EL ENTREHIERRO DE UNA MÁQUINA ELÉCTRICA

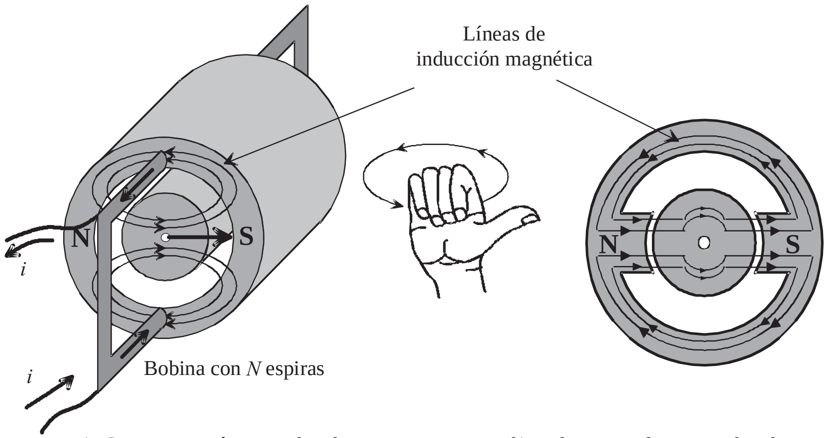
El campo magnético en el entrehierro de una máquina eléctrica es el resultado de las f.m.m.s. combinadas de los devanados inductor e inducido que actúan en esa región. En principio, es el devanado inductor el que produce el campo en el entrehierro, creando f.e.m.s. en el devanado del inducido, que dan lugar a corrientes cuando se cierra el circuito por un sistema exterior (generador). Al circular una intensidad por el devanado del inducido, se crea una f.m.m. de **reacción de inducido**, que al combinarse con la f.m.m. del inductor origina, de acuerdo con la ley de Ampère, el campo magnético resultante en el entrehierro de la máquina. Teniendo en cuenta además que, de acuerdo con la ley de Faraday, la f.e.m. inducida es función de la inducción, se podrá comprender la importancia de la distribución del campo magnético en la forma de onda de la f.e.m.

Se van a analizar en este apartado las formas de las f.m.m.s. y campos producidos por diferentes tipos de devanados para poder estudiar posteriormente las f.e.m.s. que se obtienen en el inducido y los pares electromagnéticos a que dan lugar. Con objeto de hacer más sencillo el cálculo, para destacar más claramente los principios físicos involucrados, se supondrá una máquina rotativa cilíndrica, es decir, sin polos salientes tanto en el estátor como en el rotor, lo que representa la existencia de un entrehierro de espesor uniforme. Se admitirá asimismo que la permeabilidad del hierro es infinita, lo que da lugar a considerar que la reluctancia del hierro es despreciable, por lo que no se requiere ninguna f.m.m. para producir la inducción en esta parte del circuito magnético. Para simplificar las figuras se supondrá también que la máquina es bipolar, coincidiendo en este caso, de acuerdo con (2.1), el número de grados geométricos con los magnéticos.

2.8.1. Campo magnético y f.m.m. producida por un devanado concentrado de paso diametral

Consideramos en primer lugar una bobina de N espiras representada por el esquema simplificado de la Figura 2.20*a*. (Por motivos didácticos, se han alargado las cabezas de bobina para facilitar la visión de la misma. En la práctica constructiva real, estas cabezas se doblan adaptando su recorrido a la periferia del estátor para no impedir así el movimiento del rotor). Se trata de determinar la forma de la distribución tanto del campo magnético como de la f.m.m. a lo largo del entrehierro. La bobina está recorrida por una corriente de i amperios, que en principio supondremos que es de c.c.

En la Figura 2.20*a* se han representado las líneas de campo magnético que produce la bobina; estas líneas atraviesan radialmente el entrehierro y se cierran por los núcleos ferromagnéticos de estátor y rotor (*campo solenoidal*). El sentido de las líneas de inducción viene determinado por la regla de Ampère de la mano derecha y van de la cara izquierda a la cara derecha de la bobina. Debe destacarse que desde el punto de vista del entrehierro de la máquina, la parte



a) Campo magnético producido por una bobina de paso diametral

b) Polos equivalentes producidos por una bobina de paso diametral

Figura 2.20. Bobina de paso diametral y sentido del campo magnético que produce.

izquierda del estátor se comporta como un *polo norte*, ya que las líneas de inducción magnética se dirigen del material ferromagnético del estátor al entrehierro pasando después al rotor, mientras que la parte derecha del estátor es un *polo sur* porque las líneas de inducción magnética pasan del entrehierro a la parte derecha del estátor. El retorno de las líneas de campo se realiza por el núcleo ferromagnético del estátor. En la Figura 2.20*b* se muestra el modelo magnético equivalente de la Figura 2.20*a*, en el que se representa un estátor con unos imanes imaginarios norte y sur que simulan el campo magnético equivalente de la bobina. En el esquema de la Figura 2.20 se ha considerado que la bobina tiene una anchura de 180° magnéticos, lo cual indica, para el caso de que la máquina tenga dos polos, que el paso de bobina es **diametral***.

En la Figura 2.21 se representa en la parte superior izquierda la sección transversal de la máquina de la Figura 2.20*a*, en la que se muestran las líneas de inducción B producidas por la bobina. A su derecha se ha dibujado un esquema desarrollado de la máquina al cortar el conjunto por la sección *MM′*. El eje de la bobina se toma como referencia de posiciones angulares ($\theta = 0$). En la Figura 2.21*b* se han señalado el sentido de las líneas de inducción en el entrehierro (para dar claridad a la figura se ha evitado dibujar el cierre de las líneas de inducción magnética en el estátor y el rotor). Se han asignado los sentidos de las líneas de inducción en el entrehierro de la Figura 2.21*b* teniendo en cuenta la regla de la mano derecha; entre *A* y *A′* aparece un polo sur, mientras que entre *A′* y *A* se obtiene un polo norte, lo que está de acuerdo con el sentido dibujado en la Figura 2.21*a*.

Para poder determinar la magnitud de la inducción en cada punto del entrehierro será necesario aplicar al circuito magnético de la Figura 2.21*b* la ley de Ampère en forma integral:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \tag{2.28}$$

Para utilizar la ley anterior es preciso recordar que si se considera infinita la permeabilidad del hierro tanto en el estátor como en el rotor, la diferencia de potencial magnético en

* La denominación diametral se emplea también para definir bobinas cuya anchura sea de un paso polar (180° magnéticos) aunque la máquina tenga cualquier número de polos. También se utiliza la expresión de paso completo o polar.

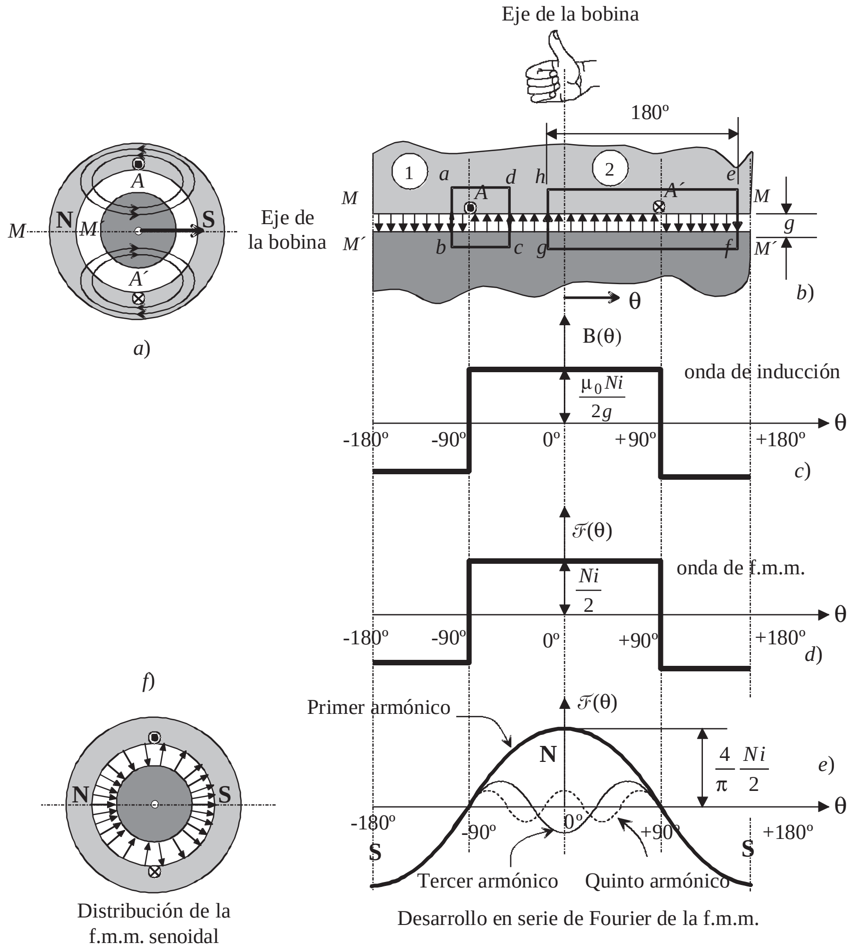


Figura 2.21. Inducción y f.m.m. de una bobina y su desarrollo en serie de Fourier.

estas zonas, definida por la ecuación (1.21) del capítulo anterior, será igual a cero, o de otro modo: la f.m.m. necesaria en la bobina para producir una inducción en el hierro es despreciable. Por consiguiente, toda la f.m.m. aplicada a la bobina se requiere únicamente para crear el campo magnético en el entrehierro. El recinto γ indicado en la ley de Ampère (2.28) puede ser cualquiera siempre que sea cerrado. Considérese, por ejemplo, que se ha elegido el circuito 1 (que coincide con una línea de inducción) de la Figura 2.21*b*; al aplicar (2.28) resultará:

$$\oint_\gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{b(\text{rotor})}^c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{d(\text{estátor})}^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni \qquad (2.29)$$

y teniendo en cuenta que la f.m.m. necesaria, tanto en el rotor como en el estátor, es igual a cero, se obtiene:

$$\int_a^b H \cdot dl + \int_c^d H \cdot dl = Ni \qquad (2.30)$$

Para deducir las ecuaciones (2.29) y (2.30) debe comprobar el lector que el circuito 1 de la Figura 2.21*b* se ha recorrido a izquierdas, por lo que son positivas las corrientes que atraviesan este circuito en sentido saliente al plano del papel. En nuestro caso, como existen N conductores llevando una corriente i cada uno en la ranura A, se obtiene un valor $+Ni$ (ya que las corrientes «i» son salientes).

Otro aspecto a considerar en la ecuación (2.30) es que en general, si no se elige el recinto de integración γ aprovechando algún tipo de simetría del circuito magnético, no resulta inmediato el cálculo de los campos H a lo largo del entrehierro. Por ejemplo, en el circuito 1 elegido, los campos H de «a» a «b» y de «c» a «d» pueden no ser iguales, por lo que en la ecuación (2.30) se tienen dos campos incógnitas, lo que haría necesario aplicar la ley de Ampère a un nuevo circuito para poder resolver el problema.

Se hace necesario, por consiguiente, saber elegir el recinto de integración γ de un modo más inteligente. Debe destacarse entonces el hecho de que cualquier máquina eléctrica rotativa tiene simetría circular con un número par de polos, y es por ello que sea cual sea la distribución del devanado, el campo magnético en el entrehierro para un ángulo θ tiene siempre la misma magnitud que el campo en $\theta + 180°$ (magnéticos), pero de sentido opuesto; es decir, se cumple:

$$\mathbf{H}(\theta) = -\mathbf{H}(\theta + \pi) \tag{2.31}$$

Es evidente, por tanto, que si se elige un recinto de integración con una anchura de 180°, se simplificará enormemente el problema. En la Figura 2.21*b* el recinto 2 se ha elegido cumpliendo esta condición. Si se aplica a este circuito el teorema de Ampère resultará:

$$\int_e^f H \cdot dl + \int_g^h H \cdot dl = Ni \tag{2.32}$$

pero teniendo en cuenta (2.31) dará lugar a:

$$H \cdot g + H \cdot g = Ni \quad \Rightarrow \quad H = \frac{Ni}{2g} \tag{2.33}$$

donde g representa el espesor del entrehierro. Es indudable la ventaja obtenida, ya que nos ha permitido obtener de un modo inmediato el campo en las zonas «ef» y «gh». Si se desea ahora determinar el campo en cualquier punto del entrehierro, lo más conveniente será tomar el circuito 2 e irlo trasladando hacia la izquierda o derecha para ir *barriendo* todos los puntos del entrehierro. En nuestro caso, en el que se dispone de una única bobina, no se obtiene información adicional alguna, ya que para cualquier posición del circuito 2 siempre se obtiene la misma ecuación (2.32). El campo es en consecuencia uniforme y su valor es el expresado en (2.33). El valor de la inducción en el entrehierro se obtiene de una forma inmediata, resultando ser:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 Ni}{2g} \tag{2.34}$$

En la Figura 2.21*c* se ha representado la distribución de la inducción B en el entrehierro en función de θ. Es una onda rectangular cuya amplitud viene definida por (2.34) y que invierte su signo en los puntos donde se localizan los conductores. La onda es positiva en aquellas zonas en las que las líneas de campo se dirigen del rotor al estátor (**polo sur**), mientras que es negativa en la región en que las líneas de campo van del estátor al rotor (**polo norte**).

En el estudio de las máquinas eléctricas resulta más interesante representar la distribución de la f.m.m. en el entrehierro que la onda de inducción, y esto es debido a que la onda de

f.m.m. (realmente la onda de tensión magnética en el entrehierro) es independiente del espesor de entrehierro. Otra ventaja adicional es que la f.m.m. es una función lineal de la corriente, por lo que **puede aplicarse el principio de superposición a una combinación de f.m.m.s.**; de hecho es la f.m.m. total la que origina la inducción resultante en el entrehierro. Sin embargo, debido a que la curva de imanación de un material magnético es no lineal, **no puede aplicarse el principio de superposición a las inducciones**. Es por ello que a partir de ahora en los ejemplos que se tratarán posteriormente únicamente se estudiará la distribución de la f.m.m. en el entrehierro. Para el caso que nos ocupa, se define como **f.m.m. o tensión magnética** en un punto del entrehierro de referencia angular θ a:

$$\mathcal{F}(\theta) = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \tag{2.35}$$

El cálculo de la f.m.m. anterior se realiza de un modo similar al del campo magnético ya estudiado, ya que se cumple una relación similar a (2.31), es decir:

$$\mathcal{F}(\theta) = -\mathcal{F}(\theta + \pi) \tag{2.36}$$

y eligiendo el circuito 2 de la Figura 2.21*b*, que tiene una anchura de 180°, y aplicando al mismo la ley de Ampère se obtiene la relación (2.32), y teniendo en cuenta (2.35), resulta:

$$\mathcal{F}(\theta) = -\mathcal{F}(\theta + \pi) = Ni \tag{2.37}$$

pero de acuerdo con (2.36) se transforma en:

$$2\mathcal{F}(\theta) = Ni \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}(\theta) = \frac{Ni}{2} \tag{2.38}$$

El resultado (2.37) se obtiene teniendo en cuenta que al igual que las inducciones, se consideran como f.m.m.s. positivas las que van de rotor al estátor y negativas las que se dirigen de estátor al rotor. Moviendo el recinto de integración 2 se obtendrá el valor de $\mathcal{F}(\theta)$ en cualquier punto del entrehierro. En la Figura 2.21*d* se ha dibujado la distribución de f.m.m., que es una onda rectangular de valor máximo $Ni/2$ y que es positiva entre −90° y +90° y negativa entre 90° y −90°. La onda de f.m.m. (y también la de inducción) es una función periódica que se puede descomponer en serie de Fourier. El lector puede demostrar que el desarrollo es de la forma:

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}_1 \cos\theta + \mathcal{F}_3 \cos 3\theta + \cdots + \mathcal{F}_h \cos h\theta + \cdots \tag{2.39}$$

donde los valores $\mathcal{F}_h$ vienen definidos por:

$$\mathcal{F}_h = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{F}(\theta) \cos h\theta \, d\theta \tag{2.40}$$

y teniendo en cuenta el valor de $\mathcal{F}(\theta)$ expresado en (2.38), la integral anterior da lugar a:

$$\mathcal{F}_h = \frac{4}{\pi} \frac{1}{h} \frac{Ni}{2} \operatorname{sen} \frac{h\pi}{2} \tag{2.41}$$

que al llevar a (2.39) nos da:

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} \left[\cos\theta - \frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{5} \cos 5\theta + \cdots \right] \tag{2.42}$$

En definitiva, la onda rectangular de f.m.m. es la suma de una onda **fundamental** sinusoidal que responde a la expresión:

$$\mathcal{F}(\theta)_1 = \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}\cos\theta \tag{2.43}$$

y de armónicos impares cuya amplitud es $1/h$ veces el fundamental. En la Figura 2.21*e* se han representado las componentes: fundamental, tercero y quinto armónico de la onda de f.m.m. El dibujo está hecho a escala para que se aprecien claramente las relaciones entre las amplitudes de las tres ondas. El lector puede comprobar además que la distribución espacial del armónico h tiene h máximos en un ciclo completo. Si se consideran despreciables los armónicos, entonces la distribución de f.m.m. se puede suponer que obedece a la expresión:

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta)_1 = \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}\cos\theta \tag{2.44}$$

que es una onda distribuida de forma sinusoidal en el entrehierro de la máquina y cuyo valor de pico está alineado con el eje magnético de la bobina. Esta f.m.m. producirá una inducción en el entrehierro de la misma forma, ya que de acuerdo con (2.35) resulta:

$$H(\theta) = \frac{\mathcal{F}(\theta)}{g} \quad ; \quad B(\theta) = \mu_0 H(\theta) \tag{2.45}$$

es decir:

$$B(\theta) = \mu_0 \frac{\mathcal{F}(\theta)}{g} = \frac{4}{\pi}\mu_0 \frac{Ni}{2g}\cos\theta \tag{2.46}$$

que corresponde a la componente fundamental de inducción de la onda de la Figura 2.21*c*. En la Figura 2.21*f* se ha representado esta distribución sinusoidal de campo magnético en el entrehierro por unas componentes de líneas de fuerza que están más concentradas en el eje de la bobina y se van separando a medida que llegan a las posiciones de ±90° respecto del eje. Es una forma gráfica de hacer patente que el campo es mayor (está más concentrado) en la zona correspondiente al eje de la bobina. Para evitar la incomodidad de tener que dibujar la distribución de inducción o en general de f.m.m. de la forma mostrada en la Figura 2.21*f* se utiliza en Ingeniería Eléctrica el concepto de **fasor espacial***. Es un concepto análogo en cierto modo al de los *fasores temporales* que se emplea con acierto en el estudio de los circuitos de c.a. Para mostrarlo de un modo gráfico, considérese la distribución de f.m.m. sinusoidal (2.44), que se puede escribir:

$$\mathcal{F}(\theta) = F_m \cos\theta \quad \text{donde} \quad F_m = \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2} \tag{2.47}$$

En la Figura 2.22 se ha vuelto a dibujar en la parte izquierda el esquema de la Figura 2.21*f* que representaba la onda de distribución espacial de f.m.m. definida en (2.47). Se observa que esta distribución queda definida completamente si se conoce su amplitud F_m y la posición espacial del máximo positivo de la onda (eje de la onda). Para esa información basta dibujar un *segmento orientado apuntando hacia la región del espacio donde la onda presenta su máximo positivo y cuyo módulo sea igual a la amplitud de la onda*. Este segmento orientado se ha dibujado en la parte derecha de la Figura 2.22 y representa el *fasor espacial de la*

---

* El lector interesado en el tema de fasores espaciales puede consultar el libro *Fundamentos de máquinas eléctricas rotativas*, de Luis Serrano Iribarnegaray (Ed. Marcombo, Barcelona, 1989).

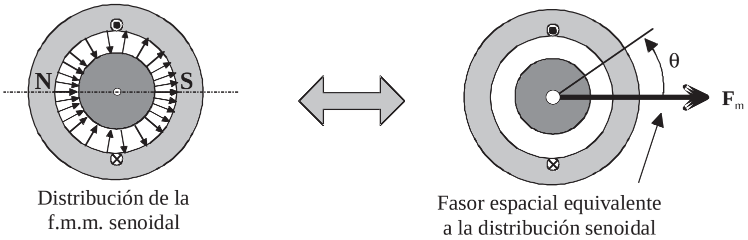


Figura 2.22. Distribución sinusoidal de f.m.m. y fasor de f.m.m equivalente.

f.m.m. señalada a la izquierda. En definitiva el fasor espacial corresponde en este caso a una onda estacionaria de f.m.m. cuya distribución espacial por la periferia del entrehierro la describe la función cos θ; su máximo coincide con el eje magnético de la bobina. Este modo de representar distribuciones sinusoidales de f.m.m.s. en el entrehierro es muy útil en la descripción de los fenómenos magnéticos en las máquinas eléctricas.

Si, partiendo de la ecuación (2.47), se supone que se alimenta la bobina con una corriente sinusoidal: $i = I_m \cos \omega t$, entonces la f.m.m. producida será:

$$\mathscr{F}(\theta, t) = \frac{4}{\pi}\frac{NI_m}{2} \cos \omega t \cos \theta = [F_m \cos \omega t] \cos \theta \tag{2.48}$$

donde se ha denominado F_m a:

$$F_m = \frac{4}{\pi}\frac{NI_m}{2} \tag{2.49}$$

Para ver el significado de la expresión (2.48), en la Figura 2.23 se ha dibujado el fasor espacial $\mathscr{F}(\theta, t)$ en diferentes instantes de tiempo. En la parte superior de la figura se ha vuelto a representar la bobina en sección transversal. En la parte central se muestra la forma de la corriente alterna $i = I_m \cos \omega t$ y en la parte inferior se observa el fasor espacial de f.m.m.

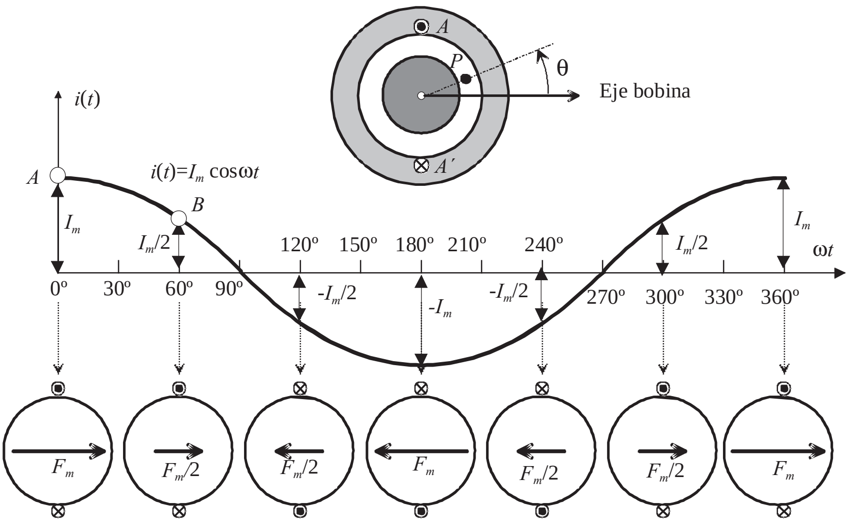


Figura 2.23. F.m.m. producida por un devanado concentrado alimentado con c.a.

en el entrehierro que está orientado con el eje de la bobina y cuya amplitud es proporcional al valor de la corriente en cada instante.

Por ejemplo, si se considera el instante inicial ($t = 0$, $\omega t = 0$), la corriente es I_m y el valor de la f.m.m. de acuerdo con (2.48), será igual al valor señalado en (2.49), que es una onda de f.m.m. de amplitud F_m y que está distribuida de forma sinusoidal por el entrehierro y cuyo fasor espacial correspondiente se muestra en el primer esquema de la parte inferior de la Figura 2.23. A medida que evoluciona el tiempo, la corriente que circula por la bobina sigue una distribución sinusoidal, lo que hace modificar la amplitud de f.m.m., por lo que el fasor correspondiente va cambiando su amplitud tal como se señala en la parte inferior de la Figura 2.23. En definitiva, la onda de f.m.m. y su fasor espacial permanecen fijos en el espacio pero su *amplitud varía de forma sinusoidal con el tiempo*. Se dice entonces que la onda estacionaria de f.m.m. es **alternativa** o **pulsante**.

2.8.2. F.m.m. producida por un devanado distribuido

En la práctica constructiva habitual de las máquinas eléctricas, con objeto de aprovechar toda la periferia tanto del estátor como del rotor, las bobinas se distribuyen en ranuras, lo que permite no solamente una utilización más óptima de la máquina sino también una mejora en la calidad de la onda de f.m.m. e inducción, que se traducirá en una f.e.m. inducida en las bobinas de carácter más sinusoidal. Para comprobar de un modo más fehaciente este hecho se va a considerar el esquema de la Figura 2.24, que representa un devanado constituido por tres bobinas de N espiras cada una llevando una corriente de i amperios (las bobinas están conectadas en serie).

La determinación de la f.m.m. resultante se muestra en la Figura 2.25. En la Figura 2.25*a* se ha representado el esquema desarrollado de la máquina de la Figura 2.24. En la parte inferior derecha de la Figura 2.25 se han dibujado las ondas de f.m.m. de cada una de las bobinas, cuyos ejes no están alineados y que responden a lo estudiado en el epígrafe anterior. En la Figura 2.25*b* se ha obtenido la f.m.m. resultante aplicando simplemente el principio de superposición. Es una onda escalonada que obviamente se parece más a una senoide. Cada vez que se atraviesa una ranura se tiene un salto $Ni/2$ en la f.m.m. La obtención de la onda de f.m.m. puede hacerse también aplicando la ley de Ampère. En la Figura 2.25*a* se ilustra el procedimiento. Se ha elegido un recinto de integración *abcd* de 180° magnéticos de anchura. Si denominamos F_1 a la tensión magnética existente en el entrehierro en la zona correspondiente a la línea *ad*, el valor correspondiente en *cb* será el mismo pero de sentido contrario

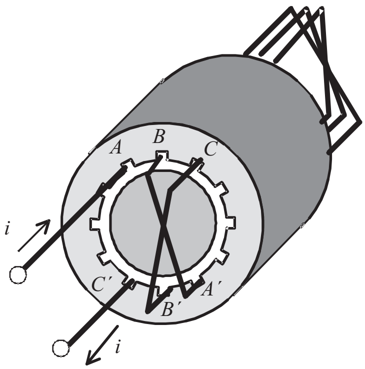


Figura 2.24. Devanado distribuido y formado por tres bobinas.

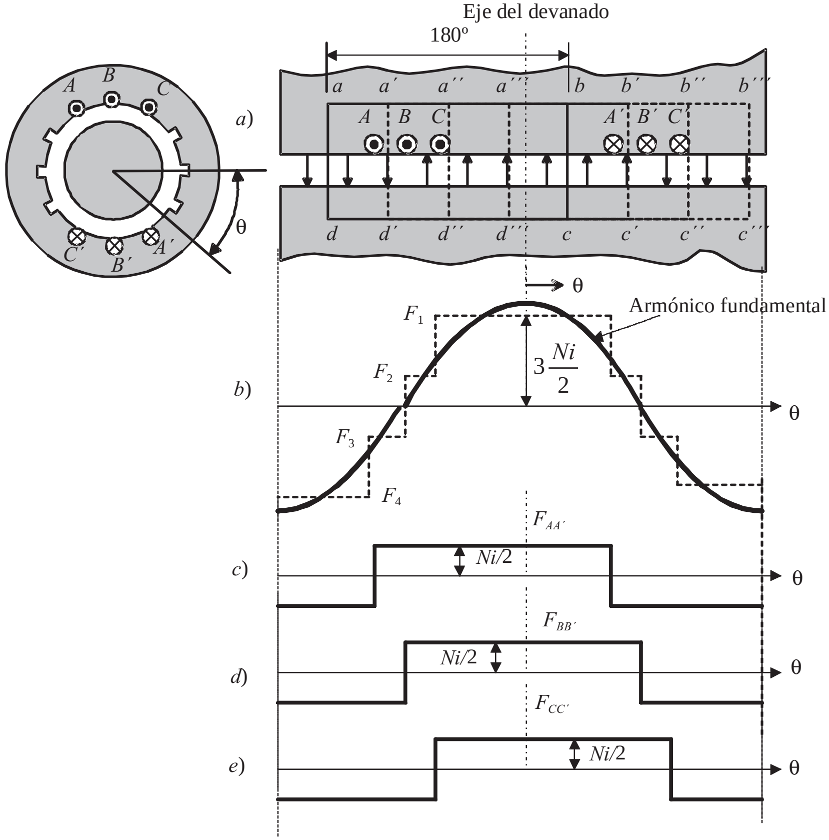


Figura 2.25. Distribución de f.m.m. producida por un devanado distribuido de tres bobinas.

debido a la simetría del sistema y que se expresó mediante la ecuación (2.36). Si se aplica la ley de Ampère a este recinto resultará:

$$2F_1 = Ni + Ni + Ni = 3Ni \tag{2.50}$$

es decir:

$$F_1 = 3\frac{Ni}{2} \tag{2.51}$$

Como ya se ha indicado en el epígrafe anterior, si se desea calcular las f.m.m.s. o tensiones magnéticas en el entrehierro en otros puntos, se deberá hacer un barrido con el recinto de integración, y así resulta:

$$\begin{aligned} &\textit{Contorno } a'b'c'd': && 2F_2 = 2Ni - Ni = Ni && \Rightarrow F_2 = +\frac{Ni}{2} \\ &\textit{Contorno } a''b''c''d'': && 2F_3 = Ni - 2Ni = -Ni && \Rightarrow F_3 = -\frac{Ni}{2} \\ &\textit{Contorno } a'''b'''c'''d''': && 2F_4 = -3Ni && \Rightarrow F_4 = -3\frac{Ni}{2} \end{aligned} \tag{2.52}$$

En las expresiones anteriores se han considerado las tensiones magnéticas positivas en aquellas zonas en las que las líneas de campo magnético se dirigen del rotor al estátor. Como era de esperar, los resultados obtenidos son acordes con los logrados aplicando el principio de superposición.

Un análisis de Fourier de la onda escalonada de la Figura 2.25*b* da como resultado para el fundamental de f.m.m., y que puede considerarse como aproximación de la onda real escalonada, la expresión siguiente:

$$\mathscr{F}(\theta) = \frac{4}{\pi} K_w \, 3F_m \cos\theta = \frac{4}{\pi} K_w \, 3\,\frac{Ni}{2} \cos\theta \tag{2.53}$$

El factor K_w tiene en cuenta el efecto de la distribución del devanado (en el epígrafe 2.9.2 se demostrará su valor aplicado al cálculo de f.e.m.s. de devanados distribuidos). La onda de f.m.m. sigue siendo una onda pulsatoria o estacionaria de amplitud constante y que se distribuye de forma sinusoidal por el entrehierro. Si se alimenta el devanado con una corriente alterna $i = I_m \cos \omega t$ el valor de la f.m.m. será de la forma:

$$\mathscr{F}(\theta, t) = F_m \cos\omega t \cos\theta \quad ; \quad F_m = \frac{4}{\pi} K_w \frac{3NI_m}{2} \tag{2.54}$$

que es análoga a la expresada en (2.47).

En general los devanados de las máquinas eléctricas están distribuidos en diferentes fases y polos. Si se considera una máquina de $2p$ polos y N_f espiras por fase distribuidas en varias bobinas, la f.m.m. resultante equivalente a (2.53) será:

$$\mathscr{F}(\theta) = \frac{4}{\pi} K_w \frac{N_f i}{2p} \cos\theta \tag{2.55}$$

Téngase en cuenta, para obtener este resultado, que si en cada fase hay *b* bobinas en serie por cada par de polos y es *N* el número de espiras que integran cada bobina, se podrá escribir:

$$N_f = b \cdot N \cdot p \quad \Rightarrow \quad bN = \frac{N_f}{p} \tag{2.56}$$

En (2.53) *b* era igual a 3, por lo que se puede pasar de (2.53) a (2.55) simplemente sustituyendo $3N$ por N_f/p.

2.8.3. F.m.m. producida por un devanado trifásico. Campos giratorios. Teorema de Ferraris

Vamos a estudiar ahora un caso que tiene una gran utilidad práctica en el funcionamiento de las máquinas eléctricas. Consideremos un sistema formado por tres devanados, colocados bien sea en el estátor o en el rotor, de tal forma que **estén desfasados entre sí 120° eléctricos** en el espacio, como se indica de una forma esquemática en la Figura 2.26. Se señalan tres grupos de bobinas cuyos principios son *A*, *B*, *C* (corrientes salientes del plano de la página) y sus finales son *A′*, *B′*, *C′* (corrientes entrantes).

Interesa calcular la f.m.m. que existe en un punto del entrehierro, determinado por el ángulo θ, respecto al eje del devanado *AA′* (fase *a*), debido a la contribución de los tres arrollamientos, al circular por ellos un sistema de **corrientes trifásicas equilibradas**, a saber:

$$i_a = I_m \cos\omega t \quad ; \quad i_b = I_m \cos(\omega t - 120°) \quad ; \quad i_c = I_m \cos(\omega t + 120°) \tag{2.57}$$

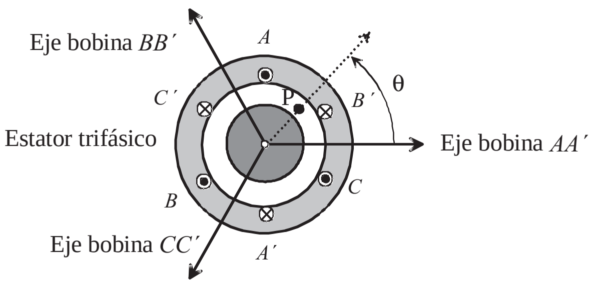


Figura 2.26. Tres devanados desfasados en el espacio 120° eléctricos.

Suponiendo, como ya se ha indicado en los casos anteriores, que la distribución de la f.m.m. de cada devanado sea sinusoidal en el espacio [véanse expresiones (2.48) y (2.55)], cada devanado producirá una f.m.m. pulsatoria o alternativa orientada en su eje respectivo. Como quiera que los ejes magnéticos están desfasados 120° eléctricos en el espacio, las f.m.m.s. que producen cada devanado en el punto P del entrehierro serán:

$$\mathcal{F}_a = F_m \cos \omega t \cos \theta \quad ; \quad \mathcal{F}_b = F_m \cos (\omega t - 120°) \cos (\theta - 120°)$$
$$\mathcal{F}_c = F_m \cos (\omega t + 120°) \cos (\theta + 120°) \tag{2.58}$$

Debe recalcarse que los devanados *llevan corrientes desfasadas 120° en el tiempo y que los bobinados están desfasados 120° eléctricos en el espacio*. En consecuencia la onda de f.m.m. resultante en el punto P será igual a la suma de las tres ondas pulsatorias anteriores:

$$\mathcal{F}(\theta, t) = \mathcal{F}_a + \mathcal{F}_b + \mathcal{F}_c \tag{2.59}$$

$$\mathcal{F}(\theta, t) = F_m[\cos \omega t \cos \theta + \cos (\omega t - 120°) \cos (\theta - 120°) +$$
$$+ \cos (\omega t + 120°) \cos (\theta + 120°)] \tag{2.60a}$$

Si se hace uso de la igualdad trigonométrica:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos (A - B) + \cos (A + B)] \tag{2.60b}$$

la ecuación (2.59) se convierte en:

$$\mathcal{F}(\theta, t) = \frac{3}{2} F_m \cos (\omega t - \theta) + \frac{F_m}{2}[\cos (\omega t + \theta) +$$
$$+ \cos (\omega t + \theta - 120°) + \cos (\omega t + \theta + 120°)] \tag{2.61}$$

Los tres sumandos contenidos entre corchetes representan tres fasores simétricos desfasados 120°, por lo que su resultante es nula. De este modo el resultado final es:

$$\mathcal{F}(\theta, t) = \frac{3}{2} F_m \cos (\omega t - \theta) = \frac{3}{2} F_m \cos (\omega t - p\alpha) \tag{2.62}$$

que representa la f.m.m. resultante en el entrehierro. Obsérvese que en un mismo punto del espacio (α = constante) la f.m.m. varía en función del tiempo según una sinusoide de amplitud $(3/2)F_m$ y en el mismo instante de tiempo (t = constante) está distribuida de forma sinusoidal en el entrehierro. En consecuencia (2.62) tiene el carácter de una onda que se mueve alrededor del entrehierro, es una f.m.m. giratoria.

Para comprender el significado físico de esta f.m.m., en la parte superior de la Figura 2.27 se ha representado la evolución con el tiempo de las tres corrientes. En la parte inferior se ha efectuado la suma haciendo uso de los fasores espaciales, lo que representa una gran ventaja didáctica, ya que se hacen más visibles las componentes de las f.m.m.s. individuales. Para comprender el *mensaje* de la Figura 2.27 vamos a considerar dos tiempos de estudio de los seis representados. Para $t = 0$, es decir, $\omega t = 0$, los valores de las corrientes en las bobinas, de acuerdo con (2.57), son:

$$i_a = I_m \quad ; \quad i_b = I_m \cos(-120°) = -I_m/2 \quad ; \quad i_c = I_m \cos(+120°) = -I_m/2 \tag{2.63}$$

Estos valores se pueden comprobar en las curvas de corrientes instantáneas de la parte superior de la Figura 2.27. De acuerdo con estos valores, se observa que en este tiempo $t = 0$, la f.m.m. $\mathscr{F}_a$ vale F_m y está orientada hacia el eje positivo de la fase a, mientras que las f.m.m.s. $\mathscr{F}_b$ y $\mathscr{F}_c$ valen $-F_m/2$ y por ser negativas están orientadas hacia los ejes negativos de las fases b y c. Se comprueba que el módulo de la suma de estos tres fasores es:

$$F_m + 2\left(\frac{F_m}{2}\right)\cos 60° = \frac{3}{2}F_m \tag{2.64}$$

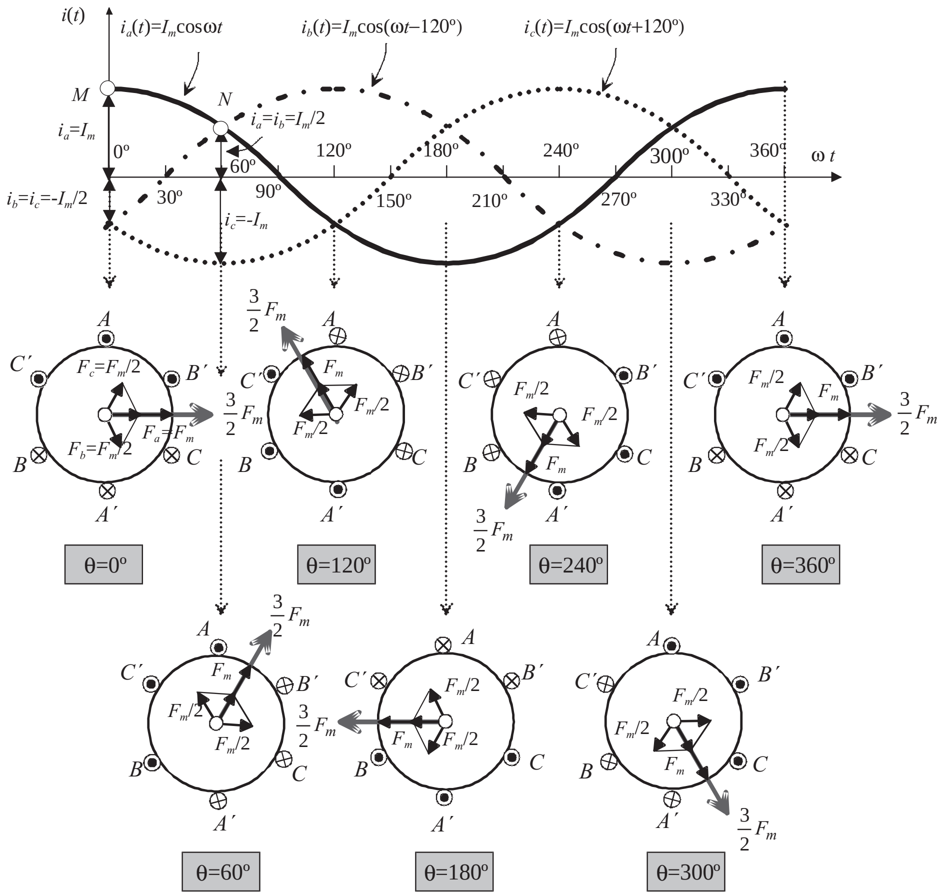


Figura 2.27. F.m.m. de un devanado trifásico alimentado con corrientes trifásicas.

El primer sumando de la ecuación representa el valor de la amplitud de F_a, mientras que el segundo evidencia la ley del paralelogramo para sumar F_b y F_c, que tienen una amplitud $F_m/2$ y forman 60° con la dirección de F_a. Evidentemente, la suma se orienta hacia el ángulo $\theta = 0°$. Si se pasa al instante $t = T/6$, es decir, $\omega t = 60°$, los valores de las corrientes son ahora:

$$i_a = i_b = \frac{I_m}{2} \quad ; \quad i_c = -I_m \tag{2.65}$$

Es por ello que las ondas de f.m.m. de las fases *a* y *b* son positivas (se orientan en el sentido positivo del eje de sus bobinas) y tienen una amplitud $F_m/2$, mientras que la f.m.m. de la fase *c*, de acuerdo con (2.65), será negativa y de magnitud F_m. Tal situación se ha plasmado en el segundo esquema de la parte inferior de la Figura 2.27. Se observa que la suma sigue siendo $3F_m/2$ pero que el máximo de la onda se produce ahora en $\theta = 60°$, valor que coincide con el lapso de tiempo transcurrido de $T/6$ segundos (es decir, $\omega t = 60°$).

En la Figura 2.27 se ha representado un ciclo completo de las corrientes en el tiempo y se observa gráficamente que corresponde a un ciclo completo de rotación del fasor de f.m.m. resultante. Es interesante destacar en esta figura que *el valor máximo de la f.m.m. resultante coincide con el eje del devanado que está llevando en ese momento la corriente máxima o de pico* (sea ésta positiva o negativa). Se dice entonces que se ha producido un **campo magnético giratorio** que presenta dos características fundamentales: ***1) tiene una amplitud constante,*** y ***2) gira a velocidad constante***.

Si la máquina es bipolar, que es el caso representado en la Figura 2.27, se observa que una variación de 360° eléctricos en el tiempo corresponde a un giro de 360° magnéticos en el espacio. Como quiera que para una máquina bipolar coinciden los grados magnéticos con los geométricos o mecánicos, cada ciclo de variación de la corriente provoca una revolución completa de la f.m.m. Si se realiza el devanado para cuatro polos, entonces serán necesarios dos ciclos de variación de la corriente para obtener una revolución en la f.m.m. En general, si la máquina tiene $2p$ polos la velocidad de giro del fasor espacial de f.m.m. será:

$$\Omega = \frac{\omega}{p} \tag{2.66}$$

y como quiera que si se denomina n a la velocidad de giro de la f.m.m. en r.p.m. y f a la frecuencia de las corrientes se cumple:

$$\Omega = 2\pi \frac{n}{60} \quad ; \quad \omega = 2\pi f \tag{2.67}$$

al sustituir en (2.66) resultará:

$$n = \frac{60 f}{p} \tag{2.68}$$

que se denomina **velocidad de sincronismo** del campo giratorio y que es función directa de la frecuencia y función inversa del número de pares de polos de la máquina.

Existe una forma alternativa (más analítica) para demostrar que la onda de f.m.m. expresada en (2.62) es giratoria. Como quiera que la ecuación de la f.m.m. producida por un devanado trifásico es:

$$\mathscr{F}(\theta, t) = \frac{3}{2} F_m \cos(\omega t - \theta) \tag{2.69}$$

al considerar un observador que viaje con la onda en un punto de fase constante θ_0, que para ser más concretos puede ser incluso la cresta de la onda, en la que se cumple $\theta_0 = 0$, la posición de tal observador viene definida por la condición:

$$\omega t - \theta = \theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}(\theta, t) = (3/2)F_m \text{ (cresta de la onda)} \quad ; \quad \theta = \omega t \tag{2.70}$$

lo que significa que el punto álgido de la onda en la que se encuentra el observador se *desplaza alrededor de la circunferencia del entrehierro*, ya que su posición θ depende del tiempo*. La velocidad de la onda se puede obtener derivando la última expresión (2.70) respecto del tiempo, y así resulta:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \tag{2.71}$$

Como quiera además que según (2.1) el ángulo magnético $\theta = p\alpha$, siendo α el ángulo geométrico o mecánico, resultará:

$$\omega - p\frac{d\alpha}{dt} = 0 \tag{2.72}$$

pero como quiera que la derivada de la ecuación anterior representa la velocidad angular mecánica de movimiento Ω de la onda se tendrá:

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega}{p} \tag{2.73}$$

y teniendo en cuenta (2.67) se obtiene una velocidad en r.p.m.:

$$n = \frac{60f}{p} \tag{2.74}$$

que es el mismo valor que se calculó en (2.68). Si se considera el caso de España, donde la frecuencia es de 50 Hz, las velocidades de sincronismo que se obtienen según sea el número de polos (2, 4, 6, 8, etc.) son 3.000, 1.500, 1.000, 750, etc., respectivamente.

El estudio anterior constituye la demostración del **teorema de Ferraris**, e indica la posibilidad de producir un **campo magnético giratorio**, a partir de un sistema de tres devanados fijos desfasados **120° eléctricos** en el espacio, por los que se introducen corrientes desfasadas **120° en el tiempo**. (Obsérvese la coincidencia de los grados de desfase tanto en el espacio como en el tiempo.)

El teorema es válido y se puede generalizar para un sistema de m arrollamientos desfasados en el espacio **$2\pi/m$ radianes** eléctricos, por los que circulan corrientes desfasadas **$2\pi/m$ radianes** en el tiempo. El resultado que se obtiene, equivalente a (2.62), es ahora:

$$\mathscr{F}(\theta, t) = \frac{m}{2} F_m \cos(\omega t - \theta) \tag{2.75}$$

---

* Para mayor claridad y a modo de comparación: es como cuando un windsurfista se monta con su tabla en la cresta de una ola del mar: la ola (onda) se mueve hacia la playa, sin embargo el windsurfista (si es lo suficientemente hábil) varía su posición absoluta respecto de la playa, pero conservando su situación encima de la cresta de la ola, es decir, sobre el mismo punto de ella.

Para el caso particular de sistemas bifásicos, se dispone de dos devanados a 90° eléctricos en el espacio con corrientes desfasadas 90° en el tiempo. El resultado (2.75) es válido haciendo $m = 2$.

Es muy importante que el lector asimile con profundidad el teorema de Ferraris, ya que es la base del funcionamiento de las máquinas eléctricas de c.a. Es indudable que el resultado es sorprendente: *con tres devanados que cada uno de ellos produce un campo alternativo se ha logrado, al combinarlos adecuadamente en el espacio y con corrientes apropiadas en el tiempo, un campo magnético de amplitud constante (circular) y que es giratorio, o de otro modo, el fenómeno es equivalente en cierta manera a un imán permanente que se moviera a la velocidad de sincronismo.*

Otro aspecto a destacar en este teorema es que el sentido del campo giratorio puede invertirse, si se permutan entre sí las corrientes de dos cualesquiera de las fases que constituyen el sistema trifásico. Por ejemplo, si en el caso de la Figura 2.26 se intercambian las corrientes de los devanados b y c expresadas en (2.57) se tendrá ahora:

$$i_a = I_m \cos \omega t \quad ; \quad i_b = I_m \cos (\omega t + 120°) \quad ; \quad i_c = I_m \cos (\omega t - 120°) \tag{2.76}$$

y operando de un modo similar al demostrado anteriormente se obtiene una f.m.m. total análoga a (2.62) y que obedece a la ecuación:

$$\mathscr{F}(\theta, t) = \frac{3}{2} F_m \cos (\omega t + \theta) = \frac{3}{2} F_m \cos (\omega t + p\alpha) \tag{2.77}$$

que representa un campo magnético giratorio de amplitud constante $3F_m/2$ y que gira a una velocidad:

$$\Omega = -\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\omega}{p} \quad ; \quad n = -\frac{60f}{p} \tag{2.78}$$

es decir, de sentido contrario al original y de la misma magnitud.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

En un laboratorio de Electrotecnia se puede comprobar fácilmente la existencia del campo giratorio de una forma muy simple si se dispone de un motor asíncrono trifásico. Para ello debe desmontarse el motor y separar el rotor del estátor. Se introduce a continuación una bola de acero (por ejemplo, de un viejo cojinete) dentro del estátor y se aplica a éste una tensión trifásica alterna regulable mediante un autotransformador trifásico (la tensión aplicada debe ser del orden de 1/10 a 1/5 de la tensión asignada). Se observará que la bola empieza a rodar dentro de la periferia del estátor siguiendo al campo magnético giratorio que se forma. Al invertir dos fases de la alimentación, se comprobará que la bola rueda en sentido inverso. Este fenómeno, que suele causar un fuerte impacto a los estudiantes, se emplea en los talleres de reparación de devanados eléctricos para comprobar que el rebobinado se ha hecho correctamente. La bola de cojinete se puede sustituir por un bote metálico al que previamente se le ha incorporado un eje, y se comprobará que el bote gira arrastrado por el campo magnético giratorio. Éste es el principio de funcionamiento del motor asíncrono trifásico, que se estudia con detalle en el Capítulo 4.

***Nota adicional:** Si se realiza la experiencia de la bola y a continuación la del bote, se observa que éste se mueve en sentido inverso al de la bola; esto se debe a que la bola **rueda** sobre la periferia del estátor, mientras que el bote **gira** sobre su eje.*

2.8.4. Relación entre un campo alternativo y un campo giratorio. Teorema de Leblanc

Una vez conocido el funcionamiento de un campo giratorio podemos dar una nueva interpretación al campo alternativo producido por una bobina. Si se parte de la expresión (2.47) de la f.m.m. producida por un devanado concentrado alimentado con corriente alterna:

$$\mathscr{F}(\theta, t) = F_m \cos \omega t \cos \theta = F_m \cos \omega t \cos p\alpha \tag{2.79}$$

teniendo en cuenta la igualdad trigonométrica (2.60), la ecuación anterior se transforma en:

$$\mathscr{F}(\theta, t) = \frac{F_m}{2} \cos (\omega t - p\alpha) + \frac{F_m}{2} \cos (\omega t + p\alpha) \tag{2.80}$$

El primer sumando anterior, que es similar a (2.62), corresponde a una onda de f.m.m. rotativa de amplitud $F_m/2$ que gira en sentido directo (es decir, para el ángulo α positivo de la Figura 2.26 y que corresponde al contrario a las agujas del reloj) a velocidad angular $\Omega = +\omega/p$ (es decir, $n = +60f/p$). El segundo sumando de (2.80) es una onda de f.m.m. rotativa de amplitud $F_m/2$ que gira en sentido inverso a velocidad angular $\Omega = -\omega/p$ (es decir, $n = -60f/p$).

En definitiva, *la f.m.m. pulsatoria (2.79) producida por una bobina recorrida por c.a. puede representarse pos dos f.m.m.s. rotativas que giran en sentidos contrarios a velocidades:*

$$\Omega = \pm\frac{\omega}{p} \quad \Rightarrow \quad n = \pm\frac{60f}{p} \tag{2.81}$$

La definición anterior constituye el **teorema de Leblanc**. El hecho de que la f.m.m. de un devanado monofásico excitado por c.a. se pueda descomponer en dos f.m.m.s. rotativas de sentidos contrarios es un paso conceptual importante para comprender el funcionamiento del motor de inducción monofásico, como el lector comprobará al estudiar el Capítulo 4.

AMPLÍE SUS CONOCIMIENTOS

1. F.m.m. producida por un devanado trifásico alimentado por corrientes desequilibradas. Campo giratorio elíptico

Cuando el devanado trifásico mostrado en la Figura 2.26 está recorrido por corrientes desequilibradas sinusoidales, la determinación de la f.m.m. resultante requiere el empleo de las componentes simétricas. De acuerdo con el teorema de Fortescue, tres corrientes desiguales (en general tanto en magnitud como en fase) i_a, i_b e i_c se pueden considerar como la superposición de tres sistemas trifásicos de corrientes equilibradas, denominados directo o de secuencia positiva, inverso o de secuencia negativa y homopolar o de secuencia cero, de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} i_a &= I_{m(d)} \cos (\omega t + \varphi_d) + I_{m(i)} \cos (\omega t + \varphi_i) + I_{m(0)} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ i_b &= I_{m(d)} \cos (\omega t + \varphi_d - 120°) + I_{m(i)} \cos (\omega t + \varphi_i + 120°) + I_{m(0)} \cos (\omega t + \varphi_0) \\ i_c &= I_{m(d)} \cos (\omega t + \varphi_d + 120°) + I_{m(i)} \cos (\omega t + \varphi_i - 120°) + I_{m(0)} \cos (\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \tag{1}$$

En la Figura 2.28 se muestra la composición fasorial correspondiente a las ecuaciones (1). $I_{m(d)}$ representa el valor máximo de la corriente de secuencia directa; $I_{m(i)}$ es el valor máximo de la corriente de secuencia inversa e $I_{m(0)}$ es el valor máximo de la corriente de secuencia homopolar.

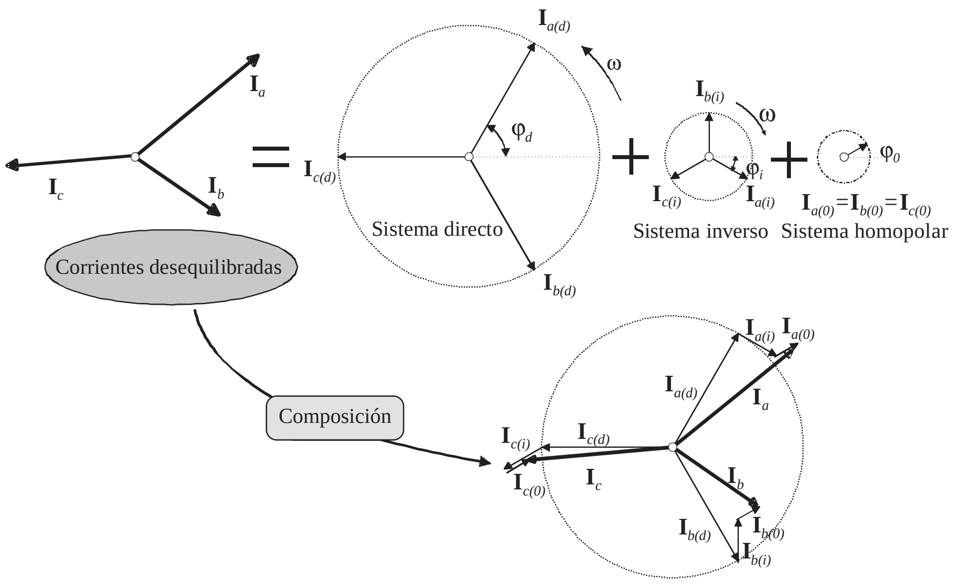


Figura 2.28. Demostración gráfica del teorema de Fortescue.

El sistema de corrientes de secuencia directa al pasar por las tres fases de un devanado trifásico, produce una f.m.m. resultante en un punto P del entrehierro (véase Figura 2.26) que forma $\theta = p\alpha$ grados eléctricos con el eje del devanado AA' , que de acuerdo con la expresión (2.62) tiene un valor:

$$\mathscr{F}_d(\theta, t) = F_{m(d)} \cos(\omega t + \varphi_d) \cos p\alpha + F_{m(d)} \cos(\omega t + \varphi_d - 120°) \cos(p\alpha - 120°) +$$
$$+ F_{m(d)} \cos(\omega t + \varphi_d + 120°) \cos(p\alpha + 120°) \tag{2}$$

y cuyo resultado es análogo al señalado en (2.62):

$$\mathscr{F}_d(\theta, t) = \frac{3}{2} F_{m(d)} \cos(\omega t + \varphi_d - p\alpha) \tag{3}$$

Las expresiones de $F_{m(d)}$ y de la velocidad del campo giratorio son:

$$F_{m(d)} = \frac{4}{\pi} K_w \frac{N_f I_{m(d)}}{2p} \quad ; \quad n = +\frac{60f}{p} \tag{4}$$

De un modo análogo el sistema de corrientes de secuencia inversa produce una f.m.m. resultante en el entrehierro de valor:

$$\mathscr{F}_i(\theta, t) = \frac{3}{2} F_{m(i)} \cos(\omega t + \varphi_i + p\alpha) \tag{5}$$

La expresiones de $F_{m(d)}$ y de la velocidad del campo giratorio son:

$$F_{m(i)} = \frac{4}{\pi} K_w \frac{N_f I_{m(i)}}{2p} \quad ; \quad n = -\frac{60f}{p} \tag{6}$$

El sistema homopolar no produce ninguna f.m.m. resultante ya que se cumple:

$$\mathscr{F}_0(\theta, t) = F_{m(0)} \cos(\omega t + \varphi_0)[\cos\theta + \cos(\theta - 120°) + \cos(\theta + 120°)] = 0 \tag{7}$$

Ya que la expresión entre corchetes representa la suma de tres fasores idénticos en magnitud pero desfasados 120° por lo que suma es cero.

En definitiva la f.m.m. resultante o total se compone de una f.m.m directa (3) y otra inversa (5), es decir:

$$\mathcal{F}_t(\theta, t) = \frac{3}{2} F_{m(d)} \cos(\omega t + \varphi_d - p\alpha) + \frac{3}{2} F_{m(i)} \cos(\omega t + \varphi_i + p\alpha) \tag{8}$$

En la Figura 2.29 se muestra la suma fasorial correspondiente a ambas f.m.m.s. Para mayor claridad de la construcción se ha mostrado la evolución de los fasores espaciales de f.m.m. directa e inversa en seis períodos de tiempo separados $T/6$ segundos y que son: $t = 0$, $T/6$; $T/3$; $T/2$; $2T/3$ y $5T/6$, siendo T el período de la corriente sinusoidal aplicada. Obsérvese que en el caso de la f.m.m. directa el fasor gira en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj) a una velocidad angular ω/p rad/s, que corresponde a una velocidad en r.p.m. $n = 60f/p$, mientras que la f.m.m inversa gira en sentido contrario a la misma velocidad. Los radios correspondientes a cada círculo representan los valores máximos señalados en la expresión (8). Se observa en la parte inferior de la Figura 2.29, en la que se ha realizado la suma de los fasores espaciales anteriores, que el lugar geométrico del fasor espacial de la f.m.m resultante es una elipse. Para facilitar la comprensión de este diagrama al lector, se ha especificado con detalle la suma de ambos fasores en el tiempo $t = 0$. Los puntos de la elipse A y A' son aquéllos en los que los fasores directo e inverso coinciden en dirección y sentido y corresponden a los puntos del semieje mayor de la elipse en los que la f.m.m. vale $3(F_{m(d)} + F_{m(i)})/2$. Los puntos de la elipse B y B' son aquéllos en los que los fasores directo e inverso coinciden en dirección pero tienen sentido contrario y corresponden a los puntos del semieje menor de la elipse en los que la f.m.m. vale

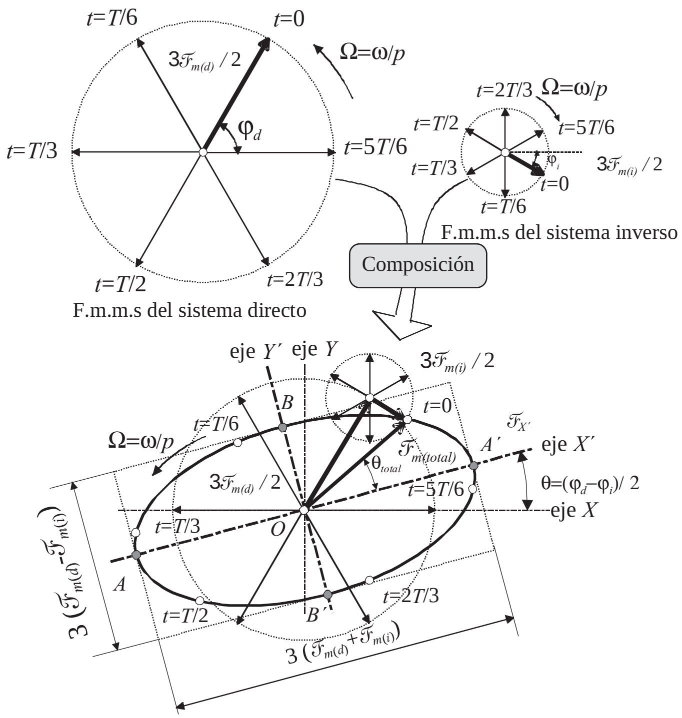


Figura 2.29. Campo elíptico producido por un sistemas de corrientes desequilibradas.

$3(F_{m(d)} - F_{m(i)})/2$. En definitiva la ecuación de la elipse respecto de los ejes X' e Y' viene expresada por:

$$\frac{F_{x'}^2}{\left[\frac{3}{2}(F_{m(d)}+F_{m(i)})\right]^2}+\frac{F_{y'}^2}{\left[\frac{3}{2}(F_{m(d)}-F_{m(i)})\right]^2}=1 \tag{9}$$

El ángulo que forman los ejes OX y OX' es $\theta=(\varphi_d-\varphi_i)/2$. El afijo de la f.m.m resultante en el entrehierro se mueve con una velocidad media constante en sentido directo que es igual a ω/p en rad/s, sin embargo la velocidad instantánea es variable, siendo máxima cuando la amplitud es mínima (puntos B y B') y es mínima cuando la amplitud es máxima (puntos A y A'). El lector puede comprobar lo anterior de una forma intuitiva, basta observar en la Figura 2.29 que entre $t=0$ y $t=T/6$ el recorrido angular es mayor que entre $t=T/3$ y $t=T/2$, es decir en el mismo espacio de tiempo el arco descrito por la f.m.m. resultante es mayor en el primer caso que en el segundo.

2. F.m.m. producida por un devanado bifásico

Si se dispone de la máquina eléctrica mostrada en la Figura 2.30 que consiste en dos devanados desfasados 90° eléctricos en el espacio y alimentados por corrientes bifásicas, es decir:

$$i_a = I_m \cos \omega t \quad ; \quad i_b = I_m \cos(\omega t - 90°) = I_m \operatorname{sen} \omega t \tag{10}$$

Las f.m.m.s que produce cada uno de los devanados anteriores **en sus ejes respectivos** son de la forma:

$$\mathcal{F}_a = F_m \cos \omega t \quad ; \quad \mathcal{F}_b = F_m \operatorname{sen} \omega t \tag{11}$$

En la Figura 2.30 se muestra la composición vectorial de estas dos f.m.m.s y que dan lugar a una resultante o total:

$$\mathcal{F}_t = \sqrt{\mathcal{F}_a^2 + \mathcal{F}_b^2} = \sqrt{F_a^2 \cos^2 \omega t + F_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t} = F_m \tag{12}$$

es decir la f.m.m. total tiene una amplitud constante y de valor F_m. El ángulo $\theta = p\alpha$ que esta resultante forma con el eje de abscisas (eje de la bobina AA'), de acuerdo con el diagrama vectorial de la Figura 2.30, cumple la relación siguiente:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mathcal{F}_b}{\mathcal{F}_a} = \frac{F_m \operatorname{sen} \omega t}{F_m \cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t \tag{13}$$

por lo que resulta:

$$\theta = p\alpha = \omega t \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega}{p} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{60f}{p} \tag{14}$$

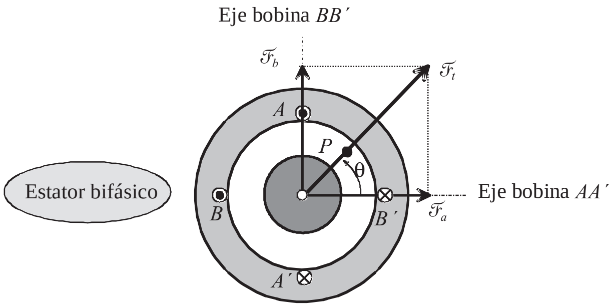


Figura 2.30. Dos devanados desfasados en el espacio 90° eléctricos.

Es decir la f.m.m. resultante tiene amplitud constante y es rotativa moviéndose a la velocidad de sincronismo definida por la expresión (14).

3. F.m.m. producida por un devanado trifásico

Si se dispone de la máquina eléctrica mostrada en la Figura 2.31 que consiste en tres devanados desfasados 120° eléctricos en el espacio y alimentados por corrientes trifásicas equilibradas, es decir:

$$i_a = I_m \cos \omega t \quad ; \quad i_b = I_m \cos (\omega t - 120°) \quad ; \quad i_c = I_m \cos (\omega t + 120°) \tag{15}$$

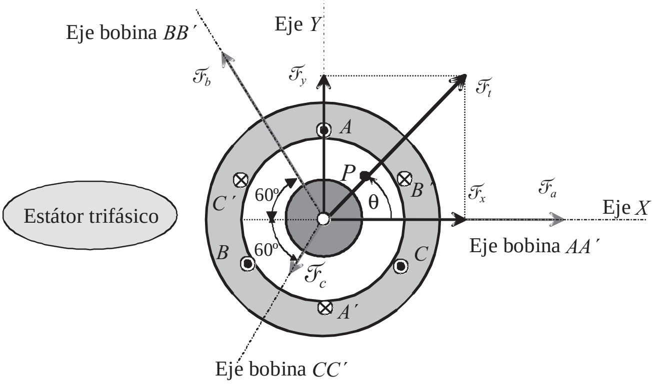


Figura 2.31. Tres devanados desfasados en el espacio 120° eléctricos.

Se puede calcular la f.m.m resultante por el mismo procedimiento geométrico que en el caso anterior y que es distinto al empleado en el desarrollo analítico utilizado en el epígrafe 2.8.3. Evidentemente las f.m.m.s que produce cada uno de los devanados anteriores **en sus ejes respectivos** son de la forma:

$$\mathcal{F}_a = F_m \cos \omega t \quad ; \quad \mathcal{F}_b = F_m \cos (\omega t - 120°) \quad ; \quad \mathcal{F}_c = F_m \cos (\omega t + 120°) \tag{16}$$

Proyectando cada una de las f.m.m.s anteriores en los ejes cartesianos *XY*, resulta:

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_a - \mathcal{F}_b \cos 60° - \mathcal{F}_c \cos 60° \quad ; \quad \mathcal{F}_y = \mathcal{F}_b \operatorname{sen} 60° - \mathcal{F}_c \operatorname{sen} 60° \tag{17}$$

y que al operar da lugar a:

$$\mathcal{F}_x = \frac{3}{2} F_m \cos \omega t \quad ; \quad \mathcal{F}_x = \frac{3}{2} F_m \operatorname{sen} \omega t \tag{18}$$

Por lo que la f.m.m resultante tiene un valor:

$$\mathcal{F}_t = \sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2} = \frac{3}{2}\sqrt{F_m^2 \cos^2 \omega t + F_m^2 \operatorname{sen}^2 \omega t} = \frac{3}{2} F_m \tag{19}$$

es decir la f.m.m. resultante tiene una amplitud constante y de valor $3F_m/2$. El ángulo $\theta = p\alpha$ que esta resultante forma con el eje de abscisas (eje de la bobina *AA*′), de acuerdo con el diagrama vectorial de la Figura 2.31, cumple la relación siguiente:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\mathcal{F}_y}{\mathcal{F}_x} = \frac{\frac{3}{2} F_m \operatorname{sen} \omega t}{\frac{3}{2} F_m \cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t \tag{20}$$

por lo que resulta:

$$\theta = p\alpha = \omega t \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega}{p} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{60f}{p} \tag{21}$$

Es decir la f.m.m. resultante tiene amplitud constante y es rotativa moviéndose a la velocidad de sincronismo definida por la expresión (21). Estos resultados coinciden con lo demostrado por vía analítica en el epígrafe 2.8.3.

2.9. F.E.M. INDUCIDA EN UN DEVANADO DE UNA MÁQUINA ELÉCTRICA

2.9.1. Generalidades

En los devanados de las máquinas eléctricas se inducen f.e.m.s. debidas a las variaciones del flujo enlazado por los arrollamientos. Estos cambios son el resultado de:

a) La variación con el tiempo de la magnitud del flujo, lo que da lugar a la llamada **f.e.m. de pulsación o de acción transformadora:** e_p.
b) Del movimiento del circuito inducido, respecto del flujo, resultando una **f.e.m. de rotación**, velocidad o movimiento: e_r.
c) De la combinación de los dos casos anteriores, apareciendo las f.e.m.s. e_p y e_r.

El cálculo de la f.e.m. se realiza en cada caso, aplicando la ley de Faraday, y para analizar este problema de generación se va a considerar el prototipo de máquina eléctrica que se indica en la Figura 2.32, constituido por un devanado inductor 1, y un arrollamiento inducido 2, que consiste en un bobinado de N_2 espiras concentradas de paso diametral. Ambos devanados están situados en el estátor y en el rotor, respectivamente, girando éste a una velocidad Ω rad/s. Se van a considerar además las siguientes hipótesis:

1) El flujo inductor Φ_1 varía de forma sinusoidal con el tiempo; para ello se introduce en el estátor una corriente alterna de frecuencia f_1 y pulsación ω_1.
2) El flujo inductor se distribuye de forma sinusoidal por la periferia del entrehierro.

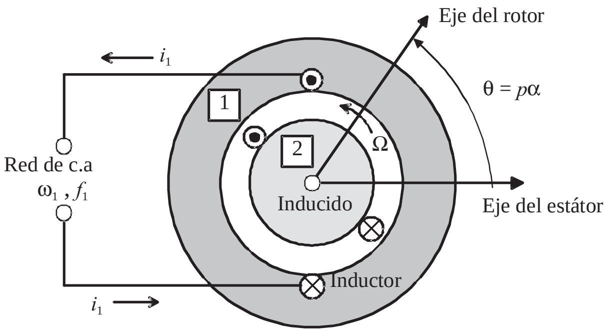


Figura 2.32. Máquina eléctrica elemental con dos devanados.

3) El eje del devanado del rotor tiene una posición respecto del eje de flujo del estátor, definido por la expresión $\alpha = \Omega t$, es decir, en $t = 0$ se tiene $\alpha = 0$ (α es el número de grados geométricos Ω es la velocidad angular mecánica en rad/s).
4) El bobinado del inducido está en circuito abierto, para considerar únicamente el efecto de generación de f.e.m.; la frecuencia de la señal obtenida se denominará f_2, que corresponde a una pulsación ω_2.

De acuerdo con las hipótesis anteriores, y teniendo en cuenta la expresión (2.47) de la onda de f.m.m. producida por un devanado concentrado, si para simplificar suponemos que la reluctancia del circuito magnético es constante, al aplicar la ley de Hopkinson se obtendrá una expresión para el flujo distribuido en el entrehierro similar a la de la f.m.m., es decir:

$$\Phi_1 = \Phi_m \cos \omega t \cos p\alpha \tag{2.82}$$

donde Φ_m expresa el valor máximo de flujo. En consecuencia, la f.e.m. inducida será:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = N_2\omega_1\Phi_m \operatorname{sen} \omega_1 t \cos p\alpha + N_2 p\Omega\Phi_m \cos \omega_1 t \operatorname{sen} p\alpha \tag{2.83}$$

El primer término del segundo miembro corresponde a la f.e.m. debida a la **pulsación** de flujo, mientras que el segundo término corresponde a la f.e.m. debida a la **rotación** del inducido.

La expresión (2.83) se puede escribir de la siguiente manera:

$$e_2 = \frac{N_2\omega_1\Phi_m}{2}[\operatorname{sen}(\omega_1 + p\Omega)t + \operatorname{sen}(\omega_1 - p\Omega)t] + \\ + \frac{N_2 p\Omega\Phi_m}{2}[\operatorname{sen}(\omega_1 + p\Omega)t - \operatorname{sen}(\omega_1 - p\Omega)t] \tag{2.84}$$

expresión que responde a la forma general:

$$e_2 = \frac{N_2\Phi_m}{2}[(\omega_1 + p\Omega)\operatorname{sen}(\omega_1 + p\Omega)t + (\omega_1 - p\Omega)\operatorname{sen}(\omega_1 - p\Omega)t] \tag{2.85}$$

La ecuación anterior indica que la f.e.m. inducida en el rotor, e_2, contiene pulsaciones de valor ω_2 que responden a la expresión general:

$$\omega_2 = \omega_1 \pm p\Omega \tag{2.86}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 \quad ; \quad \omega_2 = 2\pi f_2 \quad ; \quad \Omega = 2\pi\frac{n}{60} \tag{2.87}$$

la expresión (2.86) se transforma en:

$$f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \tag{2.88}$$

ecuación muy importante que relaciona las frecuencias de los circuitos inductor e inducido con la velocidad del rotor y el número de polos. Esta expresión permitirá en el apartado 2.10 realizar una clasificación general de las máquinas eléctricas.

La ecuación general de la f.e.m. definida por (2.83) permite analizar los dos casos particulares siguientes:

a) Inducido fijo. Flujo variable

En este caso $\Omega = 0$, ya que el devanado del rotor es estacionario, y de acuerdo con (2.83) la f.e.m. resultante, debida a la **pulsación** del flujo, será:

$$e_2 = N_2 \omega_1 \Phi_m \operatorname{sen} \omega_1 t \cos p\alpha \tag{2.89}$$

esta situación corresponde a una máquina denominada **regulador de inducción monofásico**; existe un rotor cuya posición se puede variar respecto al estátor, y se observa que cuando $p\alpha = \pi/2$ la f.e.m. resultante es nula, lo cual puede comprobarse en la Figura 2.32, ya que el rotor no abraza ningún flujo.

También corresponde al caso del **transformador** para el cual $p\alpha = 0$; es decir, todo el flujo producido por el inductor, que ahora se denomina **primario**, es abrazado por el inducido, que recibe el nombre **secundario**. En el caso real, no es necesario recurrir a la disposición de la Figura 2.32, y ambos devanados están arrollados sobre el mismo núcleo magnético sin necesidad de entrehierros. La f.e.m. inducida tendrá una expresión instantánea definida por:

$$e_2 = N_2 \omega_1 \Phi_m \operatorname{sen} \omega_1 t \tag{2.90}$$

que corresponde a la (2.89) cuando $p\alpha = 0$. El valor eficaz de la f.e.m. será:

$$E_2 = \frac{N_2 \omega_1 \Phi_m}{\sqrt{2}} \tag{2.91}$$

que teniendo en cuenta (2.87) da lugar a:

$$E_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N_2 f_1 \Phi_m = 4{,}44\ N_2 f_1 \Phi_m \tag{2.92}$$

expresión importante y que se empleará en el estudio de los transformadores. De acuerdo con (2.88) se observa que las frecuencias de las corrientes del inducido f_2 coinciden con las del inductor f_1, es decir, $f_2 = f_1$.

b) Inducido móvil. Flujo constante

En este caso $\omega_1 = 0$, lo que indica que el devanado inductor está alimentado por una c.c.; de acuerdo con la expresión general (2.83), la f.e.m. resultante, debida al **movimiento** del inducido, será:

$$e_2 = N_2 p \Omega \Phi_m \operatorname{sen} p\alpha \tag{2.93}$$

y teniendo en cuenta que $\alpha = \Omega t$ es:

$$e_2 = N_2 p \Omega \Phi_m \operatorname{sen} p\Omega t \tag{2.94}$$

que expresa una f.e.m. de valor eficaz:

$$E_2 = \frac{N_2 p \Omega \Phi_m}{\sqrt{2}} \tag{2.95}$$

y cuya pulsación vale:

$$\omega_2 = p\Omega \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{np}{60} \tag{2.96}$$

que está de acuerdo con la ecuación general (2.88), que relaciona las frecuencias del inductor e inducido. Las máquinas que responden a estas consideraciones se denominan **síncronas**, y deben su nombre a que según (2.96) la frecuencia del inducido es proporcional a la velocidad del rotor (como ya se verá más tarde, las máquinas de c.c. pertenecen también a esta clasificación, pero debido a la rectificación mecánica del colector de delgas, la expresión de la f.e.m. difiere de la expresada aquí).

La expresión (2.95) de la f.e.m. para las máquinas síncronas puede tomar otra forma si se tiene en cuenta que $\Omega = 2\pi n/60$, resultando:

$$E_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \frac{pn}{60} N_2 \Phi_m = 4{,}44 \frac{pn}{60} N_2 \Phi_m \tag{2.97}$$

y teniendo en cuenta la identidad (2.96), resulta:

$$E_2 = 4{,}44\ N_2 f_2 \Phi_m \tag{2.98}$$

En realidad las expresiones anteriores vienen afectadas por unos coeficientes que tienen en cuenta la forma real del flujo y la distribución del devanado, como se demostrará en el epígrafe 2.9.2.

Ejemplo de aplicación 2.2

Se tiene un transformador monofásico, constituido por dos devanados, primario y secundario, colocados en un núcleo magnético de sección uniforme S = 10 cm², como indica la Figura 2.33. Los devanados primario y secundario tienen 400 y 639 espiras, respectivamente. El primario se conecta a una red de 127 V, 50 Hz. En el supuesto de despreciar la caída de tensión del primario, calcular: 1) Densidad de flujo máxima existente en el núcleo. 2) F.e.m. inducida en el secundario.

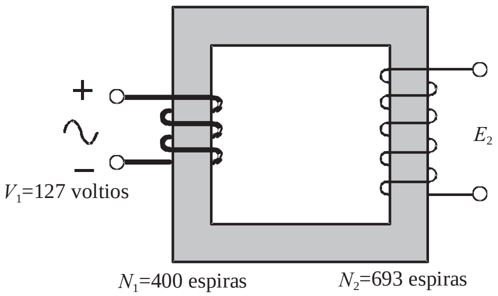


Figura 2.33.

Solución

1. Al despreciar la caída de tensión en el devanado primario se cumple $V_1 = E_1$, y de acuerdo con la expresión (2.92) aplicada al primario, se cumplirá: $V_1 = E_1 = 4{,}44\ N_2 f_1 \Phi_m$, de donde se deduce:

$$\Phi_m = \frac{127}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 400} = 1{,}43 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

y como quiera que $\Phi_m = B_m . S$, se tendrá:

$$B = \frac{1{,}43 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1{,}43\ \text{Teslas}$$

2. Al aplicar (2.92) al secundario se obtiene: $E_2 = 4{,}44\ N_2 f_1 \Phi_m$, que al sustituir valores, resulta:

$$E_2 = 4{,}44 \cdot 693 \cdot 50 \cdot 1{,}43 \cdot 10^{-3} = 220\ \text{V}$$

*2.9.2. Factores que afectan a la f.e.m. inducida en un devanado

En el epígrafe anterior se ha demostrado la expresión general de la f.e.m. que aparece en un devanado; el análisis ha partido de unas hipótesis que facilitaban el cálculo, pero que en la realidad no son correctas. Las máquinas eléctricas rotativas reales, a diferencia del prototipo de máquina indicado en la Figura 2.32, muestran las siguientes diferencias:

a) El flujo inductor no se reparte siempre de una forma sinusoidal por el entrehierro.
b) El devanado no se encuentra concentrado, sino que está distribuido en ranuras a lo largo de la periferia de la máquina.
c) Los arrollamientos no son siempre de paso diametral, sino que presentan acortamientos de paso, con objeto de mejorar la onda de f.e.m. inducida.

Cada uno de estos *inconvenientes* que aparecen en las máquinas reales introduce un factor, por el cual la f.e.m. inducida, en la práctica, es menor que la calculada anteriormente. De acuerdo con las diferencias apuntadas aparecen los factores de reducción correspondientes, denominados: factor de forma, factor de distribución y factor de paso o acortamiento. Veamos el significado y cálculo de cada uno de ellos:

1. Factor de forma

Este factor aparece debido a que el flujo no tiene una distribución sinusoidal en el entrehierro. Si se considera el prototipo de máquina de la Figura 2.32, en el supuesto de que el flujo inductor sea constante y de valor máximo Φ_m, aparecerá una f.e.m. cuyo valor medio vendrá expresado por:

$$E_m = N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N_2 \frac{\Phi_m - (-\Phi_m)}{T/2} = 4\, N_2 f_2 \Phi_m \tag{2.99}$$

donde T indica el tiempo que tarda en recorrer un ciclo magnético completo (en una máquina con $2p = 2$ coincide con el tiempo de una revolución completa del rotor). El cálculo expresado en (2.99) se ha realizado observando el flujo que barre el inducido en un semiperíodo. Se observa que la expresión anterior no tiene en cuenta la forma de este flujo para calcular el valor medio de la f.e.m.; sin embargo, para calcular el valor eficaz de la misma deberá multiplicarse (2.99) por un coeficiente que **sí** tiene en cuenta esta forma de onda, que se denomina **factor de forma** y que se define como:

$$K_f = \frac{\textit{valor eficaz}}{\textit{valor medio}} \tag{2.100}$$

de este modo, teniendo en cuenta (2.99) y (2.100), la expresión de la f.e.m. eficaz inducida será:

$$E = 4\, K_f N_2 f_2 \Phi_m \tag{2.101}$$

en el caso de que la onda de flujo se reparta de forma sinusoidal por el entrehierro, se cumplirá:

$$K_f = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2}} B_{\text{máx}}\right]}{\left[\frac{2}{\pi} B_{\text{máx}}\right]} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11 \tag{2.102}$$

donde se ha tenido en cuenta las expresiones del valor medio y eficaz de una onda alterna y que conoce el lector de un Curso de Teoría de Circuitos.

En la práctica se consigue que la distribución sea sinusoidal aumentando la curvatura de los polos inductores frente a la superficie del inducido. En las máquinas con inductor cilíndrico se emplean técnicas de distribución del devanado, como ya se ha indicado en el epígrafe 2.8.2.

2. Factor de distribución

En el epígrafe anterior se ha calculado la f.e.m. producida por un devanado concentrado y de paso diametral. En la práctica el arrollamiento está distribuido en ranuras a lo largo de toda la periferia de tal forma que las f.e.m.s. del bobinado van desfasadas y su suma no es aritmética sino vectorial.

Si denominamos q al número de ranuras por polo y fase de la máquina, m al número de fases y $2p$ al número de polos, el número de ranuras de la máquina designado por K será:

$$K = q\ m\ 2p \qquad (2.103)$$

El ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas será:

$$\gamma = \frac{360°}{K} \qquad (2.104)$$

que corresponde a un ángulo eléctrico $p\gamma$.

Supongamos que se trata de calcular la f.e.m. debida a las tres bobinas de la misma fase que se indican en la Figura 2.34, donde cada bobina tiene N espiras.

Las f.e.m.s. de cada bobina serán iguales pero irán desfasadas en el tiempo, lo mismo que van en el espacio, resultando el diagrama fasorial de la Figura 2.35; el número de bobinas existentes es en general q y las f.e.m.s. parciales están representadas por vectores iguales $E_{\text{bob}} = |AB| = |BC| = |CD|$.

Todos los extremos de los vectores que representan las f.e.m.s. se encuentran situados sobre una circunferencia de radio genérico R. La f.e.m. resultante E_f debida a todo el devanado está representada por el vector AD y su magnitud es:

$$E_f = |AD| = 2|QD| = 2R \text{ sen } \frac{qp\gamma}{2} \qquad (2.105)$$

Si se llega a considerar que el devanado está concentrado, la f.e.m. teórica hubiera sido:

$$E_t = qE_{\text{bobina}} = q|AB| = q2|AP| = 2qR \text{ sen } \frac{p\gamma}{2} \qquad (2.106)$$

El coeficiente o factor de distribución se define como cociente de la f.e.m. geométrica E_f y la teórica E_t, y se designa con el símbolo K_d, resultando:

$$K_d = \frac{E_f}{E_t} = \frac{\text{sen } \frac{qp\gamma}{2}}{q \cdot \text{sen } \frac{p\gamma}{2}} \qquad (2.107)$$

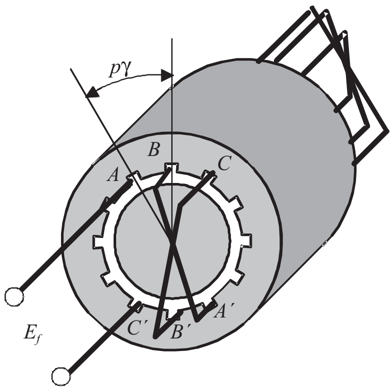


Figura 2.34. Devanado distribuido de tres bobinas por fase.

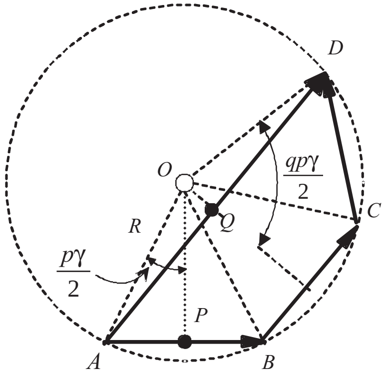


Figura 2.35. Composición geométrica o *fasorial* de f.e.m.s.

En consecuencia, y de acuerdo con la fórmula anterior, la f.e.m. producida por un devanado distribuido se podrá calcular como si estuviera concentrado, como ya se hizo en el epígrafe anterior, y el resultado habrá que multiplicarlo por K_d para obtener la f.e.m. real, que tiene en cuenta la diferencia de fase entre las f.e.m.s. parciales de cada bobina.

Si el número de ranuras es muy elevado puede considerarse que forman un arco continuo; si se denomina $\gamma_t = q\gamma$ el ángulo geométrico total que abarca todo el bobinado, se tendrá:

$$K_d = \lim_{q \to \infty} \frac{\text{sen}\,\dfrac{p\gamma_t}{2}}{q \cdot \text{sen}\,\dfrac{p\gamma_t}{2q}} = \frac{\text{sen}\,\dfrac{p\gamma_t}{2}}{\dfrac{p\gamma_t}{2}} \tag{2.108}$$

que puede obtenerse también como cociente de la cuerda al arco que subtiende (devanado uniformemente distribuido).

Para una máquina trifásica se cumple: $p\gamma_t = \pi/3$, y en consecuencia el coeficiente de distribución valdrá:

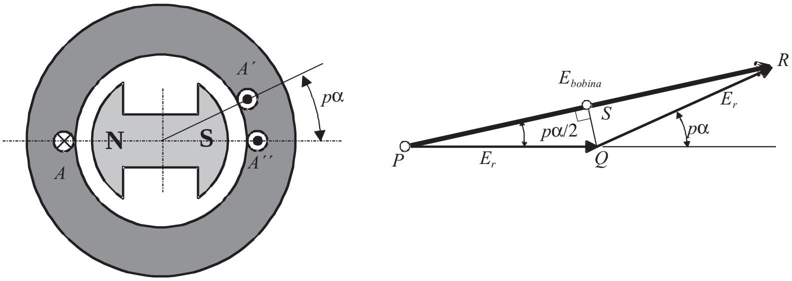
$$K_d = \frac{\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}}{\dfrac{\pi}{6}} = 0{,}955$$

y para una máquina de c.c. se tiene: $p\gamma_t = \pi$, y en consecuencia:

$$K_d = \frac{\text{sen}\,\dfrac{p\gamma_t}{2}}{\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$$

3. Factor de paso o acortamiento

Los devanados reales tienen un paso acortado en vez de un paso diametral, ya que de esta forma se eliminan armónicos. Para una bobina de paso diametral le corresponde una anchura de 180° eléctricos, lo cual quiere decir que si una rama está situada frente a un polo norte, (véase rama A de la Fig. 2.36*a*), la otra parte de la bobina está situada frente al polo sur (rama A″). En el caso de la Figura 2.36*a*, si una rama de la bobina está situada en A y la otra en A′ se ha acortado el paso en un ángulo $p\alpha$ eléctrico. Si se



a) Disposición de una bobina de paso acortado *b*) F.e.m. de una bobina de paso acortado

Figura 2.36. Bobina con paso acortado.

denomina E_r la f.e.m. de cada rama, la f.e.m. real de la bobina vendrá expresada por la suma vectorial indicada en la Figura 2.36*b*, cuyo valor es:

$$E_{\text{bob}} = |PR| = 2|PS| = 2E_r \cos \frac{p\alpha}{2} \tag{2.109}$$

Si las f.e.m.s. llegan a sumarse aritméticamente, que es lo que sucede con las bobinas de paso diametral, se obtendrá una f.e.m. teórica E_t dada por:

$$E_t = 2E_r \tag{2.110}$$

El factor de **acortamiento** K_a define el cociente:

$$K_a = \frac{E_{\text{bob}}}{E_t} = \cos \frac{p\alpha}{2} \tag{2.111}$$

En consecuencia, y teniendo en cuenta todos los coeficientes de devanado: distribución y paso y el de forma, la f.e.m. de un devanado en su forma más general posible, teniendo en cuenta (2.101), (2.107) y (2.111), será:

$$E = 4\, K_f K_d K_a N_2 f_2 \Phi_m \tag{2.112}$$

En el caso particular de distribución sinusoidal de flujo en el entrehierro, $K_f = 1{,}11$, resultando:

$$E = 4{,}44\, K_d K_a N_2 f_2 \Phi_m \tag{2.113}$$

En consecuencia, las expresiones demostradas en el epígrafe 2.9.1 deberán aplicarse multiplicadas por el factor de **devanado** $K_w = K_d K_a$, para tener en cuenta la distribución y acortamiento del mismo. Las expresiones (2.107) y (2.111) pueden utilizarse para calcular las f.e.m.s. debidas a los armónicos de f.m.m., de tal forma que si h es el orden de un armónico los coeficientes K_d y K_a vienen expresados por:

$$K_d = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{qhp\gamma}{2}}{q \cdot \operatorname{sen} \dfrac{hp\gamma}{2}} \quad ; \quad K_a = \cos \frac{ph\alpha}{2} \tag{2.114}$$

ya que para un armónico de orden h, el ángulo es h veces mayor. Esta afirmación es fácil de comprender si se observa el gráfico de la Figura 2.21*e*, en el que se mostraban las f.m.m.s. fundamental, de tercero y quinto armónico que aparecían en el entrehierro para el caso de un devanado concentrado. Se advierte que mientras la onda fundamental cubre un ciclo en 360° eléctricos, en el mismo espacio el tercer armónico da tres ciclos exactos. O de otro modo, un ángulo eléctrico de 360° para la onda fundamental es observado como un ángulo de 3.360 = 1.080° para el tercer armónico y de 5.360 = 1.800° para el quinto armónico. ***De este modo un ángulo de θ grados para el fundamental es interpretado como un ángulo hθ para el armónico de orden h***.

Ejemplo de aplicación 2.3

Una máquina eléctrica tiene un devanado trifásico distribuido en 36 ranuras. Cada bobina está acortada un ángulo de 30° eléctricos y está formada por 40 espiras, devanadas en una sola capa. La máquina tiene 4 polos y gira a una velocidad de 1.500 r.p.m. El flujo por polo es de 0,2 Wb y está distribuido de forma sinusoidal por el entrehierro. Calcular la f.e.m. inducida por fase.

Solución

La f.e.m. vendrá expresada por: $E = 4{,}44\, K_d K_a f_2 N_2 \Phi_m$; N_2 es el número de espiras por fase, cuyo valor es:

$$N_2 = \frac{36 \cdot 40}{2 \cdot 3} = 240 \text{ espiras/fase}$$

La frecuencia f_2 vale:

$$f_2 = \frac{np}{60} = \frac{1.500 \cdot 2}{60} = 50 \text{ Hz}$$

El coeficiente de distribución es:

$$K_d = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{qp\gamma}{2}}{q \cdot \operatorname{sen} \dfrac{p\gamma}{2}}$$

El ángulo geométrico entre dos ranuras es:

$$\gamma = \frac{360°}{36} = 10°$$

y el número de ranuras por polo y fase es:

$$q = \frac{K}{2pm} = \frac{36}{4 \cdot 3} = 3$$

en consecuencia:

$$K_d = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 10}{2}}{3 \operatorname{sen} \dfrac{2 \cdot 10}{2}} = 0{,}960$$

el coeficiente de acortamiento será:

$$K_a = \cos \frac{pa}{2} = \cos 15° = 0{,}966$$

y la f.e.m. por fase tendrá una magnitud:

$$E = 4{,}44 \cdot 0{,}960 \cdot 0{,}966 \cdot 50 \cdot 240 \cdot 0{,}2 = 9.882 \text{ voltios}$$

*2.9.3. Armónicos de f.e.m.: origen y eliminación

Al estudiar en los epígrafes 2.8.1. y 2.8.2. la distribución de f.m.m. producida por un devanado, bien sea concentrado o distribuido, se demostró (véanse Figs. 2.21 y 2.25) que la f.m.m. no era sinusoidal y que por tanto contenía armónicos. Se demostró asimismo (véase ecuación 2.41) que debido a la simetría del circuito magnético solamente se producían armónicos impares. Las f.m.m.s. combinadas de inductor e inducido dan lugar a la inducción en el entrehierro y que a su vez es el origen de las f.e.m.s inducidas en la máquina. En definitiva, lo que sucede es que los diferentes armónicos presentes en la onda de f.m.m. estarán presentes (en principio) en la f.e.m. inducida de la máquina. Si como es evidente se desea conseguir un tipo de onda de forma sinusoidal, será necesario proceder a la eliminación de los armónicos. Desgraciadamente, una anulación total es imposible, pero dado que de acuerdo con (2.40) y (2.41) las amplitudes de los armónicos son inversamente proporcionales a su orden, es decir, el armónico tercero tiene una amplitud 1/3 del fundamental, el armónico quinto tienen una amplitud 1/5 del fundamental, etc., con llegar a anular hasta el quinto o séptimo armónico se habrá conseguido una onda prácticamente sinusoidal.

Para comprender el proceso de eliminación de armónicos se va a considerar que se dispone de una máquina con inducido trifásico (por ejemplo, una máquina síncrona o alternador), vamos a prestar atención primero a las f.e.m.s. de tercer armónico. Si las f.e.m.s. de primer armónico o fundamental de cada una de las fases son de la forma:

$$e_{a1} = E_{1m} \cos \omega t \quad ; \quad e_{b1} = E_{1m} \cos (\omega t - 120°) \quad ; \quad e_{c1} = E_{1m} \cos (\omega t + 120°) \qquad (2.115)$$

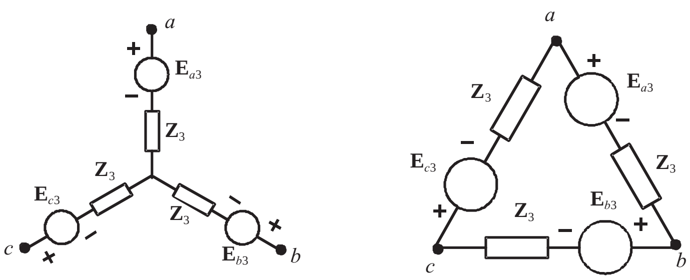
y las f.e.m.s. de tercer armónico son:

$$e_{a3} = E_{3m} \cos 3\omega t \quad ; \quad e_{b3} = E_{3m} \cos (3\omega t - 3 \cdot 120°) = E_{3m} \cos 3\omega t$$
$$e_{c3} = E_{3m} \cos (3\omega t + 3 \cdot 120°) = E_{3m} \cos 3\omega t \qquad (2.116)$$

para comprender las expresiones anteriores hay que tener en cuenta que un ángulo eléctrico θ para el primer armónico corresponde a un ángulo eléctrico $h\theta$ para el armónico de orden h. Se observa en (2.116) que las f.e.m.s. de tercer armónico inducidas en las tres fases son iguales en módulo y fase. Si los devanados se conectan en estrella (véase Fig. 2.37*a*), y se denomina $\mathbf{E}_3$ al fasor de f.e.m. de tercer armónico, que teniendo en cuenta (2.116) es la misma para las tres fases, las tensiones compuestas de tercer armónico serán:

$$\mathbf{E}_{ab3} = \mathbf{E}_{a3} - \mathbf{E}_{b3} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_3 = 0 \quad ; \quad \mathbf{E}_{bc3} = \mathbf{E}_{b3} - \mathbf{E}_{c3} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_3 = 0$$
$$\mathbf{E}_{ca3} = \mathbf{E}_{c3} - \mathbf{E}_{a3} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_3 = 0 \qquad (2.117)$$

que nos indica que aunque las tensiones de tercer armónico están presentes en cada una de las fases, **no aparecerán** en los terminales de la máquina. En la Figura 2.37, $\mathbf{Z}_3$ representa la impedancia de cada fase a las corrientes de tercer armónico.



a) Conexión estrella *b*) Conexión triángulo

Figura 2.37. Tercer armónico en conexiones estrella y triángulo.

Si se considera ahora que los devanados se conectan en triángulo (Fig. 2.37*b*), aun funcionando la máquina en vacío, es decir, sin conectar una carga entre los terminales, se obtendrá una corriente de circulación de tercer armónico en los bobinados de la máquina, de valor:

$$\mathbf{I}_3 = \frac{3\mathbf{E}_3}{3\mathbf{Z}_3} = \frac{\mathbf{E}_3}{\mathbf{Z}_3} \tag{2.118}$$

y las tensiones de tercer armónico que aparecerán entre los terminales externos serán:

$$\mathbf{E}_{ab3} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3 = 0 \quad ; \quad \mathbf{E}_{bc3} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3 = 0 \quad ; \quad \mathbf{E}_{ca3} = \mathbf{E}_3 - \mathbf{Z}_3\mathbf{I}_3 = 0 \tag{2.119}$$

En consecuencia, independientemente de que los devanados se conecten en estrella o triángulo, no aparecerán tensiones de tercer armónico en los terminales de línea. El mismo resultado se obtiene para todos los armónicos múltiplos de 3 tales como el 9, 15, 21, etc., (no se han incluido en esta relación los armónicos pares múltiplos de 3, que como ya sabemos, por razones de simetría no existen). Generalmente los alternadores de las centrales eléctricas se conectan en estrella para evitar la circulación de corriente de tercer armónico que estarían presentes si los devanados se conectaran en triángulo. En resumen, los armónicos presentes en la f.e.m. de una máquina trifásica son:

$$h = 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25,\ 29,\ \text{etc.} \tag{2.120}$$

Si se desean eliminar más armónicos, será preciso recurrir, como se ha explicado en el epígrafe 2.9.2, al acortamiento y distribución de las bobinas. En las ecuaciones (2.114) se dan las expresiones de los coeficientes de acortamiento y distribución en función del orden del armónico. Si se desea eliminar el quinto armónico actuando sobre el acortamiento de las bobinas será necesario proceder a acortar las bobinas 1/5 del paso polar; es decir, según la Figura 2.36, se tomará:

$$p\alpha = \frac{1}{5}\, 180° = 36° \tag{2.121}$$

En esta situación, de acuerdo con (2.114), resultará un coeficiente de acortamiento para el 5° armónico:

$$K_{a5} = \cos\frac{hp\alpha}{2} = \cos\frac{5 \cdot 36°}{2} = \cos 90° = 0 \tag{2.122}$$

En general, para eliminar por acortamiento de bobina una f.e.m. del armónico de orden h, será necesario elegir un ángulo $p\alpha$, de valor $1/h$ del paso polar. Así, para el 7.° armónico el ángulo eléctrico de acortamiento deberá ser:

$$p\alpha = \frac{1}{7}\, 180° = 25{,}71° \tag{2.123}$$

Es evidente que si se desean eliminar simultáneamente los armónicos 5.° y 7.°, deberá elegirse un ángulo de acortamiento comprendido entre los valores calculados en (2.121) y (2.123); por ejemplo, si se toma $p\alpha = 30°$, resultarán los siguientes coeficientes de acortamiento:

$$K_{a5} = \cos\frac{5 \cdot 30°}{2} = 0{,}259 \quad ; \quad K_{a7} = \cos\frac{7 \cdot 30°}{2} = -0{,}259 \tag{2.124}$$

que no logra una anulación completa de ninguno de los dos armónicos pero donde se ha conseguido una reducción ostensible de ambos. (El signo menos en K_{a7} indica la inversión de fase en el 7.° armónico.)

Si se aprovecha simultáneamente la distribución de las bobinas en diferentes ranuras, se podrá lograr una reducción adicional. Supóngase, por ejemplo, un devanado trifásico con tres ranuras por polo y fase (devanado de 1 capa). El ángulo eléctrico entre ranuras será:

$$p\gamma = \frac{\textit{paso polar}}{\textit{ranuras/polo}} = \frac{180°}{3 \cdot 3} = 20° \tag{2.125}$$

y al ser $q = 3$, aplicando (2.114) resultará:

$$K_{d5} = \frac{\text{sen}\,\dfrac{3 \cdot 5 \cdot 20}{2}}{3 \cdot \text{sen}\,\dfrac{5 \cdot 20}{2}} = \frac{\text{sen } 150°}{3 \text{ sen } 50°} = 0{,}218 \; ; \; K_{d7} = \frac{\text{sen}\,\dfrac{3 \cdot 7 \cdot 20}{2}}{3 \cdot \text{sen}\,\dfrac{7 \cdot 20}{2}} = \frac{\text{sen } 210°}{3 \text{ sen } 70°} = -0{,}177 \tag{2.126}$$

De este modo los factores de devanado resultantes para los armónicos 5.º y 7.º serán:

$$K_{w5} = K_{d5}K_{a5} = 0{,}259 \cdot 0{,}218 = 0{,}0565$$
$$K_{w7} = K_{d7}K_{a7} = (-0{,}259)(-0{,}177) = 0{,}0458 \tag{2.127}$$

que nos indica una reducción bastante efectiva de estos armónicos.

Deben destacarse dos aspectos adicionales: 1) Al efectuar un acortamiento y distribución de las bobinas se reducirán los armónicos no sólo de tensión sino también de f.m.m., lo que se traducirá en una mayor pureza de la onda de f.e.m. de salida. 2) La realización de tales medidas también reduce el valor de la f.e.m. fundamental, pero esta disminución se ve compensada con creces por la perfección en la senoide de salida.

Así, por ejemplo, en la situación aquí estudiada con:

$$p\alpha = 30° \quad ; \quad q = 3 \quad ; \quad p\gamma = 20° \tag{2.128}$$

los coeficientes de devanado para la onda fundamental, de acuerdo con (2.107) y (2.111), serán:

$$K_a \cos \frac{30°}{2} = 0{,}966 \quad ; \quad K_d = \frac{\text{sen } 30°}{3 \text{ sen } 10°} = 0{,}960 \tag{2.129}$$

lo que representa un factor de reducción:

$$K_1 = K_a K_d = 0{,}966 \cdot 0{,}96 = 0{,}927 \tag{2.130}$$

que prácticamente no modifica la magnitud de la f.e.m. fundamental (representa una reducción inferior al 8 por 100).

AMPLÍE SUS CONOCIMIENTOS

Campos giratorios armónicos

Como ya se indicó en la expresión (2.55) del epígrafe 2.8.2, la distribución espacial de f.m.m. en el entrehierro para un devanado de N_f espiras, $2p$ polos, coeficiente de devanado K_w (que en general es igual a $K_d K_a$) que lleva una corriente i y para un ángulo eléctrico $\theta = p\alpha$ respecto de su eje, viene expresada para el armónico fundamental por:

$$F(\theta) = \frac{4}{\pi} K_w \frac{N_f i}{2p} \cos \theta \tag{1}$$

y en general para un armónico de orden h, la f.m.m, de acuerdo con lo explicado en 2.8.1 será de la forma:

$$\mathscr{F}_h(\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{h} K_{wh} \frac{N_f i}{2p} \cos h\theta \tag{2}$$

donde $K_{wh} = K_{dh}K_{ah}$ y los factores K_{dh} y K_{ah} están determinados por las ecuaciones (2.114) para un armónico de orden h y que son:

$$K_{dh} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{qhp\gamma}{2}}{q \cdot \operatorname{sen} \dfrac{hp\gamma}{2}} \quad ; \quad K_{ah} = \cos \frac{ph\alpha}{2} \tag{3}$$

En estas fórmulas γ representa el ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas, q el número de ranuras por polo y fase y α el ángulo geométrico de acortamiento de las bobinas.

En definitiva, en un estudio riguroso de la distribución espacial de f.m.m. en el entrehierro, existen armónicos de esta onda (efecto que se ha despreciado en el estudio realizado en el epígrafe 2.8). De acuerdo con la expresión anterior (2), la amplitud de un armónico de f.m.m. es inversamente proporcional a su orden h y proporcional al factor de devanado para el armónico considerado. Los factores de distribución y acortamiento de un devanado, definidos por las ecuaciones (3), influyen tanto en la forma de la f.e.m. inducida en un devanado como en la forma de la f.m.m. espacial en el entrehierro producida por un devanado inductor, es decir en ambos casos ayudan a que las ondas tanto de f.e.m. como de f.m.m. sean lo más sinusoidales posibles. Debe destacarse además que en ambos casos solamente existen armónicos impares, h = 1, 3, 5, 7, 9, etc., debido a la simetría media onda o impar de ambas distribuciones.

¿Qué sucede entonces si se estudia la f.m.m. producida por una máquina eléctrica trifásica, en la que no pueden despreciarse los armónicos espaciales de f.m.m.? Evidentemente para el armónico fundamental se producirá un campo magnético giratorio tal como ya se ha estudiado en el epígrafe 2.8.3, pero también los armónicos espaciales de f.m.m. producirán campos magnéticos giratorios tal como se va a demostrar a continuación. Si se considera que el devanado trifásico está alimentado por corrientes trifásicas equilibradas de la forma:

$$i_a = I_m \cos \omega t \quad ; \quad i_b = I_m \cos(\omega t - 120°) \quad ; \quad i_c = I_m \cos(\omega t + 120°) \tag{4}$$

La f.m.m. producida por la bobina de la fase a y para el armónico de orden h, de acuerdo con (2) y (4) será de la forma:

$$\mathscr{F}_{ah} = (\theta, t) = \frac{4}{\pi}\frac{1}{h} K_{wh} \frac{N_f I_m}{2p} \cos \omega t \cos h\theta \tag{5}$$

donde θ representa el ángulo eléctrico que forma el eje de la fase a con el punto del entrehierro donde se calcula el valor de la f.m.m. Si se denomina F_{mh} a la amplitud máxima del armónico anterior, es decir:

$$F_{mh} = \frac{4}{\pi}\frac{1}{h} K_{wh} \frac{N_f I_m}{2p} \tag{6}$$

La expresión (5) se puede escribir de una forma simplificada del siguiente modo:

$$\mathscr{F}_{ah}(\theta, t) = F_{mh} \cos \omega t \cos h\theta \tag{7}$$

y las expresiones de las f.m.m.s producidas en el mismo punto del entrehierro, por las fases b y c que están desfasadas 120° en adelanto y retraso respecto de la fase a, de un modo análogo a (2.58) serán:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_{bh}(\theta, t) &= F_{mh} \cos(\omega t - 120°) \cos h(\theta - 120°) \quad ; \\ \mathscr{F}_{ch}(\theta, t) &= F_{mh} \cos(\omega t + 120°) \cos h(\theta + 120°) \end{aligned} \tag{8}$$

En consecuencia la onda de f.m.m. resultante o total en el entrehierro $\mathscr{F}_{th}(\theta, t)$ será igual a la suma de las tres ondas pulsatorias anteriores:

$$\mathscr{F}_{bh}(\theta, t) = \mathscr{F}_{ah}(\theta, t) + \mathscr{F}_{bh}(\theta, t) + \mathscr{F}_{ch}(\theta, t) \tag{9}$$

Es decir:

$$\mathscr{F}_{bh}(\theta, t) = F_{mh}[\cos \omega t \cos h\theta + \cos(\omega t - 120°) \cos h(\theta - 120°) + \\ + \cos(\omega t + 120°) \cos h(\theta + 120°)] \quad (10)$$

si se hace uso de la igualdad trigonométrica:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)] \quad (11)$$

la ecuación (10) se transforma en:

$$\mathscr{F}_{th}(\theta, t) = \frac{F_{mh}}{2}\{\cos(\omega t - h\theta) + \cos[\omega t - h\theta + (h-1)120°] + \cos[\omega t - h\theta - (h-1)120°]\} + \\ + \frac{F_{mh}}{2}\{\cos(\omega t + h\theta) + \cos[\omega t + h\theta + (h+1)120°] + \cos[\omega t + h\theta - (h+1)120°]\} \quad (12)$$

Para $h = 1$, se tiene el armónico fundamental y el resultado de (12) es:

$$\mathscr{F}_{t1}(\theta, t) = \frac{3F_{m1}}{2}\cos(\omega t - \theta) = \frac{3F_{m1}}{2}\cos(\omega t - p\alpha) \quad (13)$$

que representa una f.m.m. giratoria de amplitud $3F_{m1}/2$ cuyo valor de acuerdo con (6) es:

$$\frac{3}{2}F_{m1} = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{\pi}K_{w1}\frac{N_f I_m}{2p}\right] \quad (14)$$

y que gira a una velocidad angular mecánica:

$$\omega t - p\alpha = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \Omega_1 = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega}{p} \quad (15)$$

y como quiera que si se denomina n_1 a la velocidad de giro de la f.m.m. en r.p.m. y f a la frecuencia de las corrientes se cumple:

$$\Omega_1 = 2\pi\frac{n_1}{60} \quad ; \quad \omega = 2\pi f \quad (16)$$

al sustituir en (15) resultará:

$$n_1 = \frac{60f}{p} \quad (17)$$

que es la velocidad de sincronismo del primer armónico de f.m.m.

Para $h = 3$, se tiene el tercer armónico y el resultado de (12) es:

$$\mathscr{F}_{t3}(\theta, t) = \frac{F_{m3}}{2}[\cos(\omega t - 3\theta) + \cos(\omega t - 3\theta + 120°) + \cos(\omega t - 3\theta - 120°)] + \\ + \frac{F_{m3}}{2}[\cos(\omega t + 3\theta) + \cos(\omega t + 3\theta - 120°) + \cos(\omega t + 3\theta + 120°)] = 0 \quad (18)$$

Téngase en cuenta que las expresiones entre corchetes representan tres fasores simétricos desfasados 120°, por lo que su resultante es nula. Es decir no existe f.m.m. espacial de tercer armónico, y por el mismo motivo tampoco f.m.m.s. de armónicos múltiplos de 3.

Para $h = 5$, se tiene el quinto armónico y el resultado de (12) es:

$$\mathscr{F}_{t5}(\theta, t) = \frac{F_{m5}}{2}\{\cos(\omega t - 5\theta) + \cos[\omega t - 5\theta + 120°] + \cos[\omega t - 5\theta - 120°]\} + \\ + \frac{F_{m5}}{2}\{\cos(\omega t + 5\theta) + \cos(\omega t + 5\theta) + \cos(\omega t + 5\theta)\} = \frac{3F_{m5}}{2}\cos(\omega t + 5\theta) = \frac{3F_{m5}}{2}\cos(\omega t + 5p\alpha) \quad (19)$$

ya que los tres términos contenidos en el primer corchete representan tres fasores simétricos desfasados 120° por lo que su resultante es nula. Es decir, el resultado representa una f.m.m. giratoria de amplitud $3F_{m5}/2$ cuyo valor de acuerdo con (6) es:

$$\frac{3}{2}F_{m5} = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\cdot K_{w5}\frac{N_f I_m}{2p}\right] \tag{20}$$

y que gira a una velocidad angular mecánica:

$$\Omega_5 = \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{5}\frac{\omega}{p} \quad \Rightarrow \quad n_5 = -\frac{1}{5}\frac{60f}{p} = -\frac{n_1}{5} \tag{21}$$

Es decir el quinto armónico tiene una velocidad que es igual a la quinta parte de la velocidad de sincronismo del armónico fundamental y de sentido contrario al mismo. Es por consiguiente un campo giratorio inverso.

Para $h = 7$, se tiene el séptimo armónico y el resultado de (12) es:

$$\mathscr{F}_{t7}(\theta, t) = \frac{F_{m7}}{2}\{\cos(\omega t - 7\theta) + \cos(\omega t - 7\theta) + \cos(\omega t - 7\theta)\} +$$

$$+\frac{F_{m7}}{2}\{\cos(\omega t + 7\theta) + \cos(\omega t + 7\theta - 120°) + \cos(\omega t + 7\theta + 120°)\} = \tag{22}$$

$$= \frac{3F_{m7}}{2}\cos(\omega t - 7\theta) = \frac{3F_{m7}}{2}\cos(\omega t - 7p\alpha)$$

ya que los tres términos contenidos en el segundo corchete representan tres fasores simétricos desfasados 120° por lo que su resultante es nula. Es decir el resultado representa una f.m.m. giratoria de amplitud $3F_{m7}/2$ cuyo valor de acuerdo con (6) es:

$$\frac{3}{2}F_{m7} = \frac{3}{2}\left[\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}K_{w7}\frac{N_f I_m}{2p}\right] \tag{23}$$

y que gira a una velocidad angular mecánica:

$$\Omega_7 = \frac{d\alpha}{dt} = +\frac{1}{7}\frac{\omega}{p} \quad \Rightarrow \quad n_7 = +\frac{1}{7}\frac{60f}{p} = +\frac{n_1}{7} \tag{24}$$

Es decir, el séptimo armónico tiene una velocidad que es igual a la séptima parte de la velocidad de sincronismo del armónico fundamental y del mismo sentido que él. Es por consiguiente un campo giratorio directo.

Conclusiones: Las máquinas eléctricas trifásicas alimentadas por corrientes equilibradas sinusoidales, pero en las que cada fase no produce una distribución de f.m.m. espacial sinusoidal, dan lugar a una f.m.m. resultante de acuerdo con las siguientes reglas:

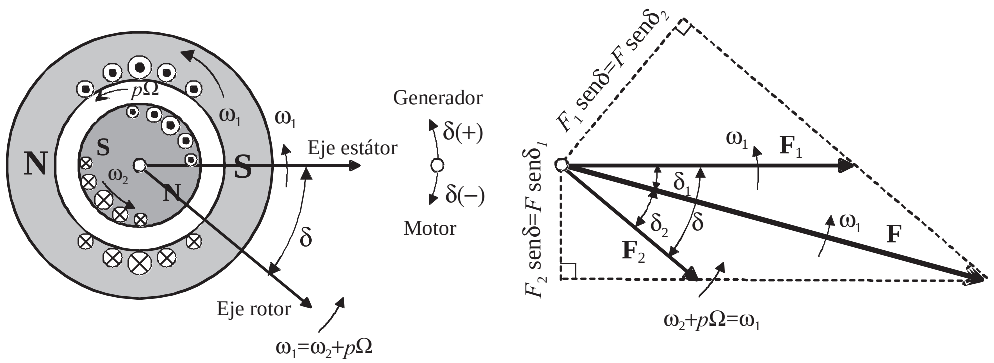
1. La f.m.m. resultante de todos los armónicos espaciales de orden $h = 3k$ ($k = 1, 2, 3,...$, es decir múltiplos de tres) desaparecen.
2. La f.m.m. de los armónicos espaciales de orden $h = 6k$-1, es decir $h = 5, 11, 17,...$, tienen el factor $\cos(\omega t + hp\alpha)$ y por eso se mueven en sentido contrario al de la f.m.m. fundamental y a velocidades $n_h = -n_1/h$.
3. La f.m.m. de los armónicos espaciales de orden $h = 6k + 1$, es decir $h = 7, 13, 19, ...$, tienen el factor $\cos(\omega t - hp\alpha)$ y por eso se mueven en sentido contrario al de la f.m.m. fundamental y a velocidades $n_h = +n_1/h$.

*2.10. PAR ELECTROMAGNÉTICO EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

En el epígrafe 1.9 del Capítulo 1 se estudió la creación de un par electromagnético en un sistema de rotación desde el punto de vista del acoplamiento magnético entre bobinas, es decir, basado en las variaciones que sufren las inductancias de los devanados al cambiar la posición del rotor. Este enfoque tiene la gran ventaja didáctica de que al considerar las bobinas como arrollamientos concentrados no es necesario profundizar sobre cómo están constituidos los devanados: distribución en ranuras, acortamiento de bobinas, etc., y solamente se presta atención a los fenómenos implicados en la producción del par: posición de reluctancia mínima, alineamiento entre ejes, etc.

Existe un procedimiento alternativo para demostrar cómo se genera el par electromagnético en una máquina eléctrica que se basa en la interacción de las f.m.m.s. producidas por los devanados situados en el estátor y en el rotor. Se ha estudiado en el epígrafe 2.8 de este capítulo la producción de f.m.m.s. por diversos devanados; por ejemplo, cuando el estátor tiene polos salientes y se sitúa un devanado concentrado alimentado con c.c., la f.m.m. correspondiente es de amplitud constante y fija en el espacio; en el caso de que los polos estén colocados en el rotor y si éste se mueve a velocidad angular mecánica Ω, la f.m.m. aunque es constante en amplitud se mueve con una velocidad angular eléctrica $p\Omega$. En el caso de que se disponga en el estátor de un devanado trifásico (o en general polifásico) alimentado por corrientes trifásicas (en general polifásicas) de pulsación $\omega_1 = 2\pi f_1$, la f.m.m. resultante es, según (2.62), de amplitud constante, se distribuye de forma sinusoidal por el entrehierro y además es de naturaleza rotativa, por lo que para su representación se debe utilizar el concepto de *fasor espacial*. El fasor espacial es una generalización del fasor temporal utilizado en el estudio de los circuitos de c.a. y es *un vector cuyo módulo es igual a la magnitud que representa: campo magnético, f.m.m., etc., y que apunta hacia el lugar del entrehierro en el que su valor es máximo positivo*; en el caso de que se trate de magnitudes fijas en el espacio, el fasor espacial también tendrá una posición fija en el espacio (lo que significa que no se trata de un fasor sino de un vector espacial), pero si representa un campo magnético o f.m.m. rotativa, el correspondiente fasor espacial también girará a la velocidad correspondiente a la magnitud que representa. Cuando el devanado trifásico se sitúa en el rotor, el fasor espacial de f.m.m. se moverá respecto al propio rotor a una velocidad angular correspondiente a su frecuencia; si ésta es f_2, la velocidad angular será $\omega_2 = 2\pi f_2$, pero a la que habrá que sumar o restar en su caso la velocidad angular eléctrica del rotor $p\Omega$; si se considera que ambos sentidos son coincidentes, la velocidad angular eléctrica total de la f.m.m. del rotor será igual a $\omega_2 + p\Omega$ y que de acuerdo con (2.86) es igual a ω_1. Esto significa que si, por ejemplo, se dispone de devanados trifásicos tanto en el estátor como en el rotor (lo que se cumple si se trata de una máquina asíncrona o de inducción), las f.m.m.s. se mueven a la misma velocidad angular eléctrica correspondiente a la pulsación de las corrientes estatóricas ω_1. Esta coincidencia entre ambas velocidades es un principio fundamental en todas las máquinas eléctricas; por ejemplo, en las máquinas síncronas el rotor o inductor se alimenta con c.c. $\omega_1 = 0$, y al girar a una velocidad angular mecánica Ω, la velocidad angular eléctrica correspondiente de su f.m.m. será igual a $p\Omega$; si se considera que en el estátor se ha colocado un devanado trifásico, la pulsación de sus corrientes ω_1 debe ser igual al valor anterior, es decir, se cumple $\omega_2 = p\Omega$, lo que está de acuerdo con la expresión general (2.86).

Para poder comprender cómo se combinan las f.m.m.s. de una máquina eléctrica para engendrar un par electromagnético se va a considerar una máquina con simetría cilíndrica tal como se muestra en la Figura 2.38*a*. Se va a suponer que tanto en el estátor como en el rotor se sitúan sendos devanados trifásicos (polifásicos) por los que circulan corrientes trifásicas (polifásicas) de tal manera que las f.m.m.s. producidas se distribuyen de forma sinusoidal por el entrehierro y girando, como ya se ha indicado en el párrafo anterior, a la misma velocidad angular eléctrica ω_1 (esta configuración corresponde realmente a una máquina asíncrona, pero el análisis es similar para cualquier tipo de máquina eléctrica). Debe destacarse que para simplificar el dibujo, en la Figura 2.38*a* no se han representado los devanados reales de la máquina sino unos arrollamientos equivalentes que producen las f.m.m.s. de los devanados del estátor F_1 y del rotor F_2 (que de un modo simplificado equivalen a la aparición de sendos polos norte y sur, tanto en el estátor como en el rotor). En la Figura 2.38*b* se muestran los fasores



a) Situación de los polos *b*) Composición de las f.m.m.s.

Figura 2.38. Máquina eléctrica de polos lisos.

espaciales correspondientes, que giran a la misma velocidad angular eléctrica ω_1 y que están desfasados entre sí un ángulo eléctrico δ, que se denomina ***ángulo de par*** o ***ángulo de potencia*** porque su valor depende de la carga aplicada a la máquina.

El par electromagnético que aparece entre el estátor y el rotor es en definitiva ***consecuencia de la acción que tiene lugar entre ambas ondas de f.m.m. para intentar alinear sus ejes magnéticos*** (en su versión con los polos o imanes equivalentes, lo que sucede es que el polo norte/sur del rotor intentará seguir al polo sur/norte móvil del estátor). En régimen permanente el ángulo δ es constante; en otras palabras, los fasores espaciales de f.m.m. se mueven a la misma velocidad angular ω_1 y están desfasados un ángulo eléctrico δ, dando lugar a una f.m.m. resultante F en el entrehierro que al igual que sus componentes tiene una evolución sinusoidal en el espacio. La relación entre F_1, F_2 y F se obtiene de la diagonal del paralelogramo y se puede escribir:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\, F_1 F_2 \cos \delta \tag{2.131}$$

donde F_1, F_2 y F son los ***valores máximos*** o ***de pico*** de las ondas de f.m.m. Suponiendo la permeabilidad del hierro infinita y el campo magnético radial, la ley de Ampère permite calcular el valor de la intensidad de campo magnético H en el entrehierro y que viene expresada por:

$$H = \frac{F}{g} \tag{2.132}$$

donde g es el espesor del entrehierro y H se expresa en valores máximos (al igual que F). Si el circuito magnético es lineal, coinciden los valores de la energía y coenergía magnética almacenadas en el entrehierro por unidad de volumen y cuyos valores, de acuerdo con (1.55), son:

$$w_m = w'_m = \frac{1}{2}\mu_0 H^2_{\text{med}} = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{H^2}{2} = \frac{\mu_0 F^2}{4g^2} \tag{2.133}$$

En la ecuación anterior se ha tenido en cuenta que al ser el campo H sinusoidal, el valor medio del cuadrado de una onda de este tipo es igual a la mitad del cuadrado de su valor máximo. Si se considera que el diámetro medio del entrehierro es D y que la longitud axial de la máquina es ℓ, la coenergía magnética almacenada en el entrehierro será entonces:

$$W'_m = w'_m \text{ (volumen del entrehierro)} = \frac{\mu_0 F^2}{4g^2}(\pi\, D\, \ell\, g) \tag{2.134}$$

y al sustituir el valor de F calculado en (2.130) en la ecuación anterior (2.134) resulta:

$$W'_m = \frac{\mu_0 \, \pi \, D \, \ell}{4g} \left(F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \delta\right) \tag{2.135}$$

De acuerdo con (1.140), el par electromagnético es la derivada de la coenergía magnética respecto a la posición geométrica del rotor, cuyo valor en grados eléctricos es $\theta = \delta$ y que equivale a δ/p en grados mecánicos o geométricos, siendo p el número de pares de polos de la máquina. De este modo se puede escribir:

$$T = \frac{\partial W'_m}{\partial(\delta/p)} = -p \, \frac{\mu_0 \, \pi \, D \, \ell}{2g} \, F_1F_2 \text{ sen } \delta = -KF_1F_2 \text{ sen } \delta \tag{2.135}$$

donde $K = p \, \dfrac{\mu_0 \, \pi \, D \, \ell}{2g}$ es una constante que depende de las dimensiones físicas de la máquina. La ecuación anterior indica que el par electromagnético es proporcional a los valores máximos o de pico de las f.m.m.s. del estátor F_1 y del rotor F_2 y también al seno del ángulo δ que forman ambos fasores espaciales. El signo menos significa que las f.m.m.s. tienden a alinearse reduciendo el ángulo δ que forman ambas ondas. Debe destacarse que el par anterior aparece tanto en el estátor como en el rotor, siendo contrarios entre sí. Si la máquina funciona como motor, el par anterior provocará el movimiento del rotor (y si funciona como generador tenderá a frenarlo). En ambos casos el par en el estátor se transmitirá a la cimentación de la máquina.

Se pueden escribir fórmulas alternativas a (2.135) teniendo en cuenta que, según la Figura 2.38*b*, se cumplen las siguientes igualdades:

$$F_1 \text{ sen } \delta = F \text{ sen } \delta_2 \quad ; \quad F_2 \text{ sen } \delta = F \text{ sen } \delta_1 \tag{2.136}$$

por lo que (2.135) admite también las siguientes expresiones equivalentes:

$$T = -KFF_1 \text{ sen } \delta_1 \quad ; \quad T = -KFF_2 \text{ sen } \delta_2 \tag{2.137}$$

En cada una de las ecuaciones anteriores interviene la f.m.m. resultante F e incluyen en cada caso solamente una de las f.m.m.s. parciales, bien sea F_1 o F_2 y el seno del ángulo que forman cada una de ellas con la f.m.m. resultante F. Si se desprecia la saturación magnética, para que se considere que hay proporcionalidad entre f.m.m. y flujo se puede obtener otra fórmula del par en función del flujo magnético por polo. Téngase en cuenta para ello que la inducción magnética máxima en el entrehierro B producida por la f.m.m. resultante F, teniendo en cuenta (2.132), es igual a:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 F}{g} \tag{2.138}$$

y por consiguiente el flujo medio por polo tendrá un valor:

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \cdot B \cdot (\text{área del polo}) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\mu_0 F}{g} \cdot \left(\frac{\pi \, D}{2p} \ell\right) \tag{2.139}$$

El factor $2/\pi$ de la expresión anterior procede de expresar el valor medio de la senoide de inducción en función de su valor máximo; se ha tenido también en cuenta que un polo cubre 1/2 p de la circunferencia total del entrehierro, que es de espesor g, y que la máquina tiene una profundidad en sentido axial igual a ℓ. De este modo la expresión (2.135) se puede escribir en función del flujo del siguiente modo:

$$T = -\frac{\pi}{2} \, p^2 \, \Phi \, F_1 \text{ sen } \delta_1 = \frac{\pi}{2} \, p^2 \, \Phi \, F_2 \text{ sen } \delta_2 \tag{2.140}$$

donde el flujo magnético Φ es consecuencia de la f.m.m. resultante F producida por ambos devanados.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

1. Potencia y tamaño de las máquinas eléctricas

Los dos factores principales que determinan el tamaño de una máquina eléctrica, que tiene una determinada potencia asignada, son la inducción magnética media en el entrehierro y la denominada carga o capa de corriente que es función de la intensidad que circula por los conductores del inducido. La inducción magnética está limitada por la saturación del núcleo magnético y la capa de corriente depende del tipo de refrigeración y de la clase de aislamiento de los devanados. Vamos a relacionar la potencia de una máquina de corriente alterna con estos parámetros. Para ello debe tenerse en cuenta que la f.e.m. inducida por fase en una máquina eléctrica de corriente alterna rotativa que tiene N espiras por fase, frecuencia f, flujo máximo Φ_m *y con factores de forma* K_f *y de devanados de distribución y acortamiento:* K_d *y* K_a *respectivamente, viene expresada por la ecuación (2.112):*

$$E = 4K_f K_d K_a N f \Phi_m \qquad (1)$$

y si se denomina $K = K_f K_d K_a$ *y Z al número de conductores del inducido que es igual al doble del número de espiras N, y teniendo en cuenta que la frecuencia f es igual según (2.96) a np/60, siendo n la velocidad del rotor en r.p.m. y p el número de pares de polos de la máquina, la expresión anterior se puede escribir del siguiente modo:*

$$E = 2KZ\frac{np}{60}\Phi_m \qquad (2)$$

Si la corriente que circula para cada fase del inducido es I, la potencia aparente por fase de la máquina eléctrica es igual a:

$$S = EI = \frac{K}{60}2p\Phi_m ZIn \qquad (3)$$

Si el inducido de la máquina tiene un diámetro D y una longitud axial L, entonces el paso polar τ *es igual a* $\pi D/2p$ *y como la inducción magnética media debajo de cada polo es* $B_{med} = \Phi_m/\tau L$*, se puede escribir:*

$$B_{med} = \frac{\Phi_m}{\frac{\pi D}{2p}L} \quad \Rightarrow \quad 2p\Phi_m = \pi DLB_{med} \qquad (4)$$

Por otro lado si se denomina carga de corriente de la máquina, o simplemente capa de corriente (que se simboliza por la letra A), al número de amperio-conductores del inducido de la máquina por metro de circunferencia del rotor, se tiene:

$$A = \frac{ZI}{\pi D} \qquad (5)$$

De este modo si se sustituyen las ecuaciones (4) y (5) en (3), la expresión de la potencia aparente por fase de la máquina eléctrica es:

$$S = \frac{K}{60}\pi^2 D^2 LB_{med}An \qquad (6)$$

Si se denomina coeficiente de potencia C de la máquina a:

$$C = \frac{K}{60}(\pi^2 B_{med}A) \qquad (7)$$

La expresión (6) se escribe de una forma simplificada del siguiente modo:

$$S = CD^2Ln \tag{8}$$

El producto D^2L es proporcional al volumen del inducido (en definitiva el tamaño de la máquina), y la ecuación (8) indica que para una determinada potencia de una máquina, el tamaño es tanto menor cuanto mayor es la velocidad n de la máquina. A esto se debe el empleo de una frecuencia de 400 Hz en las aeronaves (que con una máquina de 4 polos supone velocidades de giro de 12.000 r.p.m), de este modo utilizando aislamientos de alta temperatura y sistemas de refrigeración especiales con chorro de aceite se consiguen alternadores de mucha potencia con una tamaño entre diez y veinte veces más pequeño en volumen que un alternador convencional de 50 Hz. Por otro lado, como quiera que el par electromagnético de un motor es el cociente entre su potencia mecánica y la velocidad angular de giro, el par de un motor de acuerdo con la expresión (8), será proporcional al volumen de la máquina. ***Es decir el tamaño de cualquier máquina eléctrica está determinado por sus necesidades de par a plena carga****. Es decir, a pesar de la opinión popular, no es la potencia la que determina el tamaño físico de una máquina eléctrica, sino más bien el par. Es por esta causa que una máquina eléctrica de 30 kW a 3000 rpm, tiene el mismo tamaño (y prácticamente el mismo peso) que otra de 15 kW a 1500 r.p.m, o el de otra de 7,5 kW a 750 r.p.m. Debe añadirse también que el tipo de motor también afecta al tamaño físico; en general para la misma potencia y velocidad, los motores de c.c. y los asíncronos de rotor devanado tiene mayor volumen o tamaño que un simple motor asíncrono de jaula de ardilla, debido a que necesitan más espacio para el conmutador y escobillas en el caso de los motores de c.c, y el colector de anillos y escobillas para los motores de rotor devanado.*

2. Variación de la potencia de una máquina eléctrica y las pérdidas con las dimensiones lineales.

Si se consideran dos máquinas eléctricas con todas sus dimensiones lineales homotéticas entre sí y de relación γ:1, y que tengan la misma velocidad, la misma inducción magnética y la misma densidad de corriente en los conductores eléctricos de sus devanados, de acuerdo con (6) se cumple que la potencia aparente S es proporcional al producto $D^2LB_{med}An$, es decir:

$$S \div D^2LB_{med}An \tag{9}$$

Donde ÷ indica el signo de proporcionalidad. Pero teniendo en cuenta que B_{med} y n son constantes, la expresión anterior se puede poner:

$$S \div D^2LA \tag{10}$$

Pero $D \div \gamma$; $L \div \gamma$; $A \div \gamma$ por lo que:

$$S \div \gamma^4 \tag{11}$$

Pero de acuerdo con (2.11) y (2.12), las pérdidas en el cobre y en el hierro son proporcionales a los volúmenes de cobre y hierro respectivamente, es decir ambas pérdidas son proporcionales a γ^3. Esto significa de acuerdo con (11) que la potencia perdida en una máquina varía del siguiente modo:

$$P_p \div \gamma^3 \tag{12}$$

De este modo, teniendo en cuenta (11) y (12) el cociente potencia aparente asignada de la máquina respecto de las pérdidas de potencia vale:

$$\frac{S}{P_p} \div \gamma \tag{13}$$

Lo que significa que la potencia de una máquina aumenta más rápidamente que sus pérdidas, y a esto se debe el que cuanto mayor sea la potencia de una máquina eléctrica, tanto mayor será su rendimiento. Sin embargo, al contrario, las grandes máquinas eléctricas son más difíciles de refrigerar, ya que el área de emisión de calor es proporcional a γ^2*, lo que significa que las pérdidas por unidad de área son proporcionales a* γ*, lo cual explica el porqué las máquinas eléctricas de pequeña potencia se refrigeran por convección natural del aire, las máquinas de tamaño medio requieren el uso de ventiladores acoplados en el mismo eje, las de tamaño grande utilizan radiadores externos con circulación de agua y los turboalternadores de las Centrales Nucleares que pueden alcanzar los 1.500 MVA en los que se utiliza como refrigerante el hidrógeno en vez del aire.*

2.11. CLASIFICACIÓN GENERAL DE LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

En la expresión (2.88) se han relacionado las frecuencias del inductor e inducido de una máquina eléctrica por medio del número de polos y las r.p.m. del rotor, de acuerdo a la ecuación general:

$$f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \tag{2.141}$$

Los diferentes tipos de máquinas se pueden clasificar (véase Fig. 2.39) atendiendo a una serie de criterios selectivos y ordenados que tienen en cuenta la existencia de órganos móviles, el tipo de corriente aplicada al inductor y la forma de las conexiones externas, de acuerdo con el siguiente proceso:

PRIMER CRITERIO: Movimiento del inductor o inducido.

a) Si no existen órganos móviles, $n = 0$, lo que indica, de acuerdo con (2.141), que:

$$f_2 = f_1 \tag{2.142}$$

es decir, coinciden las frecuencias del inductor e inducido, resultando las llamadas **máquinas estáticas**.

b) En el caso en que $n \neq 0$, se sigue conservando la expresión general:

$$f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \tag{2.143}$$

dando origen a las **máquinas rotativas**.

SEGUNDO CRITERIO: Características del flujo inductor.

a) Si el flujo inductor es constante, es decir, independiente del tiempo, indica que la frecuencia de la corriente que alimenta este devanado es $f_1 = 0$. En el caso de máquinas estáticas, teniendo en cuenta (2.142) se cumpliría:

$$f_2 = f_1 = 0 \tag{2.144}$$

no existiendo ninguna máquina que cumpla esta condición, ya que al no aparecer variaciones de flujo en el inducido no se tiene conversión de energía.

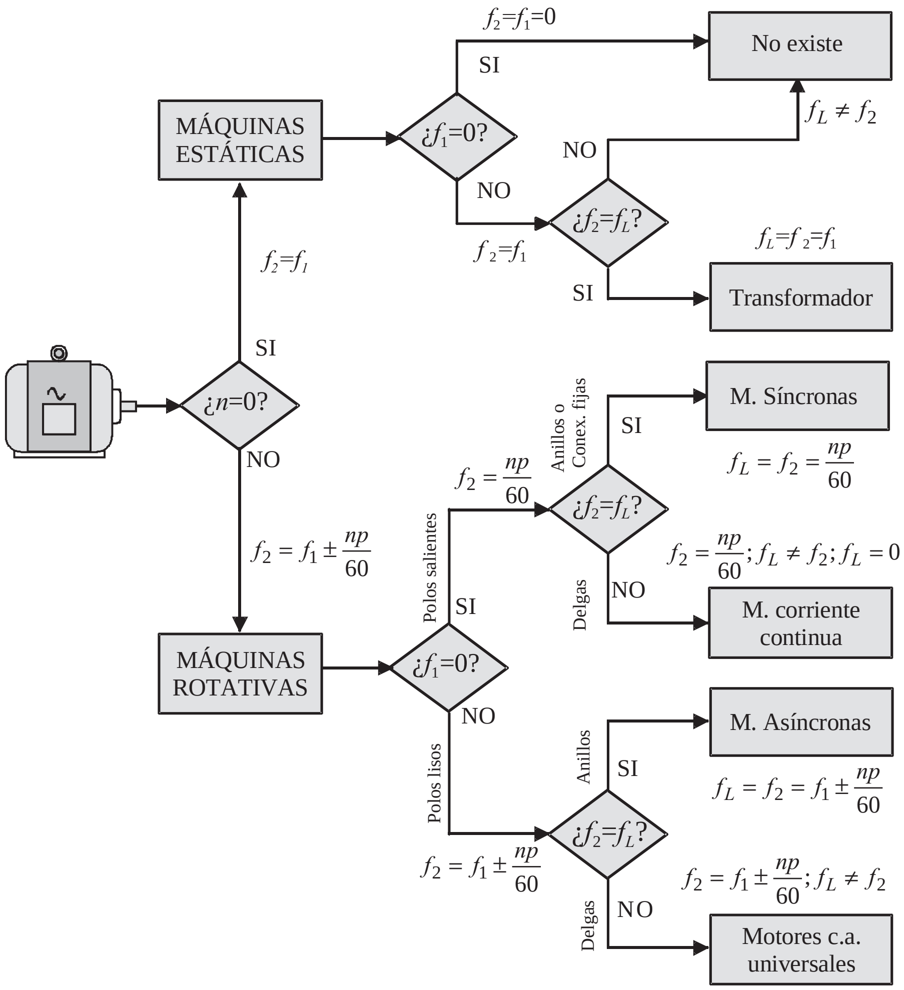


Figura 2.39. Cuadro de clasificación general de las máquinas eléctricas.

Para las máquinas dotadas de movimiento, la condición $f_1 = 0$, teniendo en cuenta (2.143), da lugar a la expresión general:

$$f_2 = \pm \frac{np}{60} \tag{2.145}$$

es decir, la frecuencia del inducido es función directa de la velocidad del rotor. Normalmente cuando el inductor está recorrido por una c.c. ($f_1 = 0$), la máquina tiene una estructura física en forma de **polos salientes**, tal como se observa en las Figuras 2.5*b* y *c*, sobre los cuales van arrolladas las bobinas inductoras.

b) Si el flujo inductor es variable, es $f_1 \neq 0$, lo cual indica, en el caso de máquinas estáticas, y de acuerdo con (2.142), que:

$$f_2 = f_1 \neq 0 \tag{2.146}$$

y para las máquinas rotativas se sigue cumpliendo la expresión general (2.141).

TERCER CRITERIO: Dispositivo de conexión al circuito exterior.

a) Si la máquina tiene un inducido cuya unión con el circuito exterior se realiza por medio de conexiones fijas (caso en que el inducido está situado en el estátor) o por anillos (inducido en el rotor), de acuerdo con lo explicado en el epígrafe 2.3, la frecuencia en el circuito exterior definida por f_L es igual que la frecuencia del inducido f_2, es decir:

$$f_L = f_2 \tag{2.147}$$

en el caso de máquinas estáticas se obtiene el **transformador y el regulador de inducción monofásico**. En el caso de máquinas móviles con $f_1 = 0$, teniendo en cuenta (2.141), se cumplirá:

$$f_L = f_2 = \pm \frac{np}{60} \tag{2.148}$$

que dan origen a las **máquinas síncronas** constituidas por el **generador síncrono** o **alternador** y **el motor síncrono**.

En el caso de máquinas móviles con $f_1 \neq 0$, teniendo en cuenta que responden a la expresión general (2.141), se cumplirá:

$$f_L = f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \tag{2.149}$$

que dan lugar a las **máquinas asíncronas o de inducción**, constituidas por el **generador asíncrono**, **el motor asíncrono y los convertidores asíncronos**.

b) Si la máquina tiene un inducido cuya unión con el circuito exterior se realiza por medio de colector de delgas, de acuerdo con lo explicado en el epígrafe 2.3, la frecuencia en el circuito exterior es de diferente valor que la del inducido, es decir:

$$f_L \neq f_2 \tag{2.150}$$

el colector de delgas se coloca siempre en el rotor, y por ello en las máquinas estáticas esta combinación no existe.

En las máquinas móviles en que $f_1 = 0$, de acuerdo con (2.145) se cumplirá:

$$f_2 = \pm \frac{np}{60} \;\; ; \;\; f_L \neq f_2 \;\; ; \;\; (f_L = 0) \tag{2.151}$$

que dan origen a las **máquinas de c.c.** (denominadas así porque en ellas se cumple: $f_L = 0$); estas máquinas incluyen: **el generador de c.c. o dinamo**, **el motor de c.c.**, **la conmutatriz y otras máquinas especiales como la amplidina**, **la metadina**, **el rototrol**, etc.

En las máquinas móviles en las que $f_1 \neq 0$, teniendo en cuenta que responden a la expresión general (2.141), se cumplirá:

$$f_2 = f_1 = \pm \frac{np}{60} \;\; ; \;\; f_L \neq f_2 \tag{2.152}$$

que dan lugar a los **motores de c.a. con conmutador o con colector de delgas**.

En el cuadro de clasificación general de las máquinas eléctricas de la Figura 2.39, los cuadros en forma de rombos indican los interrogantes a cada uno de los criterios comentados.

Con este diagrama se puede estudiar de forma cualitativa y general el funcionamiento y propiedades de cada grupo de máquinas, tal como se va a realizar en el epígrafe 2.12. En posteriores capítulos se hará un análisis más profundo de cada una de las máquinas eléctricas.

2.12. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LAS PRINCIPALES MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Vamos a realizar en este apartado un análisis básico de funcionamiento de las principales máquinas eléctricas a partir del cuadro general de clasificación de la Figura 2.39.

2.12.1. Transformadores

Son máquinas estáticas, $n = 0$, constituidas por dos devanados, inductor e inducido. El devanado inductor se conecta a una fuente de c.a. de frecuencia f_1 y se denomina **primario**. El devanado inducido tiene una frecuencia $f_2 = f_1$ y entrega energía eléctrica a un circuito exterior por medio de conexiones fijas ($f_L = f_2$); este arrollamiento inducido recibe el nombre de **secundario**. Para aumentar la inducción magnética del sistema y mejorar el acoplamiento entre ambos devanados, éstos van arrollados sobre un núcleo cerrado común, constituido por un apilamiento de chapas magnéticas de acero al silicio, tal como se muestra en la Figura 2.40.

Si la tensión entre los terminales del arrollamiento primario, V_1, es menor que la tensión secundaria, V_2, es decir, $V_1 < V_2$, el transformador se denomina **elevador**; en el caso contrario se llama transformador **reductor** ($V_1 > V_2$).

En el supuesto de considerar el transformador ideal, sin pérdidas ni caídas de tensión, de acuerdo a la expresión (2.92) se cumplirá en primario y secundario:

$$E_1 = V_1 = 4{,}44\, N_1 f_1 \Phi_m \quad ; \quad E_2 = V_2 = 4{,}44\, N_2 f_1 \Phi_m \tag{2.153}$$

siendo Φ_m el flujo máximo que atraviesa ambos arrollamientos y N_1 y N_2 los números de espiras respectivas. De las ecuaciones anteriores (2.153) se deduce:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{2.154}$$

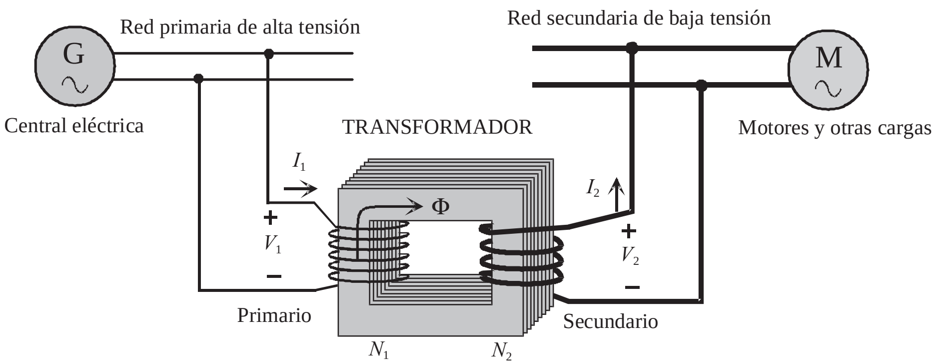


Figura 2.40. Transformador.

que se denomina **relación de transformación**. Si designamos con I_1 e I_2 las corrientes primaria y secundaria, en el caso ideal se cumplirá:

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \tag{2.155}$$

que expresa la igualdad entre las potencias de entrada y salida. Teniendo en cuenta además (2.154) se puede poner:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{2.156}$$

que indica que para una determinada potencia a transmitir, si se eleva la tensión $V_2 > V_1$, se obtiene $I_2 < I_1$, lo que indica la conveniencia de instalar los transformadores en las grandes redes eléctricas, pues manejando altas tensiones las corrientes se reducen y como consecuencia de ello se requiere una menor sección en los conductores de cobre de la línea, con el consiguiente ahorro económico. Los transformadores permiten, en consecuencia, adaptar de un modo sencillo las tensiones de las redes a los valores más adecuados y económicos. Si el devanado secundario se coloca en un rotor de tal forma que se pueda controlar la posición entre el inductor y el inducido, se obtiene el llamado regulador de inducción monofásico, que permite obtener una tensión V_2 función de la posición. En la práctica los reguladores de inducción son trifásicos y se basan en un principio de funcionamiento diferente, más cercano a los de las máquinas asíncronas o de inducción.

2.12.2. Máquinas síncronas

Son máquinas rotativas, $n \neq 0$, y de acuerdo con la Figura 2.39 se caracterizan por ser:

$$f_1 = 0 \;\; ; \;\; f_2 = \pm \frac{np}{60} \;\; ; \;\; f_L = f_2 \tag{2.157}$$

Es decir, consisten en un inductor alimentado por c.c. ($f_1 = 0$), que se denomina también devanado de excitación o campo, que suele colocarse en el rotor (Fig. 2.41), alimentado por medio de dos anillos.

El inducido normalmente es trifásico y suele colocarse en el estátor (en las máquinas de pequeña potencia se utiliza con frecuencia la posición inversa, es decir, se sitúa el inductor en el estátor y el inducido en el rotor, existiendo entonces tres anillos en el rotor). Cuando funciona como generador (**alternador**), se introduce energía mecánica por el eje, y al aplicar c.c. al inductor, se obtiene en el inducido una f.e.m. de frecuencia $f_2 = \pm np/60$, que se aplica a la carga. La c.c. necesaria para alimentar el inductor se obtiene de una pequeña **dinamo excitatriz**, que está situada en el mismo eje de la máquina (véase epígrafe 2.12.3)*.

El alternador es con mucho la máquina generadora más importante que existe, y proporciona la mayor parte de la energía eléctrica que hoy se consume; están situados en las centrales hidráulicas, térmicas y nucleares con potencias de hasta 1.000 MW; también se encuentran en los grupos electrógenos acoplados a motores de combustión interna que se utilizan como alimentación eléctrica en obras civiles aisladas, alejadas de las redes de distribución de energía eléctrica y también se dispone de grupos electrógenos en hospitales, aeropuertos, campos deportivos, grandes centros comerciales y en general en aquellos servicios públicos

* Modernamente la c.c. se extrae de un alternador piloto colocado en el mismo eje, previa rectificación (conversión de la c.a. en c.c.).

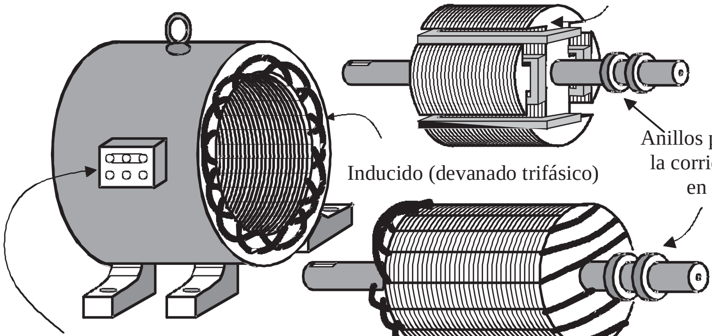


Figura 2.41. Tipos de máquinas síncronas.

donde por seguridad debe asegurarse una alimentación eléctrica de emergencia a ciertos circuitos básicos como alumbrado de señalización que determinen con claridad las puertas de salida del público, en los quirófanos (en el caso de hospitales), en los equipos informáticos y centros de comunicación (como es el caso de aeropuertos), etc. A este respecto, debe señalarse que cuando los consumos de las cargas son pequeños, los grupos electrógenos se sustituyen por equipos electrónicos denominados SAIs (Sistemas de Alimentación Ininterrumpida), que son equipos estáticos basados en inversores u onduladores (véase capítulo 7) que transforman la corriente continua de unas baterías eléctricas (que en situación normal se van cargando por medio de rectificadores) en corriente alterna para alimentar servicios de emergencia durante un período de tiempo reducido.

Se observa que la frecuencia de la carga f_L que coincide con la del inducido ($f_L = f_2 = \pm np/60$) es directamente proporcional a la velocidad; como quiera que la frecuencia es una magnitud que debe mantenerse esencialmente constante, para que sea posible un enlace entre las diversas centrales de un país es preciso que los motores primarios que mueven los alternadores: turbinas hidráulicas del tipo Pelton, Francis y Kaplan, turbinas térmicas, etc., giren a velocidad constante; para ello se dota a estas últimas máquinas de reguladores tacométricos, que actúan sobre la entrada de agua o vapor en formas muy diversas.

La máquina síncrona puede funcionar también como motor introduciendo una c.a. de frecuencia f_2 por el inducido (teniendo el inductor $f_1 = 0$), apareciendo un par en el rotor que lo hace girar a velocidad:

$$n = \frac{60f_2}{p} \tag{2.158}$$

cuya magnitud se observa que es función directa de la frecuencia (velocidad de sincronismo). Este motor tiene el inconveniente de que gira a una velocidad fija, con el consiguiente problema de arranque y pérdida de sincronismo cuando se producen pares de frenado bruscos. Los motores síncronos se utilizan cuando interesa una gran constancia en la velocidad, como en relojes eléctricos y en algunos tipos de servomecanismos. Como quiera que también tienen la propiedad de poder regular su f.d.p. actuando sobre la c.c. de excitación, se emplean también para regular el f.d.p. de las instalaciones (se dice entonces que funcionan como condensado-

res síncronos). El mismo alternador de una central eléctrica puede funcionar como motor síncrono, operación que se realiza en las modernas centrales de bombeo tomando energía eléctrica de la red y acumulando energía hidráulica aguas arriba de la presa.

2.12.3. Máquinas de c.c.

Son máquinas rotativas, $n \neq 0$, y de acuerdo con la Figura 2.39, se caracterizan por ser:

$$f_1 = 0 \quad ; \quad f_2 = \pm\frac{np}{60} \quad ; \quad f_L \neq f_2 \quad ; \quad (f_L = 0) \tag{2.159}$$

El nombre de máquinas de c.c, se debe a que el valor de la frecuencia de la carga es $f_L = 0$, lo cual se consigue por la acción **rectificadora** del colector. Estas máquinas disponen de un inductor alimentado por c.c. ($f_1 = 0$), que al igual que las máquinas síncronas se denomina también **devanado de excitación o campo** y se sitúa en el estátor (Fig. 2.42). Cuando funciona en régimen generador, se suministra una energía de rotación al eje y se aplica una c.c. a la excitación, obteniéndose en el inducido una corriente alterna de frecuencia:

$$f_2 = \pm\frac{np}{60} \tag{2.160}$$

Debido a la acción rectificadora del colector se obtiene una c.c. entre las escobillas de salida ($f_L = 0$), energía que es aplicada a la carga. El generador de c.c. se conoce con el nombre de **dinamo**, y tiene la importancia histórica de ser el primer tipo de generador empleado para la obtención de energía eléctrica a gran escala. Hoy en día se han sustituido para esta misión por rectificadores que permiten obtener una c.c. por conversión de la c.a. de la red.

Cuando funcionan como motores de c.c., es preciso introducir c.c. por el inductor y por las escobillas del inducido, apareciendo un par que hace girar el rotor de la máquina. La velocidad de giro **puede regularse fácilmente**, controlando la corriente del inductor o del inducido, o de ambas a la vez. Esta facilidad de regulación de velocidad de los motores de c.c., unida a los altos pares de arranque que se pueden obtener, ha hecho que este tipo de motor fuera insustituible en aquellas aplicaciones que necesitaban velocidad variable, tales como trenes de laminación y tracción eléctrica. (En España, la tracción eléctrica se realiza a 3.000 V de c.c. en los ferrocarriles y de 600 V a 1.500 V de c.c. en los trenes metropolitanos

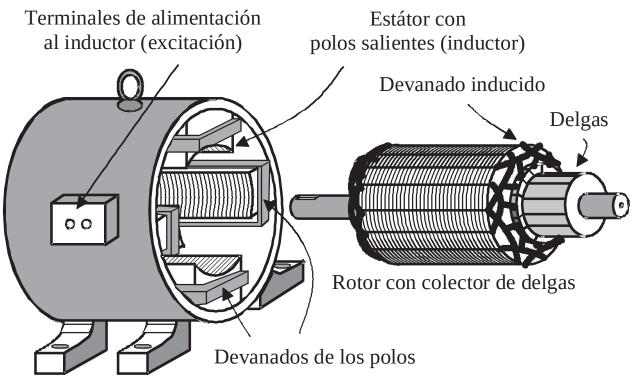


Figura 2.42. Máquina de c.c.

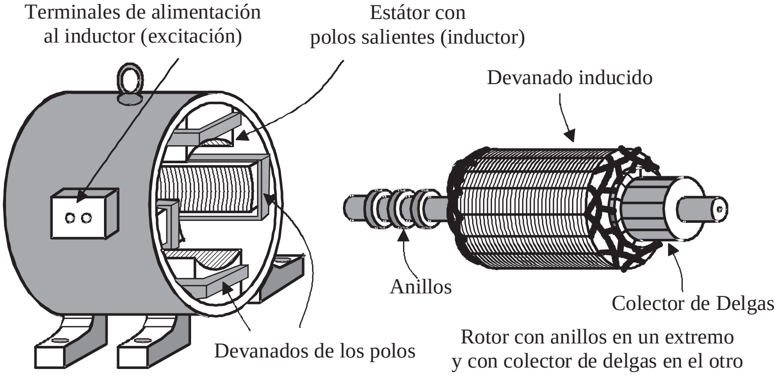


Figura 2.43. Conmutatriz.

«Metro»*. El tren de alta velocidad español AVE funciona con corriente alterna monofásica a 25 kV).

Si los devanados inductor e inducido llevan alimentaciones separadas, se tiene la llamada máquina con excitación **independiente**. Normalmente, ambos circuitos se conectan eléctricamente entre sí; cuando se conectan en paralelo, se obtiene la máquina derivación o ***shunt***, en la que el inductor está formado por un devanado de muchas espiras de hilo delgado por el que se deriva una corriente pequeña. Cuando se conectan en **serie**, el inductor tiene pocas espiras de hilo grueso, ya que por él circula toda la corriente del inducido (de gran valor). Si la máquina dispone de ambos tipos de excitación, serie y paralelo, se denomina compuesta o ***compound***. Estos sistemas de conexión se emplean para producir la autoexcitación de la máquina, a partir del magnetismo remanente de los polos inductores. Es frecuente (aunque no son normas generales) emplear la conexión serie en motores y la *shunt* y *compound* en generadores.

Si a la máquina de c.c. básica de la Figura 2.42 se la hacen conexiones adecuadas en el devanado del inducido y son llevadas al exterior por medio de anillos colectores como indica la Figura 2.43, se obtiene una máquina denominada **conmutatriz** o **convertidor síncrono**. Tal máquina puede funcionar: *a*) entregando al exterior c.a. y c.c.; *b*) trabajando como motor síncrono y generador de c.c. simultáneamente; *c*) trabajando como motor de c.c. y generador de c.a. simultáneamente. Este tipo de máquina se ha utilizado sobre todo funcionando como en el caso *b*) y se empleaba para convertir, en un solo grupo, la c.a. de la red en c.c. (por ejemplo, para suministrar la energía de c.c. de los tranvías); hoy en día ya han desaparecido, siendo sustituidas por convertidores estáticos electrónicos.

2.12.4. Máquinas asíncronas o de inducción

Son máquinas rotativas, $n \neq 0$, y de acuerdo con el cuadro de clasificación general de la Figura 2.39 se caracterizan por:

$$f_1 \neq 0 \quad ; \quad f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \quad ; \quad f_L = f_2 \tag{2.161}$$

* Desde el año 2002, el tren metropolitano de Madrid, debido a su gran extensión, ha comenzado a construir redes de 1.500 V de c.c. para alimentar algunas de sus líneas. Por ejemplo, la nueva línea 8, que enlaza Nuevos Ministerios con el aeropuerto de Barajas, se inauguró en mayo de 2002 con las unidades S/8.000, que disponen de equipo de tracción bitensión (1.500/600 V de c.c.) y con motores de c.a. asíncronos alimentados mediante onduladores o inversores electrónicos equipados con IGBT.

Están constituidas por un devanado inductor situado en el estátor por el que se introduce una c.a. de frecuencia f_1. En el caso de máquinas de potencia superior a 1/2 CV, el devanado anterior es trifásico, al igual que la corriente de alimentación, apareciendo, de acuerdo con el apartado 2.8.3, un campo magnético giratorio cuya velocidad, teniendo en cuenta la expresión (2.68), es:

$$n_1 = \frac{60f_1}{p} \tag{2.162}$$

El devanado inducido está en el rotor y puede ser trifásico o no; sin embargo, y como se comprenderá más adelante al estudiar el Capítulo 4, *debe estar bobinado para el mismo número de polos* que el devanado del estátor. En la Figura 2.44 se indica el esquema básico, donde se ha supuesto un arrollamiento trifásico en el rotor, cuyas salidas van a tres anillos, donde se conecta **no** una carga, sino un reóstato de arranque. En la mayoría de los casos el rotor está formado por una serie de conductores puestos en cortocircuito por dos anillos extremos, formando un devanado que se conoce con el nombre de **jaula de ardilla**.

La máquina puede funcionar como:

a) **Motor.** Es el caso más normal. En esta situación el campo giratorio del estátor induce f.e.m.s. en el devanado del rotor y al estar éste en cortocircuito (jaula de ardilla) o cerrado por medio de un **reóstato de arranque** (rotor devanado o con anillos) aparecen corrientes en el rotor que, al reaccionar con el campo giratorio del estátor, mueven la máquina a una velocidad n muy cercana y por **debajo** de la de sincronismo n_1, de tal forma que la identidad segunda de (2.161) queda expresada:

$$f_2 = f_1 - \frac{np}{60} \tag{2.163}$$

Se denomina deslizamiento «s» al cociente:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{2.164}$$

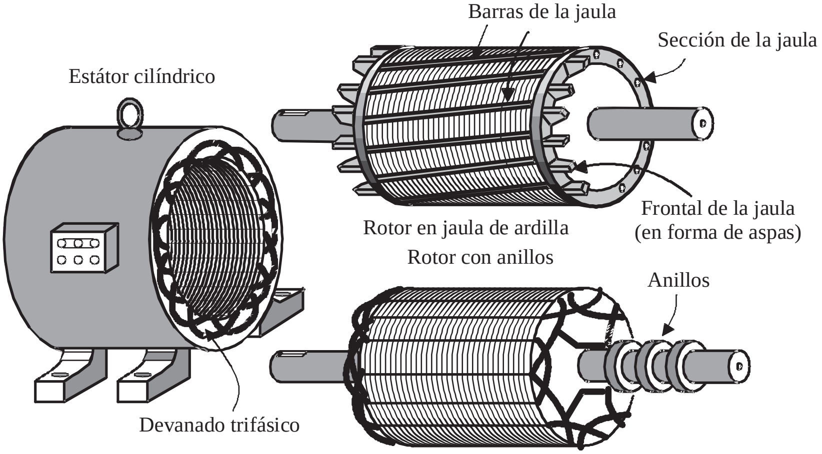


Figura 2.44. Tipos de máquinas asíncronas o de inducción.

que teniendo en cuenta (2.162) se expresa:

$$s = \frac{\dfrac{60 f_1}{p} - n}{\dfrac{60 f_1}{p}} = \frac{f_2}{f_1} \qquad (2.165)$$

Los deslizamientos a plena carga de estos motores que giran a una velocidad **asíncrona** respecto al campo giratorio del estátor varían entre el 3 y 8 por 100 y es difícil de regular; sin embargo, la simplicidad y robustez de estos motores (sobre todo en el caso de rotor en jaula de ardilla) los hacen aptos para todo tipo de trabajo en el que no sea necesario un control preciso de la velocidad, como en grúas, ascensores, máquinas herramientas, hormigoneras, etc., y por ello es la máquina electromagnética de mayor aplicación en la ingeniería, cubriendo más del 80 por 100 de los motores eléctricos empleados en la industria. En potencias pequeñas (< 1/2 CV) el estátor es monofásico y de acuerdo con el apartado 2.8.4 se obtienen dos campos giratorios de sentido contrario, que no producen par de arranque en el rotor, teniendo que recurrir a procedimientos especiales de arranque, como ya se explicará en el Capítulo 4.

b) **Generador.** Si girando la máquina asíncrona como motor, a una velocidad $n < n_1$, se obliga a mover el rotor, por un medio exterior, a una velocidad superior a la de sincronismo y en su mismo sentido, de acuerdo con (2.164) el deslizamiento se hace negativo y la máquina absorbe entonces energía mecánica que se convierte en eléctrica, devuelta a la red por el estátor a frecuencia f_1. La máquina trabaja entonces como generador, pero este tipo de funcionamiento no se utiliza casi nunca en la práctica porque no es autónomo, siendo necesaria la red eléctrica de «alimentación» para suministrar la corriente de magnetización de la máquina. No obstante, existen procedimientos de autoexcitación de generadores asíncronos a base de condensadores, como comprobará el lector en el Capítulo 4.

c) **Convertidor de frecuencia.** Si se alimenta el estátor de una máquina eléctrica por medio de una red de c.a. de frecuencia f_1 y se mueve el rotor por un medio mecánico exterior a velocidad n, se obtiene una frecuencia en el rotor, cuyo valor está definido en (2.161):

$$f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \qquad (2.166)$$

el sumando es **positivo** o negativo según que el sentido de giro del rotor tenga **diferente** o **igual** sentido que el campo giratorio del estátor. La máquina recibe energía eléctrica por el inductor y energía mecánica por el eje, de tal forma que por los anillos del inducido se puede alimentar una carga eléctrica a frecuencia $f_2 \neq f_1$.

2.12.5. Motores de c.a. de colector. Motores universales

Son máquinas rotativas, $n \neq 0$, y de acuerdo con la Figura 2.39 se caracterizan por ser:

$$f_1 \neq 0 \quad ; \quad f_2 = f_1 \pm \frac{np}{60} \quad ; \quad f_L \neq f_2 \qquad (2.167)$$

es decir, consisten en un inductor, situado en el estátor, alimentado generalmente por c.a. monofásica. El inducido está en el rotor y dispone de colector de delgas con una apariencia física análoga a las máquinas de c.c. (Figura 2.42). Normalmente los devanados del estátor y

rotor van en serie, resultando una máquina con características similares al motor serie de c.c. En su versión de pequeña potencia (fracción de CV) son muy empleadas en aparatos electrodomésticos: batidoras, máquinas de afeitar, taladros eléctricos de mano, secadores, etc. Con potencias más elevadas se utilizan en tracción eléctrica a frecuencias que oscilan entre 50 Hz y 50/3 = 16,66 Hz. Pueden adaptarse también a un funcionamiento con c.a. o c.c., recibiendo entonces el nombre de **motores universales**.

PROBLEMAS

2.1. Una máquina eléctrica de 100 kVA tiene unas pérdidas fijas de 1.000 W y unas pérdidas variables de 1.500 W a plena carga (asignada). Calcular: *a*) Rendimiento de la máquina, cuando trabaja a 1/2 de la plena carga con f.d.p. 0,8. *b*) Potencia de máximo rendimiento. *c*) Índice de carga óptimo.

[Resp.: *a*) 96,68 %; *b*) 81,65 kVA; *c*) 0,8165.]

2.2. Una máquina de 20 kVA tiene unas pérdidas en el cobre a plena carga de 400 W, unas pérdidas en el hierro de 150 W y unas pérdidas mecánicas de 200 W. Determinar: *a*) Rendimiento a 3/4 de la plena carga con f.d.p. 0,8; *b*) Rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,9; *c*) Potencia aparente de máximo rendimiento; *d*) Rendimiento en el caso anterior para f.d.p. unidad.

[Resp.: *a*) 95,43 %; *b*) 96%; *c*) 18,71 kVA; *d*) 96,39 %.]

2.3. Se tiene la estructura magnética de la Figura P.2.1. El entrehierro tiene un espesor *g*. Se coloca en el rotor una bobina de paso diametral AA′ formada por *N* espiras por las que circula una corriente *i*. Dibujar la curva de inducción B producida y dar la expresión del desarrollo en serie de Fourier de la misma. Se desprecia la reluctancia del hierro.

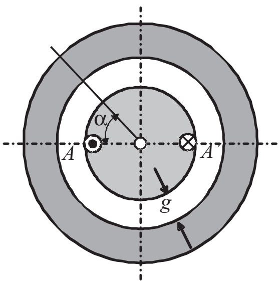


Figura P.2.1.

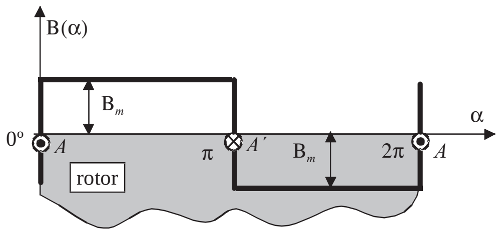


Figura P.2.2.

[Resp.: La curva de distribución de la inducción se indica en la Figura P.2.2. El desarrollo en serie de Fourier es: $\left[B(\alpha) = \frac{4}{\pi}\mu_0 \frac{Ni}{2g}\left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\alpha + \cdots + \frac{1}{h}\operatorname{sen}h\alpha + \cdots\right).\right]$

2.4. Se tiene la estructura magnética de la Figura P.2.3. Los parámetros son idénticos a los del problema anterior, pero ahora las bobinas A-A′ y B-B′ están acortadas un ángulo eléctrico γ. Dibujar la curva de inducción B producida y obtener el desarrollo en serie de Fourier de la misma. Deducir conclusiones prácticas.

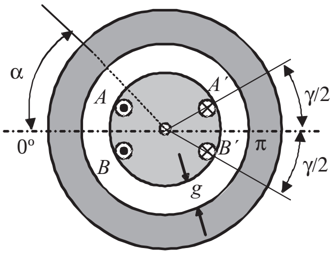


Figura P.2.3.

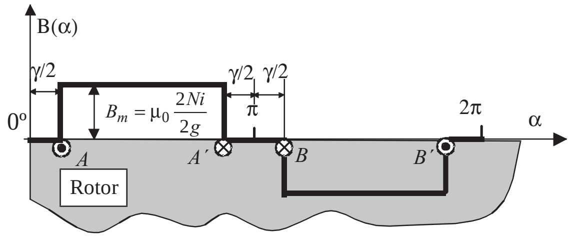


Figura P.2.4.

[Resp.: La curva de distribución de *B* se indica en la Figura P.2.4. El desarrollo en serie de Fourier es:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi}\,\mu_0\,\frac{Ni}{2g}\left(\cos\frac{\gamma}{2}\,\text{sen}\,\alpha + \frac{1}{3}\cos\frac{3\gamma}{2}\,\text{sen}\,3\alpha + \cdots + \frac{1}{h}\cos\frac{h\gamma}{2}\,\text{sen}\,h\alpha + \cdots\right)$$

Se observa que el resultado es el mismo que se obtendría considerando las bobinas de paso diametral, pero introduciendo un factor de acortamiento expresado por: $K_a = \cos\frac{h\gamma}{2}$, donde h indica el orden del armónico.]

2.5. Considerar la estructura magnética de la Figura P.2.5, que contiene 8 ranuras donde se colocan 4 bobinas de N espiras cada una, recorridas por una corriente i. En el supuesto de despreciar la reluctancia del hierro, dibujar la curva de inducción magnética producida por el conjunto. Deducir conclusiones prácticas.

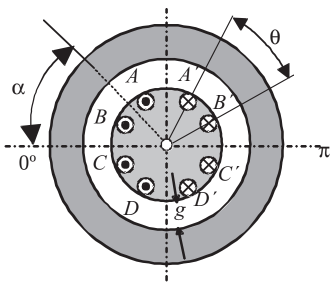


Figura P.2.5

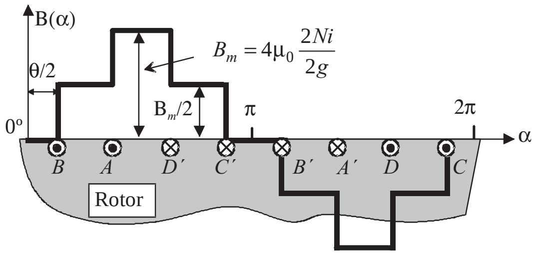


Figura P.2.6

[Resp.: La distribución de la inducción se muestra en la Figura P.2.6, cuyo desarrollo en serie de Fourier es:

$$B(\alpha) = q \cdot \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{Ni}{2g} \left(\frac{\text{sen}\,\dfrac{q\theta}{2}}{q\,\text{sen}\,\dfrac{\theta}{2}} \text{sen}\,\alpha + \frac{1}{3} \frac{\text{sen}\,\dfrac{q3\theta}{2}}{q\,\text{sen}\,\dfrac{3\theta}{2}} \text{sen}\,3\alpha + \cdots + \frac{1}{h} \frac{\text{sen}\,\dfrac{qh\theta}{2}}{q\,\text{sen}\,\dfrac{h\theta}{2}} \text{sen}\,h\alpha + \cdots \right)$$

donde q indica el número de ranuras por polo, que en este caso vale 4. Se observa que el resultado es el mismo que el que se obtendría considerando las cuatro bobinas concentradas, pero introduciendo un **factor de distribución** expresado por:

$K_d = \dfrac{1}{h} \dfrac{\text{sen}\,\dfrac{qh\theta}{2}}{q\,\text{sen}\,\dfrac{h\theta}{2}}$, donde θ indica el ángulo eléctrico entre ranuras consecutivas.]

2.6. Considerar la estructura magnética de la Figura P.2.7, donde se muestra un rotor bobinado con un arrollamiento uniformemente distribuido, con un total de N espiras. El devanado puede considerarse como una generalización del problema anterior cuando el número de ranuras se hace muy elevado. Dibujar la forma de B y obtener su desarrollo en serie de Fourier.

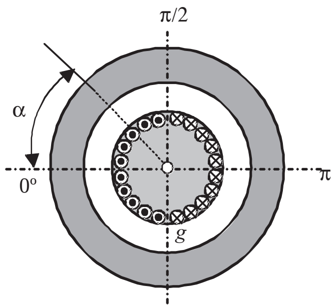


Figura P.2.7.

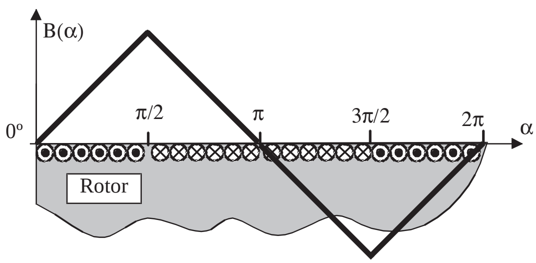


Figura P.2.8.

[Resp.: El esquema de B se indica en la Figura P.2.8, cuyo desarrollo es:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{Ni}{2g} \left(\frac{\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}} \text{sen}\,\alpha + \frac{1}{3} \frac{\text{sen}\,\dfrac{3\pi}{2}}{\dfrac{3\pi}{2}} \text{sen}\,3\alpha + \cdots + \frac{1}{h} \frac{\text{sen}\,\dfrac{h\pi}{2}}{\dfrac{h\pi}{2}} \text{sen}\,h\alpha + \cdots \right)$$

El resultado es un caso particular del problema 2.5 cuando la extensión del devanado es $q\theta = \pi$, que se denomina extensión de fase. La distribución anterior es típica de los arrollamientos del inducido de las máquinas de c.c.]

2.7. Considerar la estructura magnética de la Figura P.2.9, donde se muestra un rotor bobinado con un arrollamiento uniformemente distribuido, con un total de N espiras que ocupan una extensión de fase de σ radianes. Dibujar la forma de la inducción B y obtener su desarrollo en serie de Fourier.

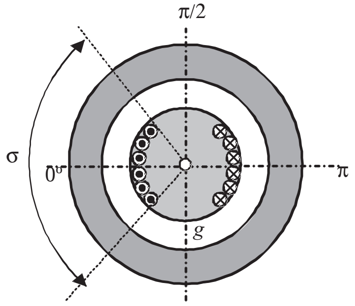


Figura P.2.9.

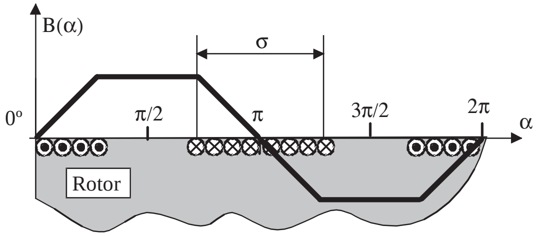


Figura P.2.10.

[Resp.: El esquema de B es el indicado en la Figura P.2.10, cuyo desarrollo es:

$$B(\alpha) = \frac{4}{\pi}\mu_0 \frac{Ni}{2g}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}}{\frac{\sigma}{2}} \operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}\frac{3\sigma}{2}}{\frac{3\sigma}{2}} \operatorname{sen} 3\alpha + \cdots + \frac{1}{h}\frac{\operatorname{sen}\frac{h\sigma}{2}}{\frac{h\sigma}{2}} \operatorname{sen} h\alpha + \cdots\right)$$

que coincide con la solución del prob. 2.6 cuando la extensión de fase $\sigma = \pi$. Esta forma de B se obtiene en los devanados de excitación de los turboalternadores de las centrales térmicas.]

2.8. El diagrama de la Figura P.2.11 representa la forma del campo de un polo saliente de un alternador. Calcular: *a*) la amplitud del fundamental de la onda de inducción; *b*) amplitud de la onda fundamental cuando $\theta = \pi/6$; *c*) factor de forma de la onda de inducción cuando $\theta = \pi/6$.

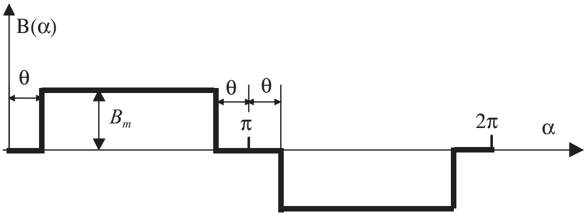


Figura P.2.11.

[Resp.: *a*) $\dfrac{4B_m \cos\ \theta}{\pi}$; *b*) $\dfrac{2\sqrt{3}B_m}{2}$; *c*) $\sqrt{\dfrac{6}{4}} = 1{,}255$.]

2.9. Se tiene el circuito magnético de la Figura P.2.12 formado por un devanado inductor situado en el estátor, alimentado por una c.a. de 50 Hz, que produce un flujo sinusoidal en el entrehierro de valor máximo 8 mWb. En el rotor se sitúa un arrollamiento

de 10 espiras concentradas de paso diametral. Calcular la f.e.m. inducida en la bobina del rotor cuando gira a 1.500 r.p.m. Si se considera como referencia que en $t = 0$, $\theta = 0$.

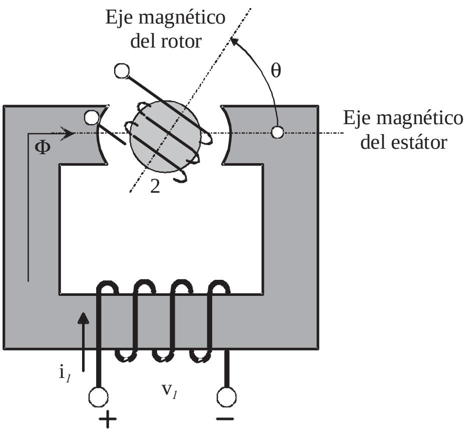


Figura P.2.12.

[Resp.: $e = -25{,}12 \cos 314\,t \cos 157\,t + 12{,}56 \operatorname{sen} 314\,t \operatorname{sen} 157\,t$.]

2.10. Calcular el valor del factor de distribución de una máquina trifásica que tiene 12 ranuras por polo.

[Resp.: 0,958.]

2.11. El inducido de una máquina bipolar está completamente bobinado con N espiras **uniformemente distribuidas** de paso diametral. La f.e.m. inducida en cada espira tiene un valor eficaz de 10 V. ¿Cuál será la f.e.m. inducida en todo el devanado con todas las espiras en serie?

[Resp.: $\dfrac{20}{\pi} N$ voltios.]

2.12. El inducido de una máquina bipolar tiene dos bobinas de paso diametral, una de 100 espiras y otra de 50 espiras, que forman entre sí un ángulo de 30°. El inducido está en el rotor y se hace girar éste a una velocidad de 1.000 r.p.m. dentro del campo uniforme de los polos, cuya inducción vale 100 gauss. El área de cada bobina es de 400 cm^2. Si las bobinas se conectan en serie, hallar la lectura que se obtendrá en un voltímetro conectado entre las escobillas de la máquina.

[Resp.: 4,31 V o 1,83 V.]

2.13. Un alternador trifásico de 20 polos tiene un devanado conectado en estrella de 180 ranuras y 10 conductores por ranura. El flujo por polo tiene un valor máximo de 0,04 Wb, y está distribuido de forma sinusoidal en el entrehierro. La velocidad es de 300 r.p.m. Hallar las f.e.m.s. de fase y línea, en el supuesto de que las bobinas sean de paso diametral.

[Resp.: 2.557,45 V; 4.429,6 V.]

2.14. Un alternador trifásico conectado en estrella tiene 6 polos y debe dar una f.e.m. de 380 V a 50 Hz. El estátor tiene 3 ranuras por polo y fase y 4 conductores por ranura. Calcular: *a*) las r.p.m. a las que debe girar el rotor; *b*) el flujo máximo por polo si tiene una distribución sinusoidal. NOTA: Las bobinas son de paso diametral.

[Resp.: *a*) 1.000 r.p.m; *b*) 0,0287 Wb.]

2.15. El inducido de una alternador de 20 polos, 50 Hz, tiene un total de 180 ranuras. Calcular las f.e.m.s. que se obtienen en los siguientes casos: *a*) cuando se bobina un devanado monofásico que cubre 5 ranuras por polo; *b*) ídem cuando se cubren todas las ranuras; *c*) cuando se bobina un arrollamiento trifásico que cubre todas las ranuras. Las bobinas son de paso diametral, y en cada ranura se colocan 6 conductores. El flujo está distribuido de forma sinusoidal en el entrehierro y tiene un valor máximo de 0,025 Wb.

[Resp.: *a*) 1.470 V; *b*) 1.920 V; *c*) 960 V/fase. Si se comparan los resultados *a*) y *b*) se observa que en el 2.º caso se obtiene un 30 por 100 más de f.e.m. pero empleando un 80 por 100 más de material (cobre); de aquí se deduce la conveniencia de no devanar enteramente un inducido cuando el arrollamiento es monofásico.]

2.16. Una máquina eléctrica tiene un inducido con 9 ranuras por polo, estando las bobinas acortadas en 2 ranuras. Calcular el factor de acortamiento del devanado.

[Resp.: 0,940.]

2.17. Un rotor bipolar, excitado para dar un flujo máximo por polo de 0,02 Wb, gira a 3.000 r.p.m. dentro de un estátor que contiene 18 ranuras. Se colocan dos bobinas de 50 espiras A y B en el estátor del modo siguiente: Bobina A: Lados de bobina en las ranuras 1 y 11; Bobina B: Lados de bobina en las ranuras 2 y 10. Calcular la f.e.m. resultante cuando las bobinas se conectan en serie. La distribución de flujo es sinusoidal.

[Resp.: 437,25 V o 0 V; dependiendo de si las f.e.m.s. son aditivas o substractivas.]

2.18. Resolver el problema anterior si la bobina B está situada entre las ranuras 2 y 12.

[Resp.: 430,61 V o 75,93 V.]

2.19. Un alternador trifásico de 20 polos, conectado en estrella, gira a 300 r.p.m. El inducido tiene 360 ranuras y 6 conductores por ranura. La anchura de las bobinas es de 5/6 del paso polar. Si el flujo máximo por polo, de distribución sinusoidal, es de 0,086 Wb, ¿cuáles serán los valores de las f.e.m.s. de fase y de línea?

[Resp.: 6.347,3 V; 10.993,8 V.]

2.20. Se dispone de una máquina eléctrica bipolar experimental de entrehierro uniforme, que tiene una distribución de inducción en el entrehierro expresada por la ecuación:

$$B(\theta) = 1{,}05 \cos \theta + 0{,}35 \cos 3\theta + 0{,}21 \cos 5\theta + 0{,}15 \cos 7\theta \quad \text{Teslas}$$

El paso polar es de 50 cm y la longitud del núcleo de 40 cm. Si el inducido consta de una bobina de 5 espiras con una anchura de 4/5 del paso polar y la frecuencia de la f.e.m. generada es de 50 Hz, calcular la f.e.m. inducida en la bobina y su valor eficaz.

[Resp.: $e = 199{,}72 \cos \theta + 41{,}14 \cos 3\theta - 17{,}63 \cos 7\theta$; $\theta = \omega t$; 144,72 V.]

Biografías

Davenport, Thomas (1802-1851). Inventor norteamericano. Comenzó haciendo experiencias con electroimanes. En 1831 construyó un motor eléctrico, probablemente el primero que se conoce en la historia de la ingeniería eléctrica. Consistía en dos electroimanes fijos y otros dos móviles, situando estos últimos en los radios de una rueda y estando unidos a un dispositivo conmutador; el motor se alimentaba mediante una batería de Volta. Este motor fue utilizado por Davenport para mover un cochecito alrededor de una vía circular, lo que representaba en cierto modo el primer prototipo de ferrocarril con tracción eléctrica.

Ferraris, Galileo (1847-1897). Físico e ingeniero italiano. Obtuvo su título de ingeniero en 1869, y leyó su tesis doctoral en 1872, que versaba sobre la teoría matemática de la propagación de la electricidad en sólidos homogéneos. Fue profesor de la Escuela Militar de Turín. Presidente de la Exposición Internacional de Electricidad de Turín en 1883, en la que se expuso por primera vez el transformador de Gaulard y Gibbs. Basándose en sus conocimientos sobre la polarización circular de la luz, se le ocurrió hacer un experimento similar con electroimanes, colocando dos de ellos en ángulo recto y alimentándolos con corrientes en cuadratura y de este modo consiguió un campo magnético giratorio (1885); más tarde aplicó estas ideas en la construcción de un motor basado en este principio (motor asíncrono o de inducción), que presentó a la Real Academia de Turín en 1888. Se atribuye, sin embargo, a Tesla la paternidad de este motor y a Ferraris el invento del campo magnético giratorio. Ferraris participó con la AEG-Oerlikon en el diseño de la red de transporte de c.a. de 175 km de longitud entre Lauffen y Frankfurt para la Exposición Internacional en esta última ciudad en 1891.

Fitzgerald, Arthur Eugene (1909-1978). Ingeniero americano. Estudió en el Politécnico de Brooklyn (1929) y más tarde se graduó en el MIT (1931), doctorándose en este centro en 1937. En 1931 ingresó en el MIT en calidad de ayudante de investigación, en 1940 era profesor ayudante, asociado en 1945 y catedrático de Ingeniería Eléctrica en 1952. Fue el responsable de la organización de las enseñanzas de Ingeniería eléctrica en el MIT para estudiantes no especialistas y especialistas en electricidad; escribió para los primeros, un libro de texto de ingeniería eléctrica que fue adoptado por más de 100 universidades de todo el mundo y para los segundos escribió un texto moderno sobre máquinas eléctricas que también se enseñó en más de 50 universidades (este último libro fue escrito en colaboración con Charles Kingsley). Dirigió el analizador de redes del MIT y supervisó los estudios de sistemas eléctricos de potencia. Trabajó también como ingeniero consultor de la empresa Jackson y Moreland. Fellow del IEEE en 1956.

Kron, Gabriel (1901-1967). Ingeniero eléctrico y matemático húngaro-americano. Se graduó en la Universidad de Michigan (1924). En 1926 amplió su formación en Europa, dedicándose a estudiar la teoría del análisis tensorial. En 1934 se incorporó a la *General Electric* de Estados Unidos, para trabajar en el análisis de sistemas eléctricos de potencia. En 1935 ganó el Premio Montefiore por su artículo: *Non-Riemanian Dynamics of Rotating Electrical Machinery*. Escribió varios libros y una gran cantidad de artículos sobre las aplicaciones de la geometría no euclidiana y el cálculo tensorial a la ingeniería eléctrica. Sus aportaciones han sido a menudo comparadas con las que hizo Steinmetz en la teoría de circuitos a principio del siglo XX. La máquina generalizada de Kron permitió profundizar en el análisis dinámico y transitorio de las máquinas eléctricas, lo que transformó enormemente la enseñanza de esta materia en todas las universidades del mundo. En 1966 se jubiló de la *General Electric* cuando estaba trabajando en el análisis de redes dimensionales.

Leblanc, Maurice (1857-1923). Ingeniero francés. Se graduó en la Escuela Politécnica (1878). Trabajó en la Compañía de ferrocarriles del Este, haciendo mejoras en las locomotoras eléctricas orientado por Marcel Deprez. A partir de 1888 se dedicó a sus investigaciones sobre aparatos eléctricos: alternadores, transformadores, conmutatrices, cambiadores de frecuencia, etc. Inventó, en unión con Hutin, el devanado amortiguador en los alternadores para mejorar su comportamiento transitorio. En 1897 la *General Electric* le ofreció el puesto de Ingeniero Jefe pero no aceptó. Más tarde, en 1901, George Westinghouse obtuvo permiso para explotar sus patentes en Estados Unidos

A raíz de sus contactos con esta empresa fue nombrado Ingeniero Jefe del Consejo de Administración de la Compañía Westinghouse en Francia. En sus últimos años se dedicó a la mecánica, para hacer un frigorífico doméstico, estudiando compresores y condensadores; también diseñó motores para aviones y propuso utilizar corrientes de alta frecuencia para la propulsión de trenes eléctricos. Fue Presidente del Comité Electrotécnico Internacional entre 1912 y 1914.

MONTSINGER, Vincent Melanchton (1884-?). Ingeniero americano. Se graduó en la Universidad de Carolina del Norte (1909). Ingresó a continuación en la *General Electric*, donde fue asignado al departamento de ensayos eléctricos. Entre 1912 y 1919 realizó investigaciones en el Laboratorio de Desarrollo. A partir de 1922 se dedicó al diseño de transformadores y a los problemas de calentamiento y aislamiento de los devanados. A él se debe la célebre ley de que la vida de un aislante se reduce a la mitad por cada 10 °C de elevación de temperatura respecto a la máxima admitida. Perteneció a diversos Comités de patrones y normas. Fue uno de los representantes americanos de la Comisión Electrotécnica Internacional entre 1937 y 1944.

PARK, Robert H. (1902-1994). Ingeniero eléctrico americano. Nació en Estrasburgo (Alemania) el 15 de marzo de 1902 (sus padres eran americanos). Murió el 18 de febrero de 1994 en Providence, Estados Unidos. Se graduó en el *Massachusetts Institute of Technology* en 1923. Amplió estudios en Estocolmo. Su publicación que le dio a conocer mundialmente fue el artículo publicado en dos partes: *Two-Reaction Theory of Synchronous Machines.* (Part I, Generalized Method of Analysis. AIEE Trans., Vol. 48, págs. 716-730, July, 1929); Part II, AIEE Trans., Vol. 52, págs. 352-355, June, 1933). En este trabajo Park, basándose en los ejes d y q de Blondel, desarrolló las ecuaciones de las máquinas síncronas que servirían más tarde a Gabriel Kron para realizar un estudio generalizado y unificado de todas las máquinas eléctricas. Irónicamente, recibió un Premio del AIEE en 1931 por otro artículo: *Circuit Breaker Recovery Voltages-Magnitudes and Rates of Rise (*AIEE Trans., Vol. 50, págs. 204-238, March, 1931). De cualquier modo, prácticamente estos dos artículos le consagraron mundialmente al principio de su carrera. Fundó en 1950 su propia empresa para fabricar botellas de plástico y contribuyó mucho a su automatización. Premiado en 1972 con la medalla Lamme del IEEE. Estaba en posesión de 17 patentes industriales.

ROWLAND, Henry Augustus (1848-1901). Físico americano. Se graduó en Ingeniería en el Politécnico de Rensselaer, N. Y., en 1870. Estudió en Berlín bajo las enseñanzas de Helmholz. En 1876 se hizo cargo de la Cátedra de Física en la Universidad John Hopkins en Baltimore, puesto que ejerció hasta su muerte. Estudió el campo magnético producido por cuerpos cargados en movimiento. Redeterminó el valor del ohmio y el equivalente mecánico del calor. Diseñó redes de difracción que tenían grandes ventajas en espectroscopia astronómica. No tuvo gran notoriedad en su país, pero en palabras de Maxwell, se le puede considerar como uno de los mejores físicos americanos del siglo XIX. En sus últimos años estuvo desarrollando un sistema múltiplex de telegrafía.

SAXTON, Joseph (1799-1873). Inventor americano. Desde pequeño mostró grandes cualidades manuales y un gran talento en la construcción de aparatos de precisión. Fue aprendiz de relojero y en 1824 recibió un premio del Instituto Franklin por la construcción de un reloj de péndulo con compensación de temperatura. Inventó también una rueda dentada para relojes de forma epicicloidal y un pirómetro. En 1829 se trasladó a Londres, donde expuso instrumental científico construido por él mismo; entre los visitantes de la exposición se encontraban Faraday, Wheatstone y los ingenieros Cubitt y Telford. Saxton construyó un contador eléctrico para Cubitt y algunos motores eléctricos basados en el principio de inducción que acababa de descubrir Faraday. En 1835 volvió a Estados Unidos, encargándose de la construcción de balanzas de precisión para laboratorios. Desde 1844 fue el Director de la Oficina de Pesos y Medidas americana.

WILDE, Henry (1833-1919). Inventor inglés. Mostró desde muy joven grandes dotes manuales. Diseñó a los veinticinco años un código telegráfico con su adaptador al transmisor y al receptor. Sus principales trabajos se refieren a la construcción de máquinas eléctricas. En 1863 obtuvo una patente (núm. 3.006 del mes de diciembre) por un generador electromagnético con excitatriz magnetoeléctrica. En 1866 presentó un artículo a la Royal Society titulado *A new powerful generator of*

Dynamic Electricity, en el que demostraba su principio dinamoeléctrico. Creó la Compañía Wilde en Manchester, dedicada al desarrollo de sus patentes. Construyó en sus talleres, alternadores y dinamos que exportaba a toda Europa. Se dio cuenta de la importancia del acoplamiento en paralelo de alternadores, aunque la teoría matemática fue desarrollada algo más tarde por J. Hopkinson. Diseñó lámparas de arco para alumbrado y contribuyó con sus métodos constructivos al desarrollo de las máquinas eléctricas. En sus últimos años realizó estudios sobre magnetismo terrestre y «locomoción aérea».

Referencias

ADKINS, B.: *General Theory of Electrical Machines*. Chapman Hall, London, 1957.

CORTES, M.: *Curso Moderno de Máquinas Eléctricas Rotativas.* Editores Técnicos Asociados, Barcelona, 1973.

CHATELAIN, J.: *Traité d'électricité.* Vol. X: *Machines eléctriques.* Editions Georgi Lausanne, 1983.

DANIELS, A. R.: *Introduction to Electrical Machines.* MacMillan Press, London, 1976.

DEL TORO, V.: *Electric Machines and Power Systems*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.

EL-HAWARY, M. E.: *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications.* Reston Book, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1986.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, CH. Jr.; UMANS, S. D.: *Electric Machinery,* fourth ed. (S. I.). McGraw-Hill Book Co., New York, 1985.

GIBBS, W. J.: *Tensors in Electrical Machine Theory*. Chapman Hall, London, 1973.

GINGRICH, H. W.: *Máquinas Eléctricas, Transformadores y Controles.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. Edición en castellano de Ed. Dossat S. A., Madrid, 1980.

HERRANZ, G.: *Convertidores Electromecánicos de Energía.* Marcombo, Boixareu Editores, Barcelona, 1980.

IVANOV-SMOLENSKY.: *Electrical Machines*. Mir Pub., Moscow, 1982.

JONES, C. V.: *Unified Theory of Electrical Machines*. Butterworth, London, 1967.

KRON, G.: *Generalized Theory of Electrical Machinery*. Transactions AIEE, 49, 666 (1930).

LIBBY, C. C.: *Motor Selection and Application;* McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

MCPHERSON, G.: *An Introduction to Electrical Machines and Transformers.* John Wiley & Sons, New York, 1981.

NAGRATH, I. J.; KOTHARI, D. P.: *Electric Machines.* Tata McGraw-Hill Pub, New Delhi, 1985.

PARK, R. H.: *Two-Reaction Theory of Synchronous Machines.* Transactions AIEE, 48, 716 (1929).

PARKER SMITH, S.: *Problemas de Ingeniería Eléctrica*. Ed. Selecciones Científicas, Madrid, 1961.

SANJURJO, R.: *Máquinas Eléctricas.* McGraw-Hill/Interamericana de España S. A., Madrid, 1989.

SANZ FEITO, J.: *Máquinas Eléctricas.* Prentice Hall, Pearson Education, Madrid, 2002.

SEGUIER, G.; NOTELET, F.: *Electrotechnique Industrielle*. Technique et Documentation, Paris, 1980.

SERRANO IRIBARNEGARAY, L.: *Fundamentos de Máquinas Eléctricas Rotativas*. Marcombo, Boixareu Ed., Barcelona, 1989.

SISKIND, CH.: *Electrical Machines: Direct and Alternating Current*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1950.

STEIN, R.; HUNT, W. T.: *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines.* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.

WHITE, D. C.; WOODSON, H. H.: *Electromechanical Energy Conversion*. J. Wiley & Sons, New York, 1959.

CAPÍTULO 3

Transformadores

3.1. INTRODUCCIÓN

Como ya se ha indicado brevemente en el capítulo anterior, el transformador* es una máquina eléctrica estática, destinada a funcionar con **corriente alterna**, constituida por dos arrollamientos, **primario** y **secundario**, que permite transformar la energía eléctrica, con unas magnitudes *V-I* determinadas, a otras con valores en general diferentes. La importancia de los transformadores, se debe, a que gracias a ellos ha sido posible el enorme desarrollo de la industria eléctrica, al haberse logrado la realización práctica y económica del transporte de energía eléctrica a grandes distancias. Téngase en cuenta que el transporte de la energía eléctrica desde los lugares donde se produce (Centrales), hasta los centros de consumo, es tanto más económica cuanto más alta es la tensión de las líneas, puesto que para una cierta potencia a transportar al elevar la tensión en la red de transporte, disminuye la corriente que circula por los conductores de la línea, y como quiera que las pérdidas por efecto Joule son proporcionales al cuadrado de la corriente que circula por los conductores, se reducen estas pérdidas, aumentando con ello el rendimiento del transporte de energía eléctrica. Por ejemplo si la tensión generada en una Central eléctrica se multiplica por diez, se reduce la corriente en la red de transporte en la misma cantidad, y a consecuencia de ello las pérdidas por efecto Joule en la línea se reducen cien veces.

Sin embargo hay que tener en cuenta que las tensiones generadas en los alternadores de las Centrales Eléctricas están limitadas, por consideraciones tecnológicas, a valores que oscilan entre los 15 y 30 kV, que son insuficientes para alcanzar tal objetivo; por otro lado, salvo casos sumamente raros, la corriente a alta tensión no puede enviarse directamente a los aparatos de utilización, porque éstos requieren normalmente tensiones más bajas. Los transformadores permiten conciliar de una forma idónea estas necesidades opuestas, de tal forma que para reducir las pérdidas en la línea se realiza una primera transformación que eleva la tensión de salida de los alternadores a valores del orden de 400 kV (y que en algunos países por su extensión, se ha llegado a sobrepasar los 1.000 kV), a los cuales se realiza el transporte de energía; existiendo en los centros receptores otros transformadores que realizan el proceso inverso, reduciendo la tensión hasta los niveles que se consideren convenientes para la distribución y consumo de esta energía. El arrollamiento de mayor tensión recibe el nombre de **devanado de alta tensión** (A.T.) y el de menor tensión se denomina **devanado de baja tensión** (B.T.). El proceso de transformación tiene un gran rendimiento al no disponer la

* En el argot eléctrico, al transformador se le denomina *trafo*.

máquina de órganos móviles, pudiéndose llegar en los grandes transformadores a valores del orden del 99,7 por 100.

Este capítulo comienza describiendo los aspectos constructivos de los transformadores, mostrando las formas básicas de los núcleos, indicando el tipo de chapa magnética y la forma de su apilamiento; se observa después la disposición de los devanados en el núcleo y su aislamiento, analizando luego los sistemas de refrigeración más comunes. Se indican los tipos de aceite y sus propiedades dieléctricas y refrigerantes, y se deduce la necesidad de un depósito conservador o de expansión en los transformadores, finalizando este epígrafe con la descripción de los pasatapas empleados, haciendo una breve introducción a la misión del relé Buchholz y explicando el significado de los valores asignados que contiene la placa de características del transformador. Continúa el capítulo estudiando el principio de funcionamiento del transformador ideal, donde se observan las relaciones básicas existentes entre las diferentes magnitudes que intervienen, relacionando la corriente de vacío de la máquina con la corriente de excitación absorbida por una bobina con núcleo de hierro, que se estudió en el Capítulo 1. Se completa más tarde el análisis introduciendo los efectos de resistencia y dispersión de los arrollamientos, indicándose el diagrama vectorial en carga. Se deduce luego el circuito equivalente del transformador y se comentan los ensayos necesarios para su determinación completa. A partir de este esquema se deduce la caída de tensión mediante el diagrama de Kapp, haciendo especial mención al efecto Ferranti, y se completa el estudio con el análisis de las pérdidas y el rendimiento de estas máquinas. Más tarde se analizan los armónicos de la corriente de vacío de un transformador y los efectos que producen cuando circulan estas corrientes por las líneas aéreas. Se explica la corriente de conexión de los transformadores y los valores transitorios a que dan lugar, que pueden confundirse a veces con corrientes de cortocircuito de la instalación. Se estudian luego los transformadores trifásicos, haciendo especial hincapié en la determinación del ángulo horario. Se analizan los armónicos en las corrientes de excitación de los transformadores trifásicos y la forma de evitarlos. A continuación se hace una descripción de las principales conexiones de estos transformadores y sus propiedades. Se incluye después el acoplamiento en paralelo de transformadores explicando las condiciones que deben cumplir para distribuir la carga de un modo adecuado. También se estudia el autotransformador, indicando sus ventajas e inconvenientes respecto al transformador clásico. Se explican los transformadores con tomas, dando detalles prácticos de la colocación de los elementos de conmutación.

Se explican después los transformadores de medida, que son necesarios para poder detectar altas tensiones y altas corrientes, adaptándolas a los calibres normalizados de los instrumentos de medición como voltímetros, amperímetros, etc., y también para aplicar estos transformadores en los sistemas de protección de máquinas: relés de máxima, diferenciales, etc. El capítulo finaliza con un apéndice dedicado a transformaciones especiales; en particular explica la transformación de trifásica a bifásica o conexión Scott y la transformación de trifásica a hexafásica utilizada en los equipos rectificadores.

3.2. PRINCIPALES ASPECTOS CONSTRUCTIVOS

El transformador consta de las siguientes partes principales: *a*) núcleo, *b*) devanado, *c*) sistema de refrigeración y *d*) aisladores pasantes de salida.

a) Núcleo

Se denomina núcleo del transformador el sistema que forma su circuito magnético, que está constituido por chapas de acero al silicio, modernamente laminadas en frío (grano orientado),

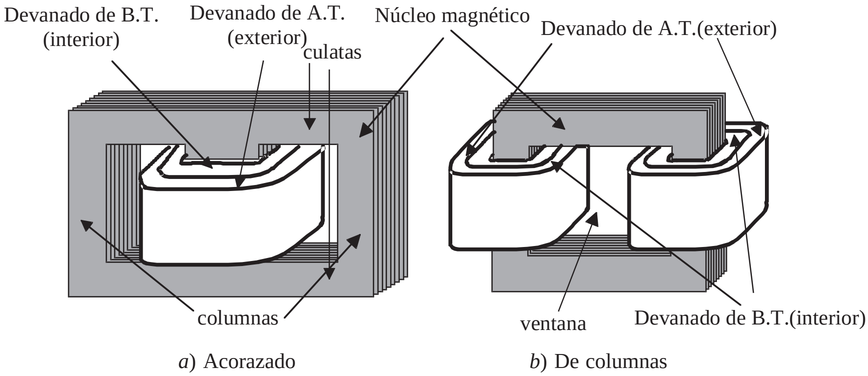


Figura 3.1. Circuitos magnéticos de transformadores monofásicos.

que han sido sometidas a un tratamiento químico especial denominado comercialmente **carlite**, que las recubre de una capa aislante muy delgada (0,01 mm), lo que reduce considerablemente las pérdidas en el hierro.

El circuito magnético está compuesto por las **columnas**, que son las partes donde se montan los devanados, y las **culatas**, que son las partes que realizan la unión entre las columnas. Los espacios entre las columnas y las culatas, por los cuales pasan los devanados, se llaman **ventanas del núcleo**. Según sea la posición relativa entre el núcleo y los devanados, los transformadores se clasifican en **acorazados**, en los que, como muestra la Figura 3.1*a*, los devanados están en su mayor parte abrazados o «acorazados» por el núcleo magnético, y de **columnas** (Fig. 3.1*b*), en los que son los devanados los que rodean casi por completo el núcleo magnético. En el tipo acorazado las espiras quedan más sujetas, pero el tipo de columnas es de construcción más sencilla y se adapta mejor a las altas tensiones, porque la superficie que ha de aislarse es más reducida; por ello es el que se utiliza más generalmente en la práctica (excepto en transformadores monofásicos de baja potencia y tensión).

Los circuitos magnéticos de la Figura 3.1 corresponden a transformadores monofásicos, y las secciones de las columnas y culatas son iguales para hacer que la inducción sea la misma en todo el circuito magnético; en el caso de la Figura 3.1*a*, la columna central tiene doble

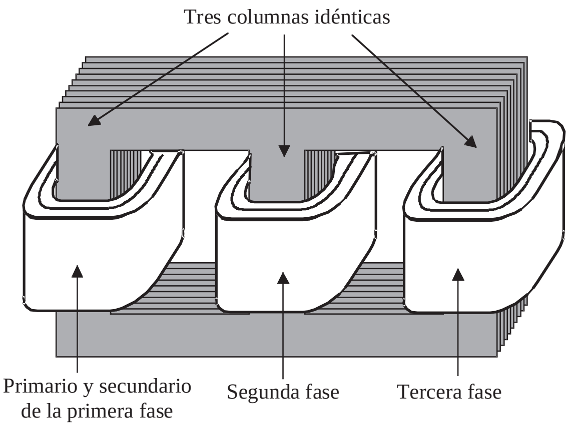


Figura 3.2. Circuito magnético y devanados de un transformador trifásico.

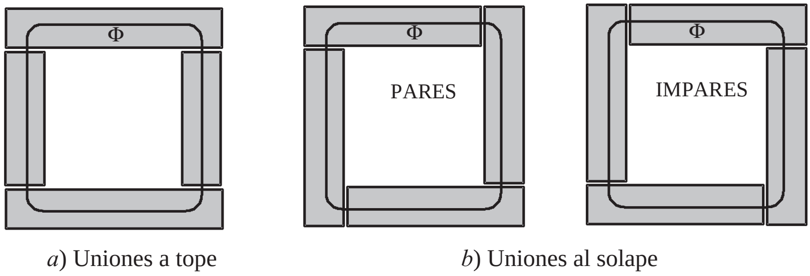


Figura 3.3. Uniones de chapas de transformadores.

superficie que las laterales ya que por ella circula doble flujo que en estas últimas. Cuando se trata de transformadores trifásicos, el circuito magnético consta de tres columnas idénticas, tal como se muestra en la Figura 3.2.

Las uniones de las columnas con las culatas se denominan **juntas**, y deben tener un espesor lo más pequeño posible con objeto de reducir al máximo la reluctancia del circuito magnético. La culata superior se tiene que poder abrir para poder colocar las bobinas y los aislantes. Las uniones o juntas pueden realizarse a **tope** (o plana) o bien al **solape** (entrelazada). En la construcción a tope (Fig. 3.3*a*) las columnas y las culatas se montan separadamente y luego se unen con ayuda de piezas de sujeción. En la construcción al solape todo el núcleo magnético se construye de una vez, de tal forma que, como indica la Figura 3.3*b*, se van ensamblando las chapas con un desfase de posición entre capas sucesivas (pares e impares) igual a la anchura de las chapas de la culata; este montaje, aunque es más complicado que el anterior, permite un aumento de la estabilidad mecánica del conjunto. En cualquiera de los dos casos, existe una zona al lado de la junta en la que el flujo no sigue la dirección de laminación y esto origina, en el caso de chapas de grano orientado, un calentamiento local debido al aumento de pérdidas en el hierro; para evitar esto, las uniones, bien sean a tope o al solape, no se realizan a 90° como indica la Figura 3.3, sino a 45°.

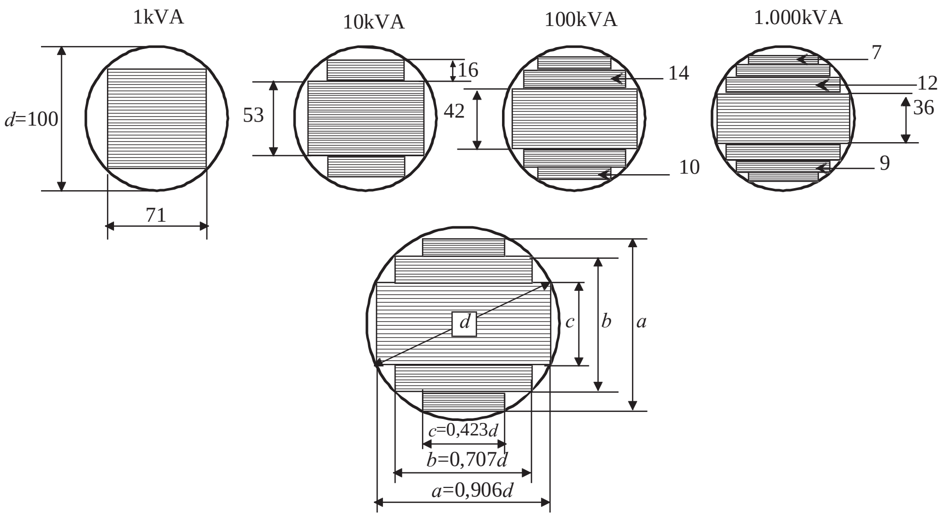


Figura 3.4. Núcleos de transformador tipo cruciforme.

Otro aspecto característico de los núcleos lo muestran las secciones transversales de las columnas, que en los transformadores pequeños se construyen de forma cuadrada (Fig. 3.1). Sin embargo, en la mayoría de los casos, para obtener un mejor aprovechamiento del área interior de los devanados (de sección circular), la sección transversal de cada rama tiene forma de un polígono escalonado, con un número de escalones que es tanto mayor cuanto más elevada sea la potencia del transformador. Se dice entonces que la sección es del tipo **cruciforme**.

En la Figura 3.4 se muestran algunos ejemplos típicos indicando también la potencia máxima de utilización correspondiente a cada configuración. En los transformadores de gran potencia, para mejorar la evacuación de calor se intercalan canales de ventilación entre los paquetes de chapas. El conjunto de las chapas debe ser finalmente apretado por medio de bridas de madera o de perfiles de hierro con la ayuda de bulones aislados; de esta forma se consigue dar rigidez mecánica al conjunto y se evitan vibraciones (véase Fig. 3.2).

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Nota de diseño

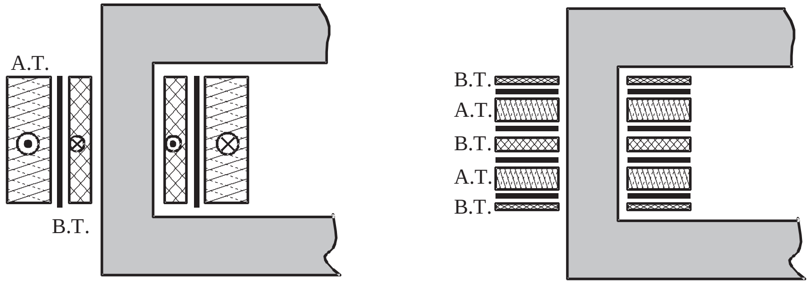
Las dimensiones mostradas en la Figura 3.4 proceden de calcular el área máxima para un determinado tipo de sección cruciforme. Por ejemplo, si se considera una sección con tres escalones, el área real de hierro vale: $S = b^2 + 2ac - 2bc$*; las condiciones geométricas que se deducen de la figura son:* $d^2 = a^2 + c^2$*;* $d^2 = 2b^2$*, despejando de estas dos últimas ecuaciones c en función de d y a; y b en función de d, y sustituyendo en la expresión de la sección del hierro, resulta:*

$$S = (d^2/2) + 2a\sqrt{d^2 - a^2} - d\sqrt{2(d^2 - a^2)}$$

Para un determinado diámetro d, el valor de la anchura a para conseguir la máxima sección se obtiene derivando S respecto de a e igualando esta derivada a cero, lo que da lugar a: $a = 0{,}906d$*; como consecuencia de ello, los valores de b y c se obtienen de las condiciones geométricas, resultando ser:* $b = 0{,}707d$*;* $c = 0{,}423d$*, que son los valores mostrados en la Figura 3.4. El lector puede extender este resultado para cualquier otro número de escalones de la sección cruciforme y demostrar de este modo los valores de las dimensiones mostradas en la figura.*

b) Devanados

Constituyen el circuito eléctrico del transformador; se realizan por medio de conductores de cobre, en forma de hilos redondos (para diámetros inferiores a 4 mm) o de sección rectangular (pletinas de cobre) cuando se requieren secciones mayores. Los conductores están recubiertos por una capa aislante, que suele ser de barniz en los pequeños transformadores y que en el caso de pletinas está formada por una o varias capas de fibra de algodón o cinta de papel. Según sea la disposición relativa entre los arrollamientos de A.T. y B.T., los devanados pueden ser **concéntricos** o **alternados**. En los devanados concéntricos los bobinados tienen forma de cilindros coaxiales (Fig. 3.5*a*); generalmente se coloca más cerca de la columna el arrollamiento de B.T., ya que es más fácil de aislar que el devanado de A.T., y entre ambos bobinados se intercala un cilindro aislante de cartón o papel baquelizado. En los devanados alternados (Fig. 3.5*b*) los arrollamientos se subdividen en secciones o «galletas», de tal forma que las partes de los devanados de A.T. y B.T. se suceden alternativamente a lo largo de



a) Devanado concéntrico   *b*) Devanado alternado (en galletas)

Figura 3.5. Devanados concéntricos y alternados.

la columna. Para disminuir el flujo de dispersión, es frecuente que en cada extremo se coloque media bobina, que por razones obvias de aislamiento pertenecen al arrollamiento de B.T.

Debe señalarse también que las sobretensiones de alta frecuencia, y particularmente las de frente escarpado de origen atmosférico (tipo rayo), ponen a prueba simultáneamente el aislamiento de los devanados del transformador con relación a tierra y el aislamiento entre espiras y entre bobinas. Puede demostrarse que la distribución de una sobretensión atmosférica en el devanado de alta tensión de un transformador sigue una ley de tipo hiperbólico, haciendo que la parte del devanado de alta tensión conectada a la línea esté sometida a mayores gradientes de tensión que el resto del mismo y es por ello que en la fabricación de los transformadores se refuerza el aislamiento de las primeras espiras y de las primeras bobinas del devanado de alta tensión de estas máquinas para evitar los problemas de ruptura dieléctrica de los aislamientos. Otro procedimiento constructivo para mejorar el comportamiento de un transformador frente a las sobretensiones atmosféricas es colocar un apantallamiento electrostático rodeando el devanado de alta tensión y unido a la línea (y que consiste en una lámina de material aislante cuya superficie externa está metalizada), con ello se consigue crear una distribución uniforme de la sobretensión atmosférica sobre todas las espiras de este devanado, dando lugar a los denominados *transformadores antiresonantes*.

c) Sistemas de refrigeración

En un transformador, como en cualquier otro tipo de máquina eléctrica, existen una serie de pérdidas que se transforman en calor y que contribuyen al calentamiento de la máquina. Para evitar que se consigan altas temperaturas que puedan afectar la vida de los aislamientos de los devanados es preciso dotar al transformador de un sistema de refrigeración adecuado. Para potencias pequeñas, la superficie externa de la máquina es suficiente para lograr la evacuación de calor necesaria, lo que da lugar a los llamados **transformadores en seco**. Para potencias elevadas se emplea como medio refrigerante el aceite, resultando los **transformadores en baño de aceite**. El aceite tiene una doble misión de **refrigerante y aislante**, ya que posee una capacidad térmica y una rigidez dieléctrica superior a la del aire. En estos transformadores, la parte activa se introduce en una cuba de aceite mineral, cuyo aspecto externo puede tener forma plana, ondulada, con tubos o con radiadores adosados, realizándose la eliminación del calor por radiación y convección natural. El aceite mineral empleado procede de un subproducto de la destilación fraccionada del petróleo y con el tiempo puede experimentar un proceso de envejecimiento, lo que indica que se oxida y polimeriza formando lodos, proceso

que es activado por la temperatura, la humedad y el contacto con el oxígeno del aire; con ello, el aceite presenta una disminución de sus propiedades refrigerantes y aislantes. Para atenuar este efecto suelen añadirse al aceite productos químicos **inhibidores**, y también se dota a la cuba de un **depósito de expansión o conservador** colocado en la parte alta del transformador (Fig. 3.6).

La misión de este depósito es doble: por una parte se logra que la cuba principal esté totalmente llena de aceite, de tal forma que sólo existe una pequeña superficie de contacto con el aire en el conservador (la capacidad de este depósito es del orden del 8 por 100 del total); por otra parte, este depósito es el que absorbe las dilataciones del aceite al calentarse. Cuando el transformador se enfría, el aire penetra por él (se dice entonces que el transformador **respira**), y como el aire arrastra humedad, que es absorbida por el aceite, para evitarlo se coloca a la entrada un desecador de cloruro cálcico o un gel de sílice.

Desde un punto de vista histórico, la utilización del aceite mineral en su doble vertiente de aislante y refrigerante hizo posible el desarrollo de transformadores de gran potencia. El aceite mineral tiene, sin embargo, dos inconvenientes graves, a saber: 1) es inflamable,

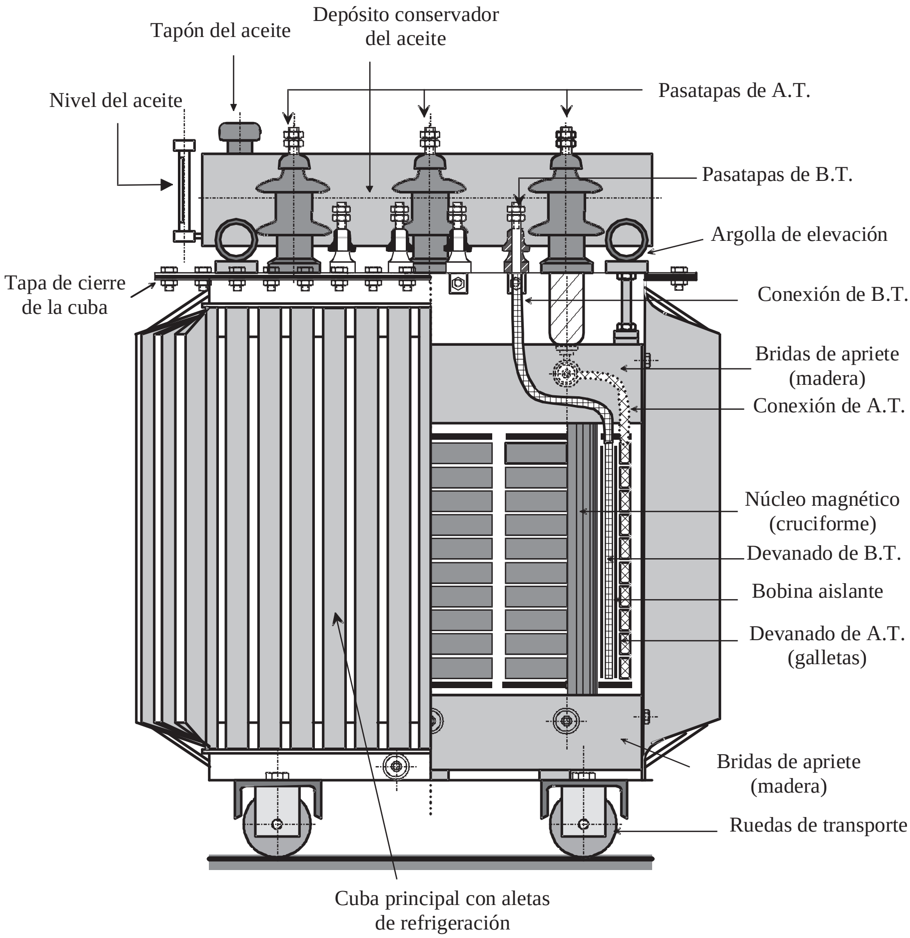


Figura 3.6. Aspectos constructivos de un transformador.

y 2) sus vapores, en ciertas condiciones, forman con el aire mezclas explosivas. Por estos motivos la utilización del aceite mineral está prohibida en ciertos locales y ambientes.

Hasta 1932 no se había logrado un sustituto del aceite mineral que fuera útil para los transformadores. En este año se logró desarrollar un líquido aislante sintético (aceite sintético) conocido con el nombre genérico de **askarel**, que era en realidad un hidrocarburo aromático clorado que ofrecía grandes ventajas frente a los aceites clásicos de transformadores (hidrocarburos puros), ya que no era ni inflamable ni explosivo. Estos aceites sintéticos se han conocido en el mercado con los nombres comerciales de pyranol, pyraleno, inerteen, etc. Desgraciadamente, debido a las dificultades de eliminación y reducción del pyraleno, con el consiguiente impacto ecológico que representa, a partir de la década de los ochenta, se ha prohibido su utilización en la construcción de nuevos transformadores. Modernamente se ha impulsado el uso de los denominados **aceites de siliconas**, que representan un nuevo avance tecnológico para intentar aunar las misiones aislantes y refrigerantes con un reducido impacto ambiental. En la Tabla 3.1 se muestran las características fundamentales de los principales aceites utilizados en la construcción de transformadores y su comparación con las del aire.

Los transformadores de distribución de menos de 200 kVA están normalmente sumergidos en aceite dentro de la cuba principal de acero. El aceite transmite el calor a la cuba, desde donde se dispersa por convección y por radiación al aire exterior. A medida que la potencia asignada va siendo mayor, se van añadiendo radiadores externos para aumentar la superficie de enfrentamiento de la cuba llena de aceite. El aceite circula alrededor de los devanados hacia los radiadores, en donde el calor es cedido al aire exterior. En el caso de potencias más elevadas, se insufla aire sobre los radiadores mediante ventiladores adecuados. En transformadores del orden de los MVA se puede refrigerar mediante un intercambiador de calor aceite-agua. El aceite caliente se bombea a través de un serpentín en contacto con agua fría. Este sistema es muy eficaz pero también muy costoso, ya que a su vez debe enfriarse el agua para ponerla otra vez en circulación. El tipo de refrigeración de un transformador se designa según las Normas IEC (CEI, Comisión Electrotécnica Internacional) por cuatro letras. Las dos primeras se refieren al tipo de refrigerante en contacto con los arrollamientos y a la naturaleza de su circulación y las otras dos letras se refieren al refrigerante en contacto con el sistema de refrigeración exterior y a su modo de circulación. Los símbolos empleados son los indicados en la Tabla 3.2.

Por ejemplo, un transformador en baño de aceite, con circulación natural por convección, que a su vez está refrigerado por aire con movimiento natural, se designará por las letras ONAN. Si el movimiento del aire llega a hacerse con la ayuda de ventiladores se hubiera designado por ONAF.

Tabla 3.1. Características de aceites de transformador

Denominación	*Densidad (kg/m³)*	*Conductividad térmica (W/m °C)*	*Permitividad dieléctrica relativa*	*Rigidez dieléctrica (kV/cm)*
Hidrocarburos puros (aceite de trafo)	900	0,16	2,2	200
Pyralenos	1.820	0,01	4,5	290
Aceite de silicio	960	0,15	2,56	200 a 300
Aire	1.293	0,024	1	32

Tabla 3.2. Símbolos empleados para señalar la naturaleza del refrigerante y su modo de circulación

Naturaleza del refrigerante	*Símbolo*	*Naturaleza de la circulación*	*Símbolo*
Aceite mineral	O	Natural	N
Pyraleno	L	Forzada	F
Gas	G		
Agua	W		
Aire	A		
Aislante sólido	S		

Al inicio de la década de 1980 se inició un nuevo sistema de construcción de *transformadores secos encapsulados en resina epoxi*. Este tipo de transformador es el más idóneo para instalaciones que requieren gran seguridad, fundamentalmente en interiores, locales de pública concurrencia, hospitales, centros comerciales, ferrocarriles metropolitanos, fábricas de productos combustibles, minas, etc. No propagan el fuego, son autoextinguibles, no se derrama material infamable ni contaminante en caso de avería, como ocurre con el aceite y la silicona. No requieren mantenimiento, no tienen niveles que controlar ni foso colector de aceites y no requieren equipos contra incendios. Todo ello hace que sea el transformador más seguro y fiable del mercado en la actualidad. Los arrollamientos de alta tensión están completamente encapsulados en una masa de resina epoxi cargada con silicato de fluor, tratada convenientemente para mejorar la adherencia y la resistencia a la humedad; el conductor es en forma de hilos esmaltados o pletinas recubiertas con papel aislante. Los devanados de baja tensión emplean conductores en forma de pletinas de cobre aisladas con papel; a partir de los 400 kVA se utiliza la técnica de bobinados en bandas, que consiste en enrollar, sobre un modelo cilíndrico, una banda de conductor junto con otra de un aislamiento flexible. La aplicación de esta técnica, junto con el empleo de aislamientos preimpregnados, permite obtener unos arrollamientos compactos, resistentes a la humedad, de fácil disipación de calor y muy buen comportamiento a los esfuerzos dinámicos que se producen en caso de cortocircuitos.

d) Aisladores pasantes y otros elementos

Los bornes de los transformadores de media tensión se llevan al exterior de la cuba mediante unos aisladores pasantes (pasatapas) de porcelana, rellenos de aire o aceite. Cuando se utilizan altas tensiones aparece un fuerte campo eléctrico entre el conductor terminal y el borde del orificio en la tapa superior de la cuba, y para evitar la perforación del aislador, éste se realiza con una serie de cilindros que rodean la borna metálica dentro del espacio cerrado que contiene el aceite. Los pasatapas de A.T. y B.T. en un transformador se distinguen por su altura, siendo tanto más altos cuanto mayor es la tensión, como se puede observar en la Figura 3.6. Otro elemento que suelen llevar los transformadores de gran potencia es el llamado relé de gas o **relé Buchholz** (véase Fig. 3.7), que protege a la máquina de sobrecargas peligrosas, fallos de aislamiento, etc.

Este relé se coloca en el tubo que une la cuba principal con el depósito de expansión, y funciona por el movimiento del vapor de aceite producido por un calentamiento anómalo del transformador que hace bascular un sistema de dos flotadores: el primero (núm. 1 de la Fig. 3.7) es sensible a las sobrecargas ligeras, y al descender de la posición mostrada en la figura provoca la activación de una alarma acústica; el segundo (núm. 2 de la Fig. 3.7) es

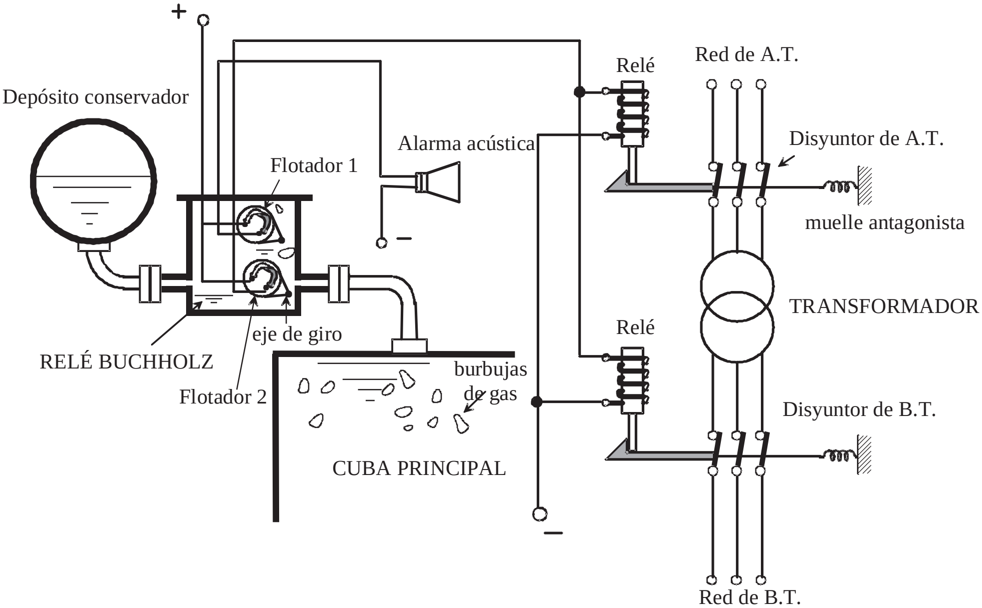


Figura 3.7. Relé Buchholz y esquema eléctrico de protección.

sensible a las sobrecargas elevadas, que dan lugar a una formación tumultuosa de gas en la cuba principal, que al empujar al flotador provoca el cierre del circuito de unos relés que controlan el disparo de unos **disyuntores** de entrada y salida del transformador.

En la Figura 3.8 se muestra un esquema detallado de un transformador con sus tres proyecciones principales, donde pueden apreciarse cada uno de los elementos mencionados en este apartado. Se observa que mirando el transformador por la parte de A.T. aparecen las

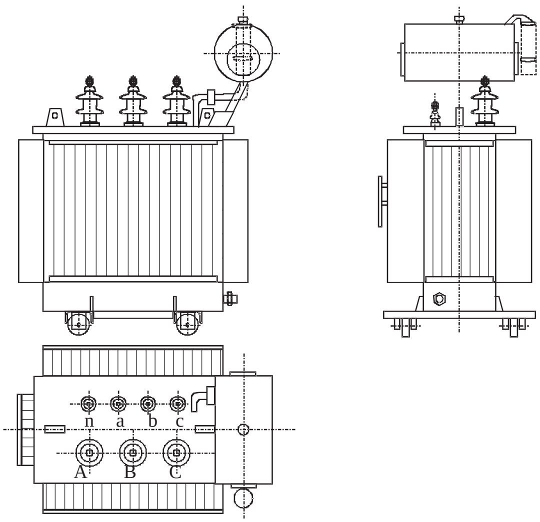


Figura 3.8. Alzado,perfil y planta de un transformador.

letras ABC (de izquierda a derecha) para designar los terminales de A.T. e igualmente para el lado de B.T., pero en este caso las letras van con minúscula. El neutro se señala con n o N (B.T. o A.T., respectivamente) y va colocado a la izquierda del terminal a o A.

Las potencias comerciales empleadas en los transformadores de distribución (en kVA) están relacionadas por el factor $2^{1/3} \approx 1{,}26$ y responden a los valores asignados siguientes:

5	6,3	8	**10**	12,5	16	20	**25**	31,5	40
50	63	80	**100**	125	**160**	200	**250**	315	**400**
500	**630**	**800**	**1.000**	...					

En la Tabla 3.3 se muestra un cuadro de características técnicas de transformadores trifásicos de la serie de 24 kV, que incluyen la potencia, grupo de conexión (se verá más adelante su significado), pérdidas, etc. También se señalan las dimensiones principales y el peso total con aceite.

Los principales símbolos empleados para representar los transformadores se indican en la Figura 3.9. El símbolo *a*) suele ser el más utilizado, y en este caso representa un transformador trifásico de 100 kVA, conexión triángulo-estrella, y relación 15.000 V/380-220 V (el doble valor secundario indica que la estrella tiene neutro). Cuando el transformador es monofásico las líneas de entrada y salida van cruzadas por dos barras (en vez de las tres que se indican en la Figura 3.9*a*). Los símbolos *b*) y *c*) representan un transformador monofásico de 10 kVA, 50 Hz, relación 3.000 V/220 V.

e) Placa de características del transformador

La placa de características de un transformador es una cartulina metálica serigrafiada que incluye los datos de potencia asignada, tensiones asignadas, frecuencia e impedancia equivalente en tanto por ciento, o caída de tensión relativa de cortocircuito (véase epígrafe 3.6.2). Si el transformador tiene tomas variadoras de tensión, se incluyen asimismo las tensiones de las

Tabla 3.3. Características técnicas de transformadores trifásicos

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DE TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS SERIE 24 kV (SEGÚN NORMAS UNE 20.101 y CEI 76)													
Potencia kVA	*50*	*75*	*100*	*125*	*160*	*200*	*250*	*315*	*400*	*500*	*630*	*800*	*1.000*
Grupo de conexión	*Yyn 0*	*Yyn 0*	*Yyn 0*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*	*Dyn 11*
P_0 (kW)	0,24	0,33	0,40	0,48	0,58	0,69	0,82	0,98	1,17	1,38	1,64	1,96	2,15
P_{cc} (kW)	1,39	1,87	2,20	2,53	2,97	3,49	4,10	4,86	5,80	6,89	8,22	10,24	13,3
ε_{cc} (%)	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6
I_0 en % I_{1n}	4,7	4,1	3,3	3	2,7	2,4	2,2	2,1	2	2	1,9	1,8	1,6
Long. (m)	0,8	0,9	0,9	1,0	1,2	1,3	1,4	1,4	1,5	1,5	1,7	1,9	2,0
Anch. (m)	0,7	0,7	0,8	0,8	0,8	0,8	0,9	0,9	1,0	1,0	1,2	1,3	1,3
Altura (m)	1,2	1,3	1,4	1,4	1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,7	1,7	1,9
Peso (kg)	385	481	570	655	731	834	976	1.100	1.422	1.640	1.930	2.267	2.645

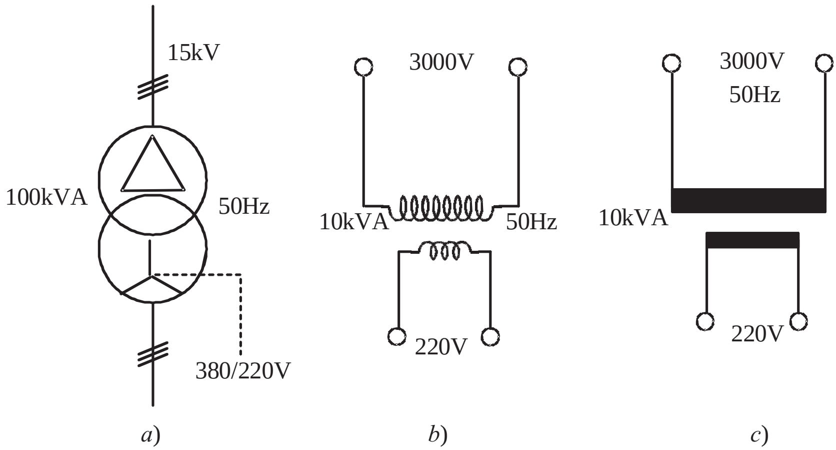


Figura 3.9. Símbolos empleados para designar un transformador.

diferentes derivaciones (véase epígrafe 3.14). También se indica el esquema de conexiones internas, la especificación del tipo de transformador, clase de refrigeración, nombre del fabricante, serie, código y en algunos casos referencias sobre las instrucciones de funcionamiento. Para el lector interesado en normativa técnica es interesante conocer la Instrucción IEC-76:1 dedicada a transformadores de potencia, o en su caso la UNE-EN60076-1/A1:2002, cuyo título es Transformadores de potencia. Parte 5: Generalidades. También es interesante las Normas del Instituto de Ingenieros Eléctricos de Estados Unidos, en concreto la C.57.12.91-2001 denominada *IEEE Standard test code for dry-type distribution and power transformers* y la C.57.12.00-2006 que lleva por título: *IEEE Standard general requeriments for liquid-inmmersed distribution, power and regulating transformers.*

Las **tensiones asignadas o nominales** son aquellas para las cuales se ha proyectado el transformador y serán los valores base empleados en los ensayos y en la utilización del transformador. La **potencia asignada** siempre se refiere a la potencia aparente y se aplica tanto al devanado primario como al secundario. Para transformadores monofásicos sería igual a:

$$S_n = V_{1n} \cdot I_{1n} = V_{2n} \cdot I_{2n} \qquad (a)$$

donde el subíndice n indica asignada o nominal y los subíndices 1 y 2 se aplican a magnitudes de primario y secundario, respectivamente. Para transformadores trifásicos se escribiría en función de los valores de línea:

$$S_n = \sqrt{3} V_{1n} I_{1n} = \sqrt{3} V_{2n} I_{2n} \qquad (b)$$

La potencia asignada junto con las tensiones asignadas fijan la capacidad de corriente de los devanados del transformador. De la magnitud de la corriente dependen las pérdidas en el cobre, las cuales a su vez inciden en el calentamiento de los arrollamientos; el que ello suceda es crítico, ya que un sobrecalentamiento acorta drásticamente la vida de los aislantes. Los transformadores pueden llegar a tener más de una potencia asignada, según se utilice o no refrigeración forzada o dependiendo de la altitud de la zona en la que vaya a trabajar la máquina.

Los términos **asignada** y **plena carga** son sinónimos. Conocidas las tensiones asignadas de primario y secundario, y la potencia aparente asignada, las ecuaciones (a) y (b) permiten calcular las corrientes asignadas o de plena carga del transformador para cada uno de los devanados.

3.3. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE UN TRANSFORMADOR IDEAL

Consideremos el transformador monofásico de la Figura 3.10, constituido por un núcleo magnético **real** de permeabilidad finita, que presenta unas pérdidas en el hierro P_{Fe} y unos arrollamientos primario y secundario con un número de espiras N_1 y N_2, respectivamente. Supondremos que el transformador se alimenta por el devanado de tensión más elevada, es decir, se considera que la máquina va a trabajar como transformador reductor.

Los **convenios de signos** adoptados para las corrientes y tensiones en la Figura 3.10 corresponden al sentido normal de transferencia de la energía, es decir: 1) el primario constituye un **receptor** respecto a la fuente de alimentación (la red), lo que significa que este devanado **absorbe** una corriente y una potencia y desarrolla una f.c.e.m. (fuerza contraelectromotriz); 2) el secundario se comporta como un **generador** respecto a la carga conectada en sus bornes, **suministrando** una corriente y una potencia, siendo a su vez el asiento de una f.e.m. inducida.

Para comprender mejor el funcionamiento del transformador, sin que las imperfecciones reales que tiene la máquina enmascaren los fenómenos físicos que tienen lugar, vamos a suponer que en un principio se cumplen las condiciones **ideales** siguientes:

a) *Los devanados primario y secundario tienen resistencias óhmicas despreciables, lo que significa que no hay pérdidas por efecto Joule y no existen caídas de tensiones resistivas en el transformador. En el sistema real estas resistencias son de pequeño valor pero no nulas.*

b) *No existen flujos de dispersión, lo que significa que todo el flujo magnético está confinado al núcleo y enlaza ambos devanados primario y secundario. En el transformador real existen pequeñas partes del flujo que solamente atraviesan a cada uno de los arrollamientos y que son los flujos de dispersión que completan su circuito a través del aire.*

Al aplicar una tensión alterna v_1 al primario, circulará por él una corriente alterna, que producirá a su vez un flujo alterno en el núcleo cuyo sentido vendrá determinado por la ley de Ampère aplicada a este arrollamiento. En la Figura 3.10 se muestran los sentidos positivos de la corriente y el flujo para el instante definido por la polaridad de la tensión aplicada. Debido a la variación periódica de este flujo se crearán f.e.m.s. inducidas en los arrollamientos, que de acuerdo con la ley de Faraday responderán a las ecuaciones:

$$e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad ; \quad e_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{3.1}$$

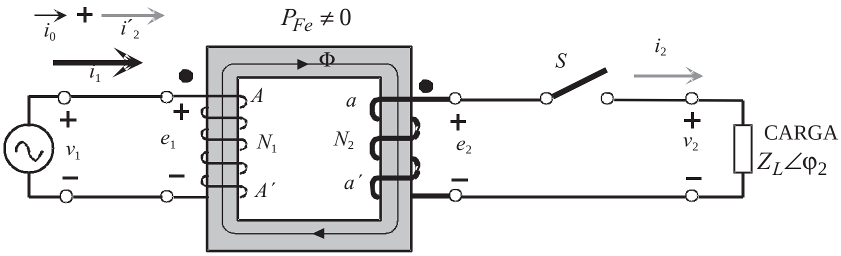


Figura 3.10. Transformador monofásico con núcleo real.

Estas f.e.m.s. tienen las polaridades señaladas en la Figura 3.10 para que estén de acuerdo con la ley de Lenz, de oposición al cambio de flujo. Realmente e_1 representa una f.c.e.m. porque se opone a la tensión aplicada v_1 y limita de hecho la corriente de primario. La polaridad asignada a e_2 en la Figura 3.10 tiene en cuenta que al cerrar el interruptor S del secundario se tendería a producir una corriente i_2 en el sentido mostrado en la figura, de tal modo que al circular por el devanado secundario daría lugar (aplicar la ley de Ampère a este arrollamiento) a una acción antagonista sobre el flujo primario como así lo requiere la ley de Lenz. De ahí la no inclusión del signo menos en las expresiones (3.1), porque ya se ha tenido en cuenta al señalar las polaridades de las f.e.m.s. en la Figura 3.10. En definitiva, *de acuerdo con este convenio de signos la f.m.m. del secundario actúa en contra de la f.m.m. primaria produciendo un efecto desmagnetizante sobre ésta.*

Se observa en la Figura 3.10 que los terminales superiores de los devanados primario y secundario tienen en el instante indicado una polaridad positiva respecto de los otros. Para destacar este hecho, en la teoría de circuitos con acoplamientos magnéticos se suelen señalar con un **punto** aquellos terminales de las bobinas que tienen simultáneamente la misma polaridad instantánea, de ahí la justificación de haber dibujado un punto en los terminales superiores de los devanados del transformador de la Figura 3.10. Existe un modo más inmediato de identificar estos bornes homólogos, y es considerar primeramente un sentido de flujo positivo en el núcleo y señalar a continuación con un punto aquellos extremos de los arrollamientos por los que hay que introducir corriente para obtener flujos de sentido positivo. Obsérvese en el caso de la Figura 3.10 que si se considera un flujo positivo con sentido dextrógiro, habrá que introducir corriente por los terminales superiores para que, teniendo en cuenta la ley de Ampère, se originen flujos de sentido positivo, y de ahí una nueva justificación de que los terminales superiores son homólogos y que por ello se han señalado con un punto. Existe una Recomendación de las Normas IEC (Comité Electrotécnico Internacional), y que también se ha aplicado al esquema de la Figura 3.10, por la que se deben designar los terminales de la misma polaridad con la misma letra, mayúscula para el lado de A.T. y minúscula para el lado de B.T., los extremos positivos en la forma A-a y los negativos en la forma A′-a′ (si el transformador es trifásico se emplean las letras B y C para las otras dos fases); en la Figura 3.10 puede comprobar el lector esta doble simbología de letras y puntos. La ventaja de estos convenios es la de conocer las polaridades de los devanados sin necesidad de tener en cuenta los sentidos de los arrollamientos en el núcleo del transformador. Una vez designados los sentidos de las f.e.m.s. y de las corrientes en el transformador, interesa conocer las relaciones existentes entre las tensiones, los flujos y las f.e.m.s. Como quiera que los devanados son ideales, la aplicación del 2.º lema de Kirchhoff a los circuitos primario y secundario de la Figura 3.10 nos da:

$$v_1 = e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad ; \quad e_2 = v_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{3.2}$$

Si se parte de un flujo sinusoidal de la forma:

$$\Phi = \Phi_m \text{ sen } \omega t = \Phi_m \cos (\omega t - 90°) \tag{3.3}$$

teniendo en cuenta (3.1) y (3.2) se cumplirá:

$$v_1 = e_1 = N_1 \omega \Phi_m \cos \omega t \quad ; \quad e_2 = v_2 = N_2 \omega \Phi_m \cos \omega t \tag{3.4}$$

lo que indica que las tensiones y f.e.m.s. van adelantadas 90° respecto al flujo, siendo sus valores eficaces:

$$V_1 = E_1 = \frac{N_1 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4{,}44\, f N_1 \Phi_m$$

$$V_2 = E_2 = \frac{N_2 \omega \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4{,}44\, f N_2 \Phi_m \tag{3.5}$$

Dividiendo entre sí las ecuaciones anteriores resulta:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{3.6}$$

donde el factor m se denomina **relación de transformación**. De este modo, en un transformador ideal la relación de tensiones coincide con la relación de espiras, que es en definitiva la relación de transformación.

Si el interruptor S de la Figura 3.10 está abierto, el transformador funciona **sin carga** o en régimen de **vacío**. El primario se comportará como una bobina con núcleo de hierro, cuyo estudio ya se realizó en el epígrafe 1.7.2. En este caso el transformador absorberá una corriente de vacío i_0 análoga a la corriente i_{exc} analizada en aquel apartado. La corriente i_0 forma un ángulo φ_0 con la tensión aplicada V_1, de tal forma que la potencia absorbida en vacío, denominada P_0, será igual a las pérdidas en el hierro P_{Fe} en el núcleo del transformador, cumpliéndose una identidad análoga a (1.85):

$$P_0 = P_{Fe} = V_1 I_0 \cos \varphi_0 \tag{3.7}$$

donde V_1 e I_0 representan los valores eficaces de la tensión y la corriente, respectivamente.

La corriente I_0 tiene dos componente, una activa I_{Fe} y otra reactiva I_μ. En la Figura 3.11 se muestra el diagrama fasorial de un transformador ideal en vacío, donde se muestran las magnitudes anteriores con sus fases correspondientes, habiéndose tomado como referencia de fases la tensión aplicada V_1.

Cuando se cierra el interruptor S (Figura 3.10), el transformador funciona **en carga** y aparece una corriente i_2 que circula por el circuito secundario, que responde a un valor complejo o fasorial:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{Z}_L} = \frac{E_2 \angle 0°}{Z_L \angle \varphi_2} = \frac{E_2}{Z_L} \angle -\varphi_2 \tag{3.8}$$

es decir, $\mathbf{I}_2$ se retrasa φ_2 de la f.e.m. $\mathbf{E}_2$.

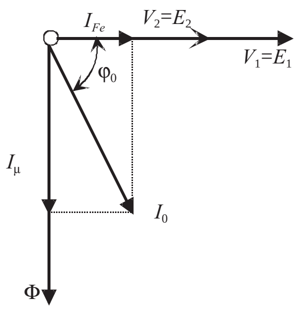


Figura 3.11. Diagrama fasorial de tensiones y corrientes en vacío.

La corriente i_2 al circular por el devanado secundario produce una f.m.m. desmagnetizante $N_2 i_2$ que se opone a la f.m.m. primaria existente $N_1 i_0$. Es por ello que si esta f.m.m. de secundario no queda neutralizada por una corriente adicional que circule por el primario, el flujo en el núcleo se verá reducido profundamente, con las consiguientes reducciones en las f.e.m.s. e_1 y e_2 que son proporcionales a él y se romperá el equilibrio entre v_1 y e_1 en el primario (ecuación 3.2). Para que pueda restablecerse el equilibrio es preciso neutralizar la f.m.m. $N_2 i_2$ del secundario, mediante una corriente adicional primaria i_2' equivalente a una f.m.m. $N_1 i_2'$ de valor:

$$N_1 i_2' = N_2 i_2 \tag{3.9}$$

de donde se deduce el valor de la corriente i_2' adicional primaria:

$$i_2' = \frac{N_2}{N_1} i_2 = \frac{i_2}{m} \quad ; \quad m = \frac{N_1}{N_2} \tag{3.10}$$

De este modo, y como se indica en la Figura 3.10, la corriente total necesaria en el primario i_1 será igual a:

$$i_1 = i_0 + i_2' = i_0 + \frac{i_2}{m} \tag{3.11}$$

que corresponde en forma fasorial a:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2' = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m} \tag{3.12}$$

donde se ha denominado $\mathbf{I}_2'$ a $\mathbf{I}_2/m$. La ecuación anterior expresa la relación entre la corriente primaria $\mathbf{I}_1$, de vacío $\mathbf{I}_0$ y secundaria $\mathbf{I}_2$. Esta ecuación (3.12) o su equivalente en forma instantánea (3.11) nos indica que la corriente primaria tiene dos componentes.

1. **Una corriente de excitación o de vacío $\mathbf{I}_0$** cuya misión es producir el flujo en el núcleo magnético y *vencer* las pérdidas en el hierro a través de sus componentes I_μ e I_{Fe}, respectivamente.
2. **Una componente de carga $\mathbf{I}_2'$** que equilibra o contrarresta la acción desmagnetizante de la f.m.m. secundaria para que el flujo en el núcleo permanezca constante e independiente de la carga, como así lo requiere la ecuación (3.5).

Un modo más simple de demostrar la ecuación (3.12) es proceder en sentido inverso. Así, la primera ecuación (3.5) nos indica que si la tensión primaria V_1 es constante deberá permanecer constante el flujo Φ_m en el núcleo magnético, para cualquier régimen de carga. Si se denomina $\mathcal{R}$ a la reluctancia del circuito magnético del transformador, la ley de Hopkinson (1.17) nos indica que si el flujo es constante, también deberá ser constante la f.m.m. necesaria para producirlo en cualquier régimen de carga. En particular deberán ser iguales las f.m.m.s. en vacío y en carga. En vacío, como las corrientes que circulan por los devanados son $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0$ e $\mathbf{I}_2 = 0$, resultará una f.m.m. total:

$$\mathcal{F} = N_1 \mathbf{I}_0 \tag{3.13}$$

mientras que en carga, cuando las corrientes de circulación son $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$, se tiene una f.m.m. resultante:

$$\mathcal{F} = N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 \tag{3.14}$$

El signo menos de la expresión anterior está de acuerdo con la acción desmagnetizante del secundario y que puede comprobar el lector aplicando la teoría de los circuitos magnéticos al esquema de la Figura 3.10. Al igualar (3.13) y (3.14) resulta:

$$N_1 \mathbf{I}_0 = N_1 \mathbf{I}_1 - N_2 \mathbf{I}_2 \tag{3.15}$$

de donde se deduce:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{N_2}{N_1}\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m} = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2' \tag{3.16}$$

que coincide con la expresión ya demostrada (3.12). A plena carga la corriente $\mathbf{I}_2'$ es de ordinario veinte veces por lo menos mayor que $\mathbf{I}_0$, por lo que puede despreciarse en la expresión (3.16) la corriente de vacío frente a $\mathbf{I}_2'$, que se denomina **corriente secundaria reducida**, y en consecuencia la ecuación (3.16) se transforma en la expresión aproximada:

$$\mathbf{I}_1 \approx \mathbf{I}_2' = \frac{\mathbf{I}_2}{m} \tag{3.17}$$

cuya cantidad ya se estableció en la ecuación (2.156) del capítulo anterior, considerando un transformador ideal sin pérdidas en el núcleo.

Ejemplo de aplicación 3.1

El transformador ideal de la Figura 3.10 tiene dos devanados con N_1 = 300 espiras y N_2 = 100 espiras. La longitud de la trayectoria magnética media es de 50 cm y la sección transversal del núcleo magnético es de 10 cm². La curva de imanación del material responde a la ecuación:

$$B = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-2}\,H}{1 + 10^{-2}\,H} \quad B\text{: Teslas;} \quad H\text{: A.v/m}$$

Al aplicar al primario una tensión v_1 = 150 cos 314 t voltios se comprueba que las pérdidas en el núcleo son de 20 W. Determinar: a) Corriente de vacío I_0 absorbida por el transformador. b) Tensión secundaria V_2. c) Si el secundario alimenta una impedancia de carga $\mathbf{Z}_L = 0{,}5 \angle 60°\ \Omega$, determinar la corriente secundaria I_2 y la corriente primaria que absorberá el transformador de la red. Sugerencia: En el ejemplo de aplicación 1.7 está resuelta la primera parte del problema.

Solución

a) La tensión aplicada tiene una tensión eficaz y una frecuencia de valores:

$$V_1 = \frac{150}{\sqrt{2}} = 106{,}06 \text{ V} \quad ; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

De este modo, teniendo en cuenta (3.5) resulta un flujo máximo en el núcleo:

$$\Phi_m = \frac{V_1}{4{,}44\, f N_1} = \frac{106{,}06}{4{,}44 \cdot 50 \cdot 300} = 1{,}59 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

que corresponde a una inducción máxima:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{1{,}59 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-4}} = 1{,}59 \text{ Teslas}$$

lo que requiere una intensidad del campo magnético, teniendo en cuenta la curva de imanación del material:

$$B_m = 1{,}59 = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-2}\, H_m}{1 + 10^{-2}\, H_m} \quad \Rightarrow \quad H_m = 757 \text{ A.v/m}$$

Suponiendo que la corriente de imanación I_μ sea de forma sinusoidal, también lo será la intensidad del campo magnético H_m que ella produce, por lo que se tendrá un valor eficaz de campo:

$$H = \frac{H_m}{\sqrt{2}} = \frac{757}{\sqrt{2}} = 535{,}28 \text{ A.v/m}$$

y como $H = NI_\mu/\ell$, daría lugar a una corriente de imanación:

$$I_\mu = \frac{535{,}28 \cdot 0{,}5}{300} \approx 0{,}9 \text{ A}$$

La componente I_{Fe} de la corriente de vacío puede determinarse de acuerdo con (1.85) por la ecuación:

$$P_{Fe} = V_1 \cdot I_0 \cdot \cos \varphi_0 = V_1 \cdot I_{Fe}$$

y por consiguiente:

$$I_{Fe} = \frac{20}{106{,}06} = 0{,}19 \text{ A}$$

Si se toma $\mathbf{V}_1$ como referencia de fases, la corriente de vacío, de acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 3.11, tendrá la siguiente expresión compleja:

$$\mathbf{I}_0 = 0{,}19 - j\,0{,}9 = 0{,}92 \angle -78{,}08° \text{ A}$$

que corresponde a un módulo de 0,92 A.

b) De acuerdo con (3.6) se tiene:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{106{,}06}{V_2} = \frac{300}{100}$$

de donde se deduce un módulo de $\mathbf{V}_2$ igual a 35,35 V.

c) La tensión secundaria calculada en el apartado anterior está en fase con la tensión primaria (véase Figura 3.11), por lo que la expresión compleja será:

$$\mathbf{V}_2 = 35{,}35 \angle 0° \text{ V}$$

De este modo la corriente $\mathbf{I}_2$ valdrá, según (3.8):

$$\mathbf{I}_2 = \frac{35{,}35 \angle 0°}{0{,}5 \angle 60°} = 70{,}7 \angle -60° \text{ A}$$

que corresponde a un módulo de la corriente secundaria de 70,7 A. La corriente primaria correspondiente se obtendrá aplicando (3.12), donde $m = 300/100 = 3$, resultando:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m} = 0{,}92 \angle -78{,}08° + \frac{70{,}7 \angle -60°}{3} = 24{,}44 \angle -60{,}68° \text{ A}$$

Obsérvese que la expresión (3.17) nos da un valor aproximado muy cercano al real:

$$\mathbf{I}_1 \approx \frac{\mathbf{I}_2}{m} = 23{,}57 \angle -60° \text{ A}$$

3.4. FUNCIONAMIENTO DE UN TRANSFORMADOR REAL

En el epígrafe anterior se ha realizado el estudio de un transformador ideal en el que los arrollamientos no tenían resistencia ni flujos de dispersión. En los transformadores reales hay que tener en cuenta ambas cualidades. La aparición de resistencia es inherente a la constitución de los devanados con hilo conductor. En la Figura 3.12 se muestra el circuito del transformador de la Figura 3.10, donde para mayor claridad se han considerado las resistencias R_1 y R_2 de los arrollamientos, fuera de las propias bobinas. Se observa también en el transformador real que de todo el flujo producido por los devanados sólo existe una parte común a ambos y representada por Φ en la Figura 3.12; lo anterior es consecuencia de los flujos de dispersión que aparecen en los arrollamientos y que se distribuyen por caminos no magnéticos, en particular por los conductores y el aire que rodea las bobinas. Si se denominan Φ_1 y Φ_2 a los flujos totales que atraviesan los devanados primario y secundario y Φ_{d1}, Φ_{d2} a los flujos de dispersión respectivos se cumplirá:

$$\Phi_1 = \Phi + \Phi_{d1} \quad ; \quad \Phi_2 = \Phi + \Phi_{d2} \tag{3.18}$$

A primera vista, la introducción de los flujos de dispersión complica nuestro estudio, ya que desaparece la idea del flujo común único que existía en el transformador ideal. Sin embargo, se puede conservar tal forma de proceder si se añaden en serie a cada arrollamiento unas bobinas con el mismo número de espiras que los devanados correspondientes, de tal modo que al circular por ellas las intensidades respectivas den lugar a los mismos flujos de dispersión Φ_{d1} y Φ_{d2} que en los bobinados reales. En la Figura 3.13 se ha representado esta idea, donde se han indicado con L_{d1} y L_{d2} los coeficientes de autoinducción respectivos de estas bobinas adicionales (con núcleo de aire), cuyos valores de acuerdo con su definición serán:

$$L_{d1} = N_1 \frac{d\Phi_{d1}}{di_1} \quad ; \quad L_{d2} = N_2 \frac{d\Phi_{d2}}{di_2} \tag{3.19}$$

y que dan lugar a las reactancias de dispersión X_1 y X_2 de ambos devanados:

$$X_1 = L_{d1}\omega \quad ; \quad X_2 = L_{d2}\omega \tag{3.20}$$

La aplicación del 2.º lema de Kirchhoff a los circuitos primario y secundario de la Figura 3.13 nos da:

$$v_1 = e_1 + R_1 i_1 + L_{d1}\frac{di_1}{dt} \quad ; \quad e_2 = v_2 + R_2 i_2 + L_{d2}\frac{di_2}{dt} \tag{3.21}$$

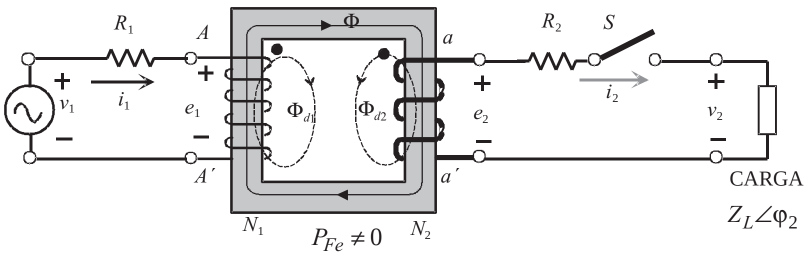


Figura 3.12. Transformador real con resistencias eléctricas y flujos de dispersión.

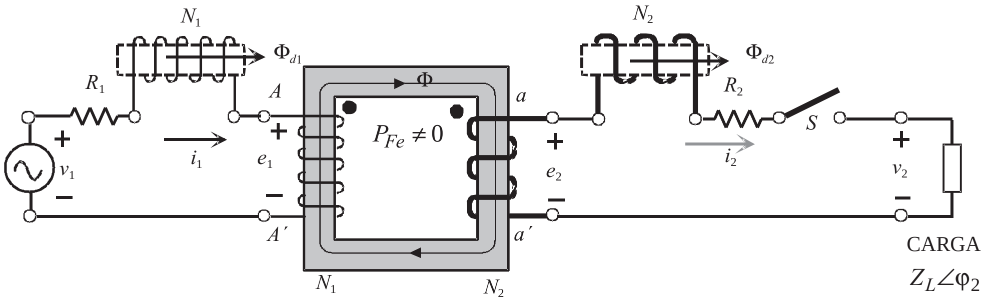


Figura 3.13. Transformador real con bobinas ideales en el núcleo.

donde los valores de e_1 y e_2 vienen expresados por las ecuaciones (3.1):

$$e_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad ; \quad e_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{3.22}$$

que corresponden a los valores eficaces según (3.5):

$$E_1 = 4{,}44\, f N_1 \Phi_m \quad ; \quad E_2 = 4{,}44\, f N_2 \Phi_m \tag{3.23}$$

donde Φ_m es el flujo común máximo que circula por el circuito magnético de la Figura 3.13.

Las ecuaciones (3.21) se expresan en forma compleja:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\mathbf{I}_1 + jX_1\mathbf{I}_1 \quad ; \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_2 - R_2\mathbf{I}_2 - jX_2\mathbf{I}_2 \tag{3.24}$$

Si se tiene en cuenta (3.23), la relación entre los valores eficaces de las f.e.m.s. inducidas será:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{3.25}$$

ecuación que se cumple **siempre** tanto en el transformador ideal (véase ecuación 3.6) como en el transformador real que aquí se estudia. Ahora bien, si se tiene en cuenta (3.21) o (3.24), en el transformador real dejan de cumplirse las igualdades entre f.e.m.s. y tensiones que aparecían en el transformador ideal (véase ecuaciones 3.2), por lo que en el caso real el cociente entre las tensiones primaria y secundaria deja de ser igual a la relación de transformación (véase ecuación 3.6). En los transformadores que usa la industria, las caídas de tensión a plena carga son del orden del 1 al 10 por 100 de las tensiones asignadas, por lo que las relaciones (3.24) se convierten en las ecuaciones aproximadas:

$$V_1 \approx E_1 \quad ; \quad V_2 \approx E_2 \tag{3.26}$$

y de ahí que la relación entre las tensiones primaria y secundaria será **aproximadamente** igual a:

$$\frac{V_1}{V_2} \approx m \tag{3.27}$$

Si el transformador trabaja en vacío, las relaciones reales (3.24) se transforman en:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\mathbf{I}_0 + jX_1\mathbf{I}_0 \quad ; \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_2 \tag{3.28}$$

ya que I_2 es igual a cero. Como quiera que en la práctica la corriente de vacío I_0 es del orden de 0,6 a 8 por 100 de I_{1n} (corriente asignada o de plena carga del primario), las caídas de tensión en vacío definidas por R_1I_0 y X_1I_0 en la primera ecuación (3.28) son muy pequeñas (del orden de 0,004 a 0,06 por 100 de V_1), y de ahí que en **vacío** se puedan considerar como suficientemente exactas las igualdades:

$$V_1 = E_1 \quad ; \quad V_{20} = E_2 \tag{3.29}$$

donde V_{20} representa la magnitud de la tensión secundaria en vacío. Por consiguiente, y teniendo en cuenta (3.25) y (3.29), se podrá escribir:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{V_{20}} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{3.30}$$

que nos define la relación de transformación como el cociente entre la tensión primaria aplicada al transformador y la tensión secundaria en vacío. Este cociente es el que incluye el fabricante en la placa de características de la máquina.

En el funcionamiento en carga la primera relación aproximada (3.26) y la primera ecuación (3.23) nos indica que los flujos magnéticos en vacío y en carga son prácticamente iguales, lo que significa que las f.m.m.s. en ambos estados de carga coinciden, por lo que la ecuación (3.16), que relaciona las corrientes del transformador, se puede considerar válida a todos los efectos y que se vuelve a escribir a continuación:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m} \tag{3.31}$$

Las ecuaciones (3.24) y (3.31) definen el comportamiento eléctrico del transformador en carga. Las ecuaciones (3.24) relacionan las tensiones con las f.e.m.s. y caídas de tensión dentro de los devanados del transformador, mientras que (3.31) nos indica la relación entre las corrientes primaria, secundaria y de vacío.

Ejemplo de aplicación 3.2

Un transformador monofásico de 10 kVA, relación 500/100 V, tiene las siguientes impedancias de los devanados: $Z_1 = R_1 + jX_1 = 0{,}2 + j0{,}4\ \Omega$; $Z_2 = R_2 + jX_2 = 0{,}008 + j0{,}016\ \Omega$. Al alimentar el transformador por una tensión de 500 V que se toma como referencia de fases, la corriente de vacío absorbida responde a la forma compleja: $\mathbf{I}_0 = 0{,}2 \angle -70°$ A. Calcular: a) Valores de E_1, E_2 y V_2 cuando el transformador trabaja en vacío. b) Si el secundario lleva una corriente de la forma $\mathbf{I}_2 = 100 \angle -30°$, calcular los nuevos valores de E_1, E_2 y V_2.

Solución

a) En vacío se cumplen las relaciones (3.28). Teniendo en cuenta además que:

$$\mathbf{V}_1 = 500 \angle 0° \quad ; \quad m = 500/100 = 5$$

resultará:

$$\mathbf{E}_1 = 500 \angle 0° - (0{,}2 + j0{,}4) \cdot 0{,}2 \angle -70° = 499{,}91 \angle 0{,}0011°$$

que corresponde a una f.e.m. $\mathbf{E}_2$ según (3.30):

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{E}_1}{m} = 99{,}98 \angle 0{,}0011°$$

y teniendo en cuenta la 2.ª ecuación (3.28) se tiene:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{20} = \mathbf{E}_2 = 99{,}98 \angle 0{,}0011°$$

b) Cuando el transformador funciona con carga, la corriente primaria vendrá expresada por la ecuación (3.31):

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m} = 0{,}2 \angle -70° + \frac{100 \angle -30°}{5} = 20{,}15 \angle -30{,}37°$$

y teniendo en cuenta (3.24) resulta:

$$\mathbf{E}_1 = 500 \angle 0° - (0{,}2 + j\,0{,}4) \cdot 20{,}15 \angle -30{,}37° = 492{,}47 \angle 0{,}57°$$

lo que corresponde, según (3.25), a una f.e.m. $\mathbf{E}_2$:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{E}_1}{m} = 98{,}49 \angle 0{,}57°$$

y a una tensión secundaria $\mathbf{V}_2$:

$$\mathbf{V}_2 = 98{,}49 \angle 0{,}57° - (0{,}008 + j\,0{,}016) \cdot 100 \angle -30° \approx 97 \angle 0°$$

3.5. CIRCUITO EQUIVALENTE DE UN TRANSFORMADOR

Los problemas relacionados con las tensiones y las corrientes en los transformadores se pueden resolver con gran precisión por medio del cálculo complejo, que es un método analítico que ha sustituido hoy en día (gracias a las excelentes calculadoras electrónicas de bolsillo de que se dispone actualmente en el mercado) a los complejos diagramas vectoriales que se fueron utilizando hasta la década de los setenta. Aun así, el cálculo resulta ser algo laborioso, por lo que suele recurrirse a la sustitución del transformador por un circuito equivalente simplificado que incorpore todos los fenómenos físicos que se producen en la máquina real. El desarrollo de circuitos equivalentes de las máquinas eléctricas no es una invención moderna, estando ligado a la propia evolución y expansión de la ingeniería eléctrica. Hay que reconocer, sin embargo, la excelente labor realizada por Steinmetz, quien a principios del siglo XX asentó las bases científicas de la tecnología eléctrica. La ventaja de desarrollar circuitos equivalentes de máquinas eléctricas es poder aplicar todo el potencial de la teoría de redes eléctricas para conocer con antelación la respuesta de una máquina en unas determinadas condiciones de funcionamiento.

En el caso del transformador el desarrollo de un circuito equivalente se inicia **reduciendo** ambos devanados al mismo número de espiras. Generalmente se reduce el secundario al primario, lo que quiere decir que se sustituye el transformador original por otro que tiene el mismo primario con N_1 espiras y un nuevo secundario con un número de espiras N_2' igual a N_1. Para que este nuevo transformador sea equivalente al original, deben conservarse las condiciones energéticas de la máquina, es decir, las potencias activa y reactiva y su distribución entre los diversos elementos del circuito secundario. Todas las magnitudes relativas a este nuevo devanado se indican con los mismos símbolos del transformador real pero afectados con una tilde, como indica la Figura 3.14, donde los valores de tensiones y corrientes se expresan en forma compleja.

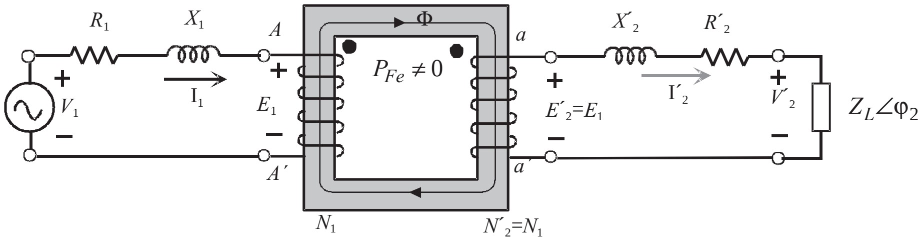


Figura 3.14. Circuito equivalente de un transformador real reducido al primario.

De acuerdo con el principio de igualdad de potencias, pérdidas, etc., se obtienen las siguientes relaciones entre las magnitudes secundarias de los transformadores real y equivalente:

a) F.e.m.s. y tensiones

En el transformador real se cumple:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \quad \Rightarrow \quad E_2 = \frac{E_1}{m} \tag{3.32}$$

y en el transformador equivalente, al ser $N_2' = N_1$, se tiene:

$$\frac{E_1}{E_2'} = \frac{N_1}{N_2'} = 1 \quad \Rightarrow \quad E_2' = E_1 = mE_2 \tag{3.33}$$

es decir, ***la f.e.m. E_2' del nuevo secundario es m veces mayor que la f.e.m. E_2 que existía en el transformador real.***

De forma análoga se tendrá para la tensión V_2':

$$V_2' = mV_2 \tag{3.34}$$

b) Corrientes

La conservación de la potencia aparente de ambos secundarios indica que:

$$S_2 = V_2 I_2 = V_2' I_2' \tag{3.35}$$

y teniendo en cuenta la relación (3.34) se obtiene:

$$I_2' = \frac{I_2}{m} \tag{3.36}$$

es decir, ***la corriente I_2' del nuevo secundario es m veces menor que la corriente I_2 que existía en el transformador real***.

c) Impedancias

Al igualar las potencias activas que se disipan en las resistencias, se obtiene:

$$R_2 I_2^2 = R_2' I_2'^2 \tag{3.37}$$

de donde se deduce, teniendo en cuenta (3.36):

$$R_2' = m^2 R_2 \tag{3.38}$$

es decir, ***la resistencia R_2' del nuevo secundario es m^2 veces la resistencia R_2 que existía en el transformador real***.

De forma similar, planteando la conservación de la potencia reactiva en las reactancias, resulta:

$$X_2 I_2^2 = X_2' I_2'^2 \tag{3.39}$$

y por consiguiente:

$$X_2' = m^2 X_2 \tag{3.40}$$

es decir, ***la reactancia X_2' del nuevo secundario es m^2 veces la reactancia X_2 que existía en el transformador real***.

En general, cualquier impedancia conectada en el secundario del transformador real, por ejemplo la impedancia de carga $Z_L \angle \varphi_2$ en la red de la Figura 3.13, se reducirá al primario siguiendo las relaciones (3.38) o (3.40), por lo que se convertirá en una impedancia $\mathbf{Z}_L'$ de valor (véase Fig. 3.14):

$$\mathbf{Z}_L' = m^2 \mathbf{Z}_L \tag{3.41}$$

lo que indica que ***cualquier impedancia Z_L conectada en el secundario del transformador se convierte en un valor $m^2 Z_L$ en el transformador equivalente.***

Téngase en cuenta, para demostrar la igualdad anterior de un modo general, que en la Figura 3.13 del transformador **real** se cumple:

$$\mathbf{Z}_L = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} \tag{3.42}$$

siendo la impedancia reducida o **transferida** al primario en el circuito **equivalente** de la Figura 3.14:

$$\mathbf{Z}_L' = \frac{\mathbf{V}_2'}{\mathbf{I}_2'} \tag{3.43}$$

y sustituyendo (3.34), (3.36) y (3.42) en (3.43) resultará:

$$\mathbf{Z}_L' = \frac{\mathbf{V}_2'}{\mathbf{I}_2'} = \frac{m\mathbf{V}_2}{\dfrac{\mathbf{I}_2}{m}} = \frac{m^2\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2} = m^2 \mathbf{Z}_L \tag{3.44}$$

que coincide con la relación (3.41), obtenida allí por analogía con las equivalencias de (3.38) y (3.40).

Es innegable que observando el circuito equivalente inicial obtenido en la Figura 3.14, el lector puede imaginar multitud de redes equivalentes con tal de imponer diferentes condiciones al número de espiras elegido N_2' del nuevo transformador. La importancia fundamental de la reducción de los devanados al haber elegido la igualdad especial $N_2' = N_1$ estriba en que se puede llegar a obtener una representación del transformador en la que no exista la función transformación, o dicho en otros términos, se va a sustituir el transformador real, cuyos devanados están acoplados magnéticamente, por un circuito cuyos elementos están **acoplados sólo eléctricamente**.

En efecto, si se observa el circuito de la Figura 3.14 y se tiene en cuenta la igualdad (3.33), existe una identidad entre las f.e.m.s. primaria y secundaria, lo cual permite reunir los extremos de igual polaridad instantánea, sustituyendo ambos devanados por uno solo como muestra la Figura 3.15. Por este arrollamiento único circulará una corriente diferencia: $\mathbf{I}_1$-$\mathbf{I}_2'$,

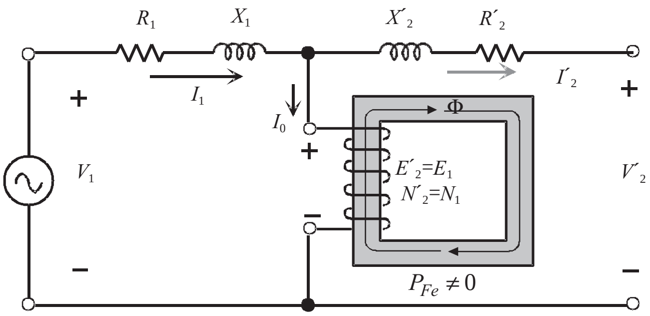


Figura 3.15. Circuito equivalente de un transformador real reducido al primario.

que teniendo en cuenta las identidades (3.16) y (3.31) es igual a la corriente de vacío $\mathbf{I}_0$. Ésta a su vez, tiene dos componentes, una activa I_{Fe} y otra reactiva I_μ, y como ya se demostró en el epígrafe 1.7.2 del Capítulo 1, representan un circuito paralelo formado por una resistencia R_{Fe}, cuyas pérdidas por efecto Joule indican las pérdidas en el hierro del transformador y por una reactancia X_μ por la que se deriva la corriente de magnetización de la máquina (véase Fig. 1.32 del Capítulo 1). De acuerdo con estos razonamientos, el circuito de la Figura 3.15 se transforma en el de la Figura 3.16, lo que representa el denominado **circuito equivalente exacto del transformador reducido al primario**.

El mismo proceso seguido hasta aquí para obtener el circuito equivalente del transformador reducido al primario se puede emplear en sentido inverso, es decir, tomando un primario con un número de espiras $N_1' = N_2$ y dejando inalterado el secundario; se obtiene así el llamado circuito equivalente reducido al secundario cuyo esquema se indica en la Figura 3.17, y cuya comprobación de magnitudes se deja como ejercicio al lector.

En este texto se utilizará normalmente el tipo de circuito obtenido en primer lugar y mostrado en la Figura 3.16. Este circuito responde fielmente al comportamiento del transformador real y por ello se denomina circuito equivalente **exacto**. En la práctica, y debido al reducido valor de I_0 frente a las corrientes I_1 e I_2, se suele trabajar con un circuito equivalente **aproximado** que se obtiene trasladando la rama en paralelo por la que se deriva la corriente de vacío a los bornes de entrada del primario, resultando el esquema de la Figura 3.18*a*. Con este circuito no se introducen errores apreciables en el cálculo y sin embargo

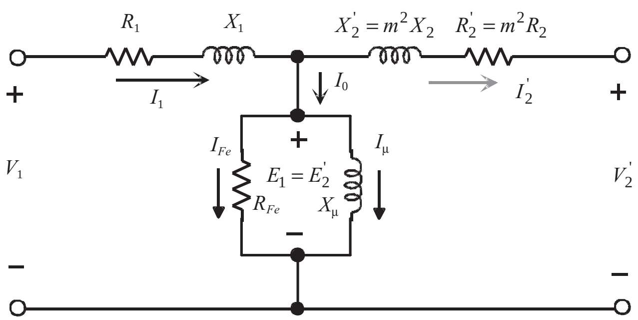


Figura 3.16. Circuito equivalente exacto de un transformador real reducido al primario.

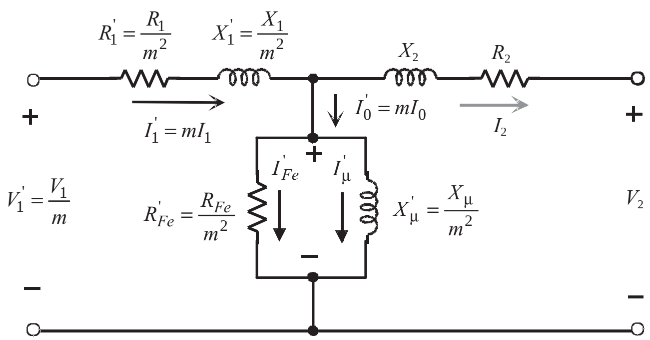


Figura 3.17. Circuito equivalente exacto de un transformador real reducido al secundario.

se simplifica enormemente el estudio de la máquina. El esquema puede simplificarse aún más observando la conexión en serie constituida por las ramas primaria y secundaria (reducida). Si se denomina:

$$R_{cc} = R_1 + R_2' : \textit{Resistencia de cortocircuito}$$
$$X_{cc} = X_1 + X_2' : \textit{Reactancia de cortocircuito} \qquad (3.45)$$

el circuito de la Figura 3.18*a* se convierte en el de la Figura 3.18*b*. Con ayuda de este último circuito equivalente simplificado pueden resolverse una serie de problemas prácticos que afectan a la utilización del transformador; en particular para el cálculo de la caída de tensión y el rendimiento. Inclusive, si en un problema real se requiere únicamente la determinación de la caída de tensión del transformador, se puede prescindir de la rama paralelo, ya que no afecta esencialmente al cálculo de aquélla; de este modo el circuito resultante será la impedancia serie: $R_{cc} + jX_{cc}$. Como quiera, además, que en los grandes transformadores se cumple que X_{cc} es varias veces R_{cc}, se puede utilizar solamente la reactancia serie X_{cc} para representar el circuito equivalente del transformador. Este esquema final es el que se utiliza cuando se realizan estudios de grandes redes en sistemas eléctricos de potencia: análisis de estabilidad, cortocircuitos, etc.

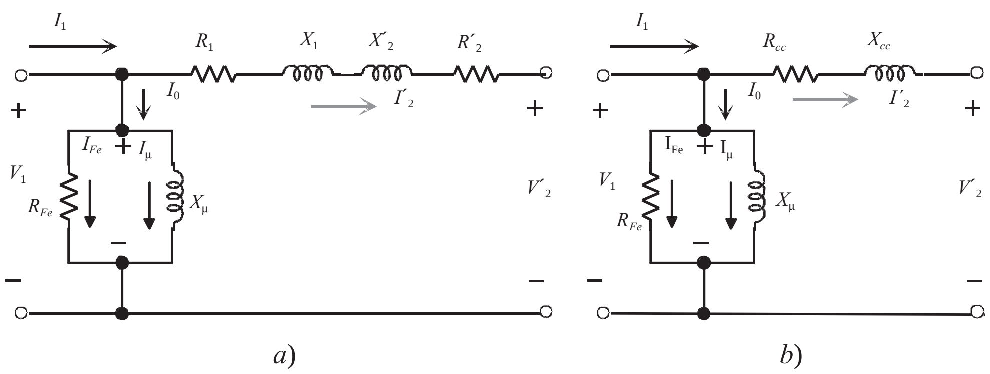


Figura 3.18. Circuito equivalente aproximado de un transformador reducido al primario.

Ejemplo de aplicación 3.3

A partir de las ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.31), que definen el comportamiento de un transformador real, deducir de un modo analítico el circuito equivalente exacto de la Figura 3.16.

Solución

Las ecuaciones de partida son:

$$1)\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\mathbf{I}_1 + jX_1\mathbf{I}_1 \quad ; \quad 2)\ \mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_2 - R_2\mathbf{I}_2 - jX_2\mathbf{I}_2 \quad ; \quad 3)\ \frac{\mathbf{E}_1}{\mathbf{E}_2} \quad ; \quad 4)\ \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m}$$

Si en la ecuación 2) se multiplica por la relación de transformación m resulta:

$$m\mathbf{V}_2 = m\mathbf{E}_2 - mR_2\mathbf{I}_2 - j\,mX_2\mathbf{I}_2$$

o en forma equivalente:

$$2')\quad m\boldsymbol{V}_2 = m\mathbf{E}_2 - m^2R_2\frac{\mathbf{I}_2}{m} - j\,m^2X_2\frac{\mathbf{I}_2}{m}$$

y denominando:

$$\mathbf{E}_2' = m\mathbf{E}_2 \quad ; \quad \mathbf{V}_2' = m\mathbf{V}_2 \quad ; \quad \mathbf{I}_2' = \mathbf{I}_2/m \quad ; \quad R_2' = m^2R_2 \quad ; \quad X_2' = m^2X_2$$

la ecuación 2′) se convierte en:

$$\mathbf{V}_2' = \mathbf{E}_2' - R_2'\mathbf{I}_2' - jX_2'\mathbf{I}_2'$$

lo que da lugar a las ecuaciones transformadas siguientes:

$$a)\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\mathbf{I}_1 + jX_1\mathbf{I}_1 \quad ; \quad b)\ \mathbf{V}_2' = \mathbf{E}_2' - R_2'\mathbf{I}_2' - jX_2'\mathbf{I}_2' \quad ; \quad c)\ \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2' \quad ; \quad d)\ \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2'$$

que el lector puede comprobar fácilmente que son las ecuaciones que rigen el comportamiento eléctrico del circuito de la Figura 3.16.

3.6. ENSAYOS DEL TRANSFORMADOR

Los ensayos de un transformador representan las diversas pruebas que deben prepararse para verificar el comportamiento de la máquina. En la práctica resulta difícil la realización de ensayos reales directos por dos motivos esenciales: 1) la gran cantidad de energía que ha de disiparse en tales pruebas, 2) es prácticamente imposible disponer de cargas lo suficientemente elevadas (sobre todo cuando la potencia del transformador es grande) para hacer un ensayo en situaciones reales.

Ahora bien, el comportamiento de un transformador, bajo cualquier condición de trabajo, puede predecirse con suficiente exactitud si se conocen los parámetros del circuito equivalente. Tanto el fabricante como el usuario del transformador necesitan esta información. Sin embargo, no es sencillo ni fiable obtener estos parámetros de los datos de diseño o proyecto. Afortunadamente, los elementos que intervienen en el circuito equivalente aproximado se pueden obtener con unos ensayos muy simples que tienen además la ventaja de requerir muy poco consumo de energía (la suficiente para suministrar únicamente las pérdidas de la máquina), de ahí que sean pruebas sin carga real. Los dos ensayos fundamentales que se utilizan en

la práctica para la determinación de los parámetros del circuito equivalente de un transformador son: *a*) **Ensayo de vacío** y *b*) **Ensayo de cortocircuito**.

Antes de proceder a la descripción de estos ensayos vamos a indicar aquí un método para determinar la polaridad de los terminales de un transformador, que le ayudará al lector a comprender el convenio de punto utilizado en la explicación del epígrafe 3.3 y le servirá más adelante para entender los índices horarios de los transformadores trifásicos y la conexión en paralelo de estas máquinas. Consideremos el esquema simplificado del transformador mostrado en la Figura 3.19, en el que se desconoce el sentido del arrollamiento de los devanados. Se trata de determinar la polaridad relativa de los terminales secundarios respecto del primario. El proceso a seguir es el siguiente: se señalan previamente los terminales del primario con las letras A y A'. Se unen a continuación dos terminales cualesquiera de primario y secundario, en el caso que nos ocupa se han unido A con x. Se conectan tres voltímetros de c.a. en la forma que se señala. Al alimentar el primario con una tensión alterna se leen los valores señalados por los tres voltímetros V_1, V_2 y V_3. Si la tensión V_3 es igual a $V_1 - V_2$ significa entonces que el terminal x es el homólogo a A, por lo que deberá identificarse finalmente este borne con la letra «a» de acuerdo con lo indicado en el epígrafe 3.3; el otro terminal «y» corresponderá entonces a «a'».

De un modo equivalente con el convenio de punto: se deberá señalar con un punto el terminal «a» que es el homólogo de «A». Si la tensión V_3 es igual a $V_1 + V_2$, entonces el terminal «y» es ahora el homólogo de «A» y, por tanto, el «x» es el homólogo de A'. Con este simple procedimiento se puede realizar el ensayo de polaridad; en la práctica el devanado de alta tensión puede conectarse a una red alterna de 220 V, 50 Hz, aun cuando la tensión asignada de este devanado sea de centenares de voltios.

3.6.1. Ensayo de vacío

Consiste esta prueba en aplicar al primario del transformador la tensión asignada, estando el secundario en circuito abierto. Al mismo tiempo debe medirse la potencia absorbida P_0, la corriente de vacío I_0 y la tensión secundaria, de acuerdo con el esquema de conexiones de la Figura 3.20*.

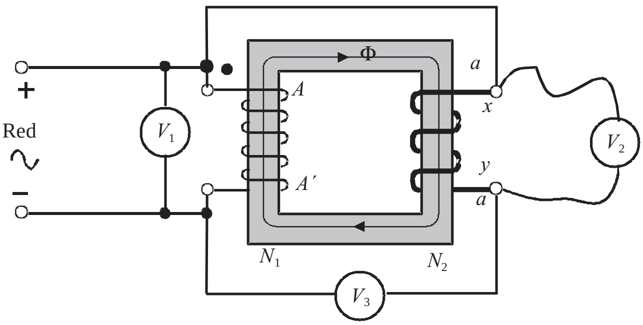


Figura 3.19. Disposición de los aparatos de medida para determinar la polaridad.

* El ensayo de vacío se indica por «didáctica» que se realiza alimentando el devanado primario, ya que se pretende obtener el circuito equivalente reducido al primario. En la práctica real este ensayo se realiza alimentando el devanado de B.T. porque normalmente su tensión de régimen está comprendida en las escalas de los aparatos de medida empleados. Además existe menos peligro para el operador al trabajar con B.T.

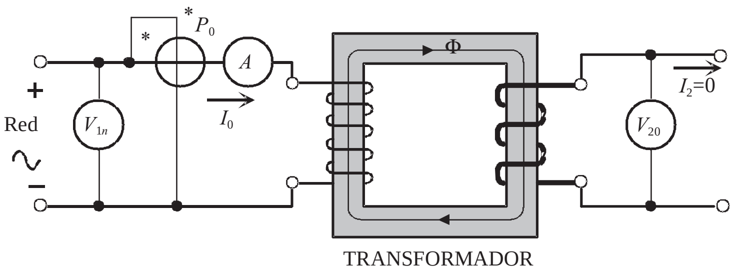


Figura 3.20. Esquema eléctrico del ensayo de vacío.

Como quiera que las pérdidas $R_1 I_0^2$ en vacío son despreciables (debido al pequeño valor de I_0), **la potencia absorbida en vacío coincide prácticamente con las pérdidas en el hierro**, lo que está de acuerdo con el circuito equivalente aproximado de la Figura 3.21*a*, que se deduce del esquema general de la Figura 3.18*b*, al ser $I_2 = 0$. De las medidas efectuadas puede obtenerse el factor de potencia en vacío, de acuerdo con la ecuación:

$$P_0 = V_{1n} I_0 \cos \varphi_0 = P_{Fe} \tag{3.46}$$

Por otra parte, debido al pequeño valor de la caída de tensión primaria, se puede considerar que la magnitud V_{1n} coincide prácticamente con E_1, resultando el diagrama vectorial de vacío de la Figura 3.21*b*, en el que se ha tomado la tensión primaria como referencia de fases. En este esquema las dos componentes de I_0 valen:

$$I_{Fe} = I_0 \cos \varphi_0 \quad ; \quad I_\mu = I_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \tag{3.47}$$

De donde pueden obtenerse ya los valores de los parámetros R_{Fe} y X_μ:

$$R_{Fe} = \frac{V_1}{I_{Fe}} \quad ; \quad X_\mu = \frac{V_1}{I_\mu} \tag{3.48}$$

Es decir, el ensayo de vacío permite determinar las pérdidas en el hierro del transformador y también los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente del mismo. Del ensayo de vacío puede obtenerse también la relación de transformación, merced a que la tensión V_{1n} aplicada coincide prácticamente con E_1, además la f.e.m. E_2 es igual a la tensión

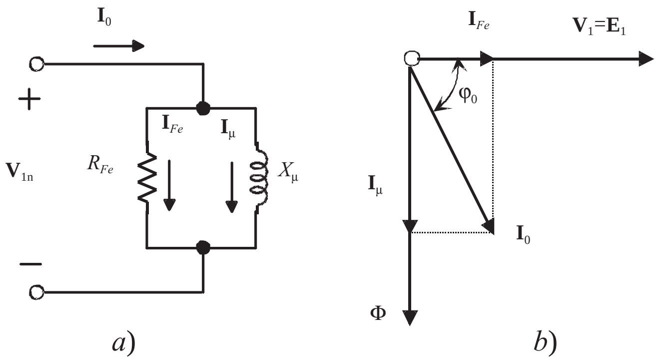


Figura 3.21. Circuito equivalente en vacío y diagrama fasorial correspondiente.

medida en el secundario en vacío y que se denomina V_{20}. En consecuencia, se cumplirá de acuerdo con (3.30):

$$m = \frac{N_1}{N_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_{1n}}{V_{20}} \tag{3.49}$$

3.6.2. Ensayo de cortocircuito

En este ensayo se cortocircuita el devanado secundario y se aplica al primario una tensión que se va elevando gradualmente desde cero hasta que circula la **corriente asignada** de plena carga por los devanados*. El esquema y tipos de aparatos necesarios para la realización de este ensayo se indican en la Figura 3.22.

La tensión aplicada necesaria en esta prueba representa un pequeño porcentaje respecto a la asignada (3-10 por 100 de V_{1n}), por lo que el flujo en el núcleo es pequeño, siendo en consecuencia despreciables las pérdidas en el hierro. **La potencia absorbida en cortocircuito coincide con las pérdidas en el cobre**, lo que está de acuerdo con el circuito equivalente aproximado de la Figura 3.23*a*, que se deduce del esquema general de la Figura 3.18*b*, al despreciar la rama en paralelo, como consecuencia del pequeño valor de la corriente I_0 frente a I_{1n}.

De las medidas efectuadas se puede obtener el f.d.p. de cortocircuito, de acuerdo con la ecuación:

$$P_{cc} = V_{1cc} I_{1n} \cos \varphi_{cc} \tag{3.50}$$

Si en el circuito de la Figura 3.23*a* se toma la corriente como referencia, se obtiene el diagrama vectorial de la Figura 3.23*b*, del cual se deduce:

$$V_{R_{cc}} = R_{cc} I_{1n} = V_{1cc} \cos \varphi_{cc} \quad ; \quad V_{X_{cc}} = X_{cc} I_{1n} = V_{1cc} \operatorname{sen} \varphi_{cc} \tag{3.51}$$

y en consecuencia:

$$R_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \cos \varphi_{cc} \quad ; \quad X_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \operatorname{sen} \varphi_{cc} \tag{3.52}$$

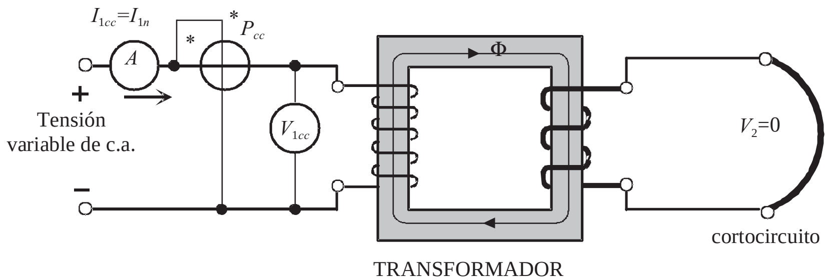


Figura 3.22. Circuito eléctrico del ensayo de cortocircuito.

* Este ensayo se realiza en la práctica alimentando el transformador por el lado de A.T., de esta forma la corriente a medir en el primario será de un valor razonable. Al mismo tiempo, la tensión de alimentación sólo será una pequeña parte de la nominal, estando comprendida dentro de las escalas de los instrumentos de medida usuales.

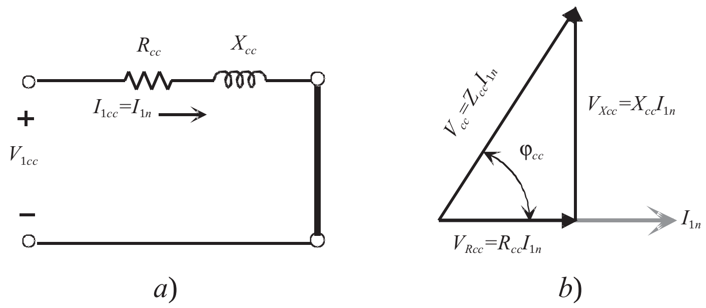


Figura 3.23. Circuito equivalente de cortocircuito y esquema fasorial de tensiones.

Es decir, el ensayo de cortocircuito permite determinar los parámetros de la rama serie del circuito equivalente del transformador, y de ahí que se designen con los símbolos R_{cc} y X_{cc}. Debe destacarse que el ensayo de cortocircuito determina la impedancia total del transformador pero no da información de cómo están distribuidos estos valores totales entre el primario y el secundario. Es decir, se obtiene, según (3.45):

$$R_{cc} = R_1 + R_2' \quad ; \quad X_{cc} = X_1 + X_2' \tag{3.53}$$

Para poder determinar los valores individuales de las resistencias R_1 y R_2' es preciso aplicar c.c. a cada uno de los devanados y obtener las resistencias R_1 y R_2 (no R_2') aplicando la ley de Ohm y utilizando un factor corrector para tener en cuenta el efecto pelicular que se produce con c.a. (la resistencia óhmica es función de la frecuencia, debido a la distribución no uniforme de la corriente por la sección transversal del conductor). No existen procedimientos para separar en la 2.ª ecuación (3.53) X_1 de X_2'. En la práctica de la ingeniería eléctrica, cuando se desea conocer la distribución de R_{cc} y X_{cc} entre ambos devanados es frecuente recurrir a la solución aproximada siguiente:

$$R_1 = R_2' = \frac{R_{cc}}{2} \quad ; \quad X_1 = X_2' = \frac{X_{cc}}{2} \tag{3.54}$$

Otro aspecto a tener en cuenta en el ensayo en cortocircuito es que la potencia absorbida coincide con la pérdida en el cobre de los devanados correspondiente a la **corriente que fluye** en esa situación. Si como exigen las Normas de Ensayos (IEC, UNE, VDE, etc.) esta corriente es la asignada, las pérdidas correspondientes representarán las pérdidas en el cobre a plena carga. *Pero ¿qué sucede si el ensayo de cortocircuito no está hecho con corriente asignada?* Esta situación suele ser conflictiva para los estudiantes. En principio el ensayo no estaría realizado conforme a Normas y podría no ser válido. Si se considera que los parámetros R_{cc} y X_{cc} son lineales, lo que significa que sus valores no dependen de la corriente que circula por ellos*, el proceso a seguir sería el mismo que el que así se ha empleado para calcular (3.52) y se obtendrían esos mismos valores. El conflicto está en la interpretación de: 1) las pérdidas en cortocircuito, que ya no serán las pérdidas en el cobre asignadas nominales o de plena carga sino las pérdidas en el cobre al régimen de carga impuesto por la corriente de cortocircuito a la que se haya realizado el ensayo, 2) la tensión de cortocircuito, que será proporcional a la

---

* La realidad es que los parámetros mencionados exhiben una pequeña característica no lineal, y de ahí la exigencia de las diferentes Normas de que la corriente de cortocircuito se haga coincidir con la nominal o de plena carga.

corriente a la que se haya efectuado el ensayo. Estimamos que la confusión procede de una indefinición de las magnitudes que entran en juego. Para aclarar este problema denominaremos:

$$V_{1cc} \quad ; \quad I_{1cc} = I_{1n} \quad ; \quad P_{cc} \tag{3.55}$$

a la tensión de cortocircuito con corriente asignada, corriente de cortocircuito igual a la asignada, y potencia de cortocircuito con corriente asignada, respectivamente.

Si el ensayo no está hecho con la corriente asignada (nominal), las magnitudes correspondientes se designarán así:

$$V_{1corto},\ I_{1corto},\ P_{corto} \tag{3.56}$$

con ambos juegos de valores (3.55) y (3.56) se obtendrán las mismas soluciones (si el sistema es lineal) expresadas en (3.52). Definidas las corrientes $I_{1cc} = I_{1n}$ e I_{1corto}, las relaciones entre las otras magnitudes, teniendo en cuenta el circuito equivalente de la Figura 3.23*a*, serán:

$$Z_{cc} = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} = \frac{V_{1corto}}{I_{1corto}} \quad ; \quad P_{cc} = R_{cc} I_{1n}^2 \quad ; \quad P_{corto} = R_{cc} I_{1corto}^2 \tag{3.57}$$

de donde se deduce:

$$V_{1cc} = V_{1corto} \frac{I_{1n}}{I_{1corto}} \quad ; \quad P_{cc} = P_{corto} \frac{I_{1n}^2}{I_{1corto}^2} \tag{3.58}$$

Las igualdades (3.58) representan de este modo las relaciones de cambio para transformar las magnitudes de ambos ensayos. Nuestro consejo al lector es que si el ensayo de cortocircuito no se ha realizado con corriente asignada [es decir, se han leído las magnitudes expresadas en (3.56)], se apliquen las ecuaciones de transformación (3.58) para determinar las magnitudes (3.55) definidas para corriente asignada y determinar los parámetros del circuito equivalente a partir de las ecuaciones (3.50) y siguientes.

Normalmente las caídas de tensión indicadas en (3.51) suelen expresarse en **tanto por ciento** respecto a la tensión asignada, resultando:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad ; \quad \varepsilon_{R_{cc}} = \frac{V_{R_{cc}}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad ; \quad \varepsilon_{X_{cc}} = \frac{V_{X_{cc}}}{V_{1n}} \cdot 100 \tag{3.59}$$

El ensayo de cortocircuito debe distinguirse de la **falta o fallo de cortocircuito** que puede suceder en un *transformador alimentado por su tensión asignada primaria cuando por accidente se unen entre sí los bornes del devanado secundario.* El circuito equivalente en esta situación es también el indicado en la Figura 3.23 (ensayo de cortocircuito); sin embargo, ahora el transformador está alimentado por una tensión V_{1n} (en vez de V_{1cc}), apareciendo una fuerte corriente de circulación I_{1falta} (o I_{2falta} en el secundario), muy peligrosa para la vida de la máquina debido a los fuertes efectos térmicos y electrodinámicos que produce. Desde el punto de vista de circuito equivalente, el valor de I_{1falta} vendrá expresado por:

$$I_{1falta} = \frac{V_{1n}}{Z_{cc}} \tag{3.60}$$

y teniendo en cuenta que del diagrama vectorial de la Figura 3.23*b* se deduce:

$$I_{1n} = \frac{V_{1cc}}{Z_{cc}} \tag{3.61}$$

se podrá poner:

$$I_{1falta} = \frac{V_{1n}}{V_{1cc}} I_{1n} \tag{3.62}$$

que al hacer uso de la 1.ª identidad de (3.59) resultará:

$$I_{1falta} = \frac{100}{\varepsilon_{cc}} I_{1n} \tag{3.63}$$

lo que indica que la corriente de cortocircuito de falta está en relación inversa con ε_{cc}. Cuanto mayor sea el valor *de* ε_{cc} tanto menor será el valor de la corriente de cortocircuito. Como quiera que un alto valor de ε_{cc} implica, como se demostrará en el epígrafe 3.7, una fuerte caída de tensión en el transformador, deberá adoptarse una solución de compromiso entre ambos aspectos contradictorios. En la práctica, los transformadores industriales menores de 1.000 kVA, tienen un valor de ε_{cc} comprendido entre el 1 y 6 por 100 (transformadores de distribución); sin embargo, para potencias mayores se aumenta hasta un margen del 6 al 13 por 100. Como se demostrará más adelante, el valor de ε_{cc} tiene también gran importancia en el acoplamiento en paralelo de transformadores. Generalmente la componente $\varepsilon_{X_{cc}}$ es superior a $\varepsilon_{R_{cc}}$.

AMPLÍE SUS CONOCIMIENTOS

1. Relaciones entre las impedancias de los circuitos equivalentes:

De acuerdo con el circuito equivalente del transformador mostrado en la Figura 3.18, el valor absoluto de la impedancia de la rama serie del transformador reducido al primario es:

$$\mathbf{Z}_{cc} = R_{cc} + jX_{cc} \quad ; \quad \text{donde se cumple} \quad R_{cc} = R_1 + m^2R_2 \quad ; \quad X_{cc} = X_1 + m^2X_2 \tag{1}$$

mientras que cuando se utiliza el circuito equivalente reducido al secundario de la Figura 3.17, los valores absolutos correspondientes los vamos a denominar del siguiente modo:

$$\mathbf{Z}'_{cc} = R'_{cc} + jX'_{cc} \quad ; \quad \text{donde se cumple} \quad R'_{cc} = \frac{R_1}{m^2} + R_2 \quad ; \quad X'_{cc} = \frac{X_1}{m^2} + X_2 \tag{2}$$

obsérvese comparando las expresiones (1) y (2), que las relaciones entre estas magnitudes reducidas al primario o al secundario son:

$$\mathbf{Z}'_{cc} = \frac{\mathbf{Z}_{cc}}{m^2} \quad ; \quad R'_{cc} = \frac{R_{cc}}{m^2} \quad ; \quad X'_{cc} = \frac{X_{cc}}{m^2} \tag{3}$$

es importante utilizar bien estos parámetros cuando se trabaja con valores absolutos de impedancias, ya que las magnitudes son distintas según se utilice el circuito equivalente del transformador reducido al primario o reducido al secundario. Sin embargo cuando se utilizan valores por unidad (véase el Apéndice 3), o se estudian las caídas de tensión de los transformadores en tanto por ciento, los valores relativos son idénticos y no dependen del circuito equivalente utilizado. Así podemos observar que las caídas relativas de tensión con parámetros reducidos al primario mostradas en (3.76) son:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{Z_{cc}I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad ; \quad \varepsilon_{Rcc} = \frac{R_{cc}I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad ; \quad \varepsilon_{Xcc} = \frac{X_{cc}I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 \tag{4}$$

y como quiera que se cumple:

$$m = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} \approx \frac{I_{2n}}{I_{1n}} \tag{5}$$

al sustituir en (4) y teniendo en cuenta (3), se obtiene la expresión de la caída relativa de tensión en función de la impedancia reducida al secundario:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{Z_{cc}\dfrac{I_{2n}}{m}}{mV_{2n}} \cdot 100 = \frac{\dfrac{Z_{cc}}{m^2}I_{2n}}{V_{2n}} \cdot 100 = \frac{Z'_{cc}I_{2n}}{V_{2n}} \cdot 100 \tag{6a}$$

y de modo análogo para las caídas porcentuales de tensión en la resistencia y reactancia del transformador con magnitudes reducidas al secundario:

$$\varepsilon_{Rcc} = \frac{R'_{cc}I_{2n}}{V_{2n}} \cdot 100 \quad ; \quad \varepsilon_{Xcc} = \frac{X'_{cc}I_{2n}}{V_{2n}} \cdot 100 \tag{6b}$$

Comparando las ecuaciones (4) con las (6*a*) y (6*b*), se observa que las *caídas relativas de tensión son independientes de circuito equivalente utilizado* para estudiar el transformador (bien sea reducido al primario o reducido al secundario).

2. Interpretación de la placa de características del transformador y su relación con los ensayos

En los epígrafes anteriores (3.6.1) y (3.6.2) se han deducido los parámetros del circuito equivalente de un transformador, por medio de los ensayos clásicos de vacío y de cortocircuito. Estos ensayos los tenía que hacer antiguamente el ingeniero en la recepción de los transformadores que recibía de la Empresa constructora de máquinas eléctricas para comprobar si cumplían los pliegos de condiciones establecidos en sus proyectos. Con la entrada en vigor de las normativas nacionales e internacionales, como las Normas UNE y UNE-EN en España, DIN y VDE en Alemania, British Standards y BS-EN en el Reino Unido, CENELEC en Francia (Comité Europeo de Normalización Electrotécnica, que elabora Normas Electrotécnicas a la que están adscritos una gran parte de los países europeos), NEMA e IEEE en Estados Unidos, etc..; en la actualidad los constructores de transformadores hacen estos ensayos en fábrica de acuerdo a estas normativas (en el caso de España se sigue la Norma UNE-EN60076-1/A1:2002 sobre transformadores de potencia). Según estas Normas el constructor debe señalar en la placa de características de la máquina los resultados de estos ensayos de un modo análogo al indicado en la Tabla 3.3, incluida al explicar el epígrafe 3.2. Obsérvese en esta Tabla que el constructor señala además de las potencias y tensiones asignadas, los valores de las potencias de vacío P_0, de cortocircuito P_{cc}, la caída relativa de tensión ε_{cc} y el valor de la corriente de vacío I_o en función de la corriente nominal asignada. Es importante que el lector sepa interpretar esta Tabla para obtener los parámetros del circuito equivalente, tal como se ha explicado en los epígrafes 3.6.1 y 3.6.2.

Recuérdese que el ensayo de vacío requiere determinar (o conocer) las magnitudes de P_0, V_{1n} e I_0 ya que con estos valores se obtienen los parámetros de la rama paralelo del circuito equivalente del transformador. Las magnitudes correspondientes se deducen de la Tabla 3.3, ya que en ella figura explícitamente el valor de P_0 e implícitamente los valores de V_{1n} e I_0. Téngase en cuenta para ello que el valor de la tensión aplicada en vacío, *se da por supuesto que es la nominal* V_{1n} (cuando se utiliza el circuito equivalente reducido al primario) y la corriente de vacío el constructor la describe como *tanto por ciento de la corriente nominal* (que en el caso de utilizar el circuito equivalente reducido a primario es el tanto por ciento respecto de I_{1n}, por lo

que habrá que calcular previamente este valor en función de los valores nominales o asignados a la potencia y a la tensión de primario y del tipo de transformador (monofásico o trifásico). En el caso de que se trate de un transformador monofásico se cumplirá $I_{1n}=S_n/V_{1n}$), por lo que conociendo el valor de la corriente de vacío en tanto por ciento del valor anterior, se podrá determinar el valor absoluto de I_0 y de este modo quedan identificados los valores de la tres magnitudes P_0, V_{1n} e I_0, que se necesitan para calcular la rama paralelo del circuito equivalente siguiendo los pasos indicados en el epígrafe 3.6.1.

Por otro lado el ensayo en cortocircuito requiere determinar (o conocer) las magnitudes de P_{cc}, V_{1cc} e I_{1cc}; con estos valores se obtienen los parámetros de la rama serie del circuito equivalente del transformador. Las magnitudes correspondientes se deducen de la Tabla 3.3, ya que en ella figura explícitamente el valor de P_{cc} e implícitamente los valores de V_{1cc} e I_{1cc}. Así se observa en la Tabla 3.3 que el constructor señala el valor de la caída relativa de tensión en cortocircuito ε_{cc}, de donde puede deducirse, de acuerdo con la primera expresión (3.59), el valor de la tensión aplicada en cortocircuito V_{1cc} (cuando se utiliza el circuito equivalente reducido al primario) y la corriente de cortocircuito *se da por supuesto que es la nominal* I_{1n} (cuando se utiliza el circuito equivalente reducido al primario). De este modo quedan identificados los valores de las tres magnitudes P_{cc}, V_{1cc} e I_{1cc}, que se necesitan para calcular la rama serie del circuito equivalente siguiendo los pasos indicados en el epígrafe 3.6.2. Es más, también de la Tabla 3.3 se pueden obtener directamente las caídas relativas de tensión ε_{Rcc} y ε_{Xcc} definidas en (3.59); téngase en cuenta que el valor de ε_{Rcc} viene expresado en tanto por ciento según (3.59) por:

$$\varepsilon_{Rcc}\,(\%) = \frac{V_{Rcc}}{V_{1n}} \cdot 100 \tag{7}$$

y que se puede escribir de un modo equivalente del siguiente modo:

$$\varepsilon_{Rcc}\,(\%) = \frac{V_{Rcc}}{V_{1n}} \cdot 100 = \frac{R_{cc}I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 = \frac{R_{cc}I_{1n}^2}{V_{1n}I_{1n}} \cdot 100 = \frac{P_{cc}}{S_n} \cdot 100 \tag{8}$$

es decir la caída relativa de tensión en la resistencia de cortocircuito es el cociente entre la potencia de cortocircuito y la potencia nominal asignada al transformador. De este modo conociendo el valor de ε_{cc} que se define en la Tabla 3.3, y teniendo en cuenta que las tres caídas relativas de tensión ε_{cc}, ε_{Rcc} y ε_{Xcc} forman un triángulo rectángulo (en el que ε_{cc} es la hipotenusa), se puede calcular ε_{Xcc} de la forma siguiente:

$$\varepsilon_{Xcc} = \sqrt{\varepsilon_{cc}^2 - \varepsilon_{Rcc}^2} \tag{9}$$

es importante que el lector aprenda a utilizar correctamente estas relaciones, ya que le permiten deducir el circuito equivalente a partir de los datos que el constructor muestra en la placa de características del transformador.

Es importante asimismo recordar que la potencia de los transformadores se define en forma de potencia aparente y no como potencia activa, ya que el valor de ésta depende del factor de potencia del tipo de carga que se aplique al transformador. Téngase en cuenta que la potencia aparente junto con las tensiones asignadas al transformador permiten calcular directamente las corrientes de plena carga de la máquina y en función de ellas el constructor determina la sección de los conductores más adecuada para los devanados primario y secundario para que no se produzcan calentamientos indebidos en los mismos que podrían dañar a los aislamientos tal como ya se ha señalado en el Capítulo 2.

Otro aspecto obvio a destacar al hablar de transformadores, es que la máquina es reversible, esto significa que la denominación de devanados primario y secundario es relativa; por ejemplo si se dispone de un transformador de 220/110 V de 10 kVA, se puede conectar el lado de 220 V a una red con este valor de tensión y entonces se producirán 110 V en el otro devanado que hará de secundario, pero también se podría conectar el lado de 110 V a una red con este valor de tensión

y entonces el otro devanado que haría de secundario produciría una tensión de 220 V con el mismo valor de potencia asignada.

Otras dudas que suelen surgir al trabajar con transformadores es la influencia de la frecuencia de la red a la cual se va a conectar la máquina, en el comportamiento de la misma. Para ser más explícitos, supóngase que se dispone de un transformador de 500 kVA, 20 kV/400 V, Dy11, diseñado en Europa para una frecuencia asignada de 50 Hz, ¿en qué condiciones se puede conectar el transformador a una red de 60 Hz? Para contestar a esta pregunta es preciso utilizar las ecuaciones (3.5) y que se repiten a continuación:

$$V_1 = E_1 = 4{,}44\, fN_1\Phi_m \quad ; \quad V_2 = E_2 = 4{,}44\, fN_2\Phi_m \tag{10}$$

De acuerdo con las ecuaciones anteriores, si se mantienen las tensiones en los valores asignados por el fabricante europeo, y el transformador va a funcionar en una red cuya frecuencia es de 60 Hz, el flujo magnético para esta nueva frecuencia, será igual al valor correspondiente a 50 Hz (para el cual fue previamente diseñado el transformador), multiplicado por un factor reductor, que es el cociente de las frecuencias anteriores (50/60). Es decir, la inducción magnética del transformador es menor, por lo que las pérdidas en el hierro correspondientes a la histéresis se reducirán ligeramente (ya que son proporcionales al producto $fB_m^{1,5}$) y se mantendrán constantes las pérdidas por corrientes de Foucault (puesto que son proporcionales al producto $f^2B_m^2$). Por otro lado, al ser menor la inducción magnética, la corriente de imanación disminuirá y, por tanto, el transformador tendrá una corriente de vacío a 60 Hz que será menor que a 50 Hz. Sin embargo al aumentar la frecuencia, serán más elevadas las caídas de tensión en las reactancias del transformador, por lo que éste tendrá una caída de tensión más elevada en cualquier régimen de carga. Teniendo en cuenta que las tensiones de funcionamiento permanecen invariables, la potencia aparente tampoco cambiará. En definitiva no hay ningún inconveniente en que un transformador diseñado para 50 Hz trabaje en una red de 60 Hz, con los mismos valores de tensiones y potencia asignadas, que en nuestro ejemplo son 20 kV/400 V y 500 kVA. Sin embargo lo contrario no es posible, porque si el transformador está diseñado para una red de 60 Hz, para poder trabajar en una red de 50 Hz, y evitar el aumento de la inducción magnética en un factor (60/50) que se deduce de las ecuaciones (10), las tensiones de ambos devanados deberían reducirse en un factor (50/60) y con ello también la potencia aparente que puede suministrar el transformador. En el ejemplo señalado las tensiones deberían ser 16,66 kV/333,33 V y la potencia 416,67 kVA.

Ejemplo de aplicación 3.4

Un transformador monofásico de 250 kVA, 15.000/250 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: Vacío: 250 V, 80 A, 4.000 W (datos medidos en el lado de B.T.). Cortocircuito: 600 V, corriente asignada, 5.000 W (datos medidos en el lado de A.T.). Calcular: a) Parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario; b) corriente de cortocircuito de falta.

Solución

a) Antes de comenzar el problema se ha de observar que los ensayos no han sido determinados en el primario (véase que la prueba de vacío se ha realizado en el lado de B.T., que en este caso es el lado de 250 V, es decir, el secundario). Es preciso **reducir todas las medidas** al lado donde se desea obtener el circuito equivalente (primario); para ello se empleará la técnica expuesta en el epígrafe 3.5. Teniendo en cuenta que la relación de transformación es:

$$m = \frac{15.000}{250} = 60$$

el ensayo de vacío reducido al primario corresponderá a los valores:

$$V_1 = 250 \cdot 60 = 15.000 \text{ V} \quad ; \quad I_0 = 80/60 = 1{,}33 \text{ A} \quad ; \quad 4.000 \text{ W}$$

es decir, la tensión se multiplica por la relación de transformación, mientras que la corriente debe dividirse por esa cantidad, permaneciendo inalterada la potencia.

El f.d.p. en vacío será entonces:

$$\cos \varphi_0 = \frac{4.000}{15.000 \cdot 1{,}33} = 0{,}2$$

que corresponde a un sen $\varphi_0 = 0{,}98$. En consecuencia, y de acuerdo con (3.48), se obtiene:

$$R_{Fe} = \frac{15.000}{1{,}33 \cdot 0{,}2} = 56{,}4 \text{ k}\Omega \quad ; \quad X_\mu = \frac{15.000}{1{,}33 \cdot 0{,}98} = 11{,}5 \text{ k}\Omega$$

Se observa que esta rama paralelo es de gran impedancia, lo que está de acuerdo con la realidad, ya que la corriente de vacío suele estar comprendida en los transformadores industriales entre el 1 y el 8 por 100. En nuestro caso, teniendo en cuenta que la corriente asignada del primario vale:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{V_{1n}} = \frac{250.000}{15.000} = 16{,}67 \text{ A}$$

la corriente de vacío $I_0 = 1{,}33$ A representa un valor relativo:

$$\frac{I_0}{I_{1n}} = \frac{1{,}33}{16{,}67} = 8\,\%$$

del ensayo se deduce también que las pérdidas en el hierro son de 4.000 W.

Para calcular la rama serie del circuito equivalente se ha de emplear el ensayo de cortocircuito, cuyos datos están ya medidos en el lado primario (A.T.); por tanto, estas medidas son de utilización directa.

El f.d.p. de cortocircuito vale:

$$\cos \varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{V_{1cc} I_{1n}} = \frac{5.000}{600 \cdot 16{,}67} = 0{,}5$$

que corresponde a sen $\varphi_{cc} = 0{,}866$. De acuerdo con las expresiones (3.51) y (3.59) se obtiene:

$$R_{cc} = \frac{600}{16{,}67} \cdot 0{,}5 = 18\ \Omega \quad ; \quad X_{cc} = \frac{600}{16{,}67} \cdot 0{,}866 = 31{,}17\ \Omega$$

que son de pequeño valor en comparación con la rama paralelo. El valor relativo de la tensión de cortocircuito, de acuerdo con (3.59), es:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{V_{1cc}}{V_{1n}} \cdot 100 = \frac{600}{15.000} \cdot 100 = 4\,\%$$

b) Al ocurrir una falta de cortocircuito en el transformador, la corriente correspondiente, que aparece en el primario de acuerdo con (3.60), será:

$$I_{1falta} = \frac{100}{4} \cdot 16{,}67 = 416{,}75 \text{ A}$$

que corresponde en el secundario a una intensidad:

$$I_{2falta} = \frac{100}{\varepsilon_{cc}} I_{2n}$$

y como quiera que I_{2n} es igual a:

$$I_{2n} = \frac{S_n}{V_{2n}} = \frac{250.000}{250} = 100 \text{ A}$$

se tendrá:

$$I_{2falta} = \frac{100}{4} \cdot 1.000 = 25 \text{ kA}$$

valores muy superiores a los asignados de la máquina y que habrán de eliminarse por medio de protecciones adecuadas: relés de sobreintensidad, Buchholz, etc., en el menor tiempo posible para no dañar al transformador.

3.7. CAÍDA DE TENSIÓN EN UN TRANSFORMADOR

Considérese un transformador alimentado por su tensión asignada primaria V_{1n}. En vacío, el secundario proporciona una tensión V_{20}; cuando se conecta una carga a la máquina, debido a la impedancia interna del transformador la tensión medida en el secundario ya no será la anterior sino otro valor que denominaremos V_2. La **diferencia aritmética o escalar entre ambas tensiones**:

$$\Delta V_2 = V_{20} - V_2 \tag{3.64}$$

representa la caída de tensión interna del transformador.

Se denomina caída de tensión relativa o simplemente **regulación** a la caída de tensión interna, respecto a la **tensión secundaria en vacío** (asignada), expresada en tanto por ciento y que se designa por el símbolo ε_c (no confundir con ε_{cc} definido en (3.59):

$$\varepsilon_c = \frac{V_{20} - V_2}{V_{20}} \cdot 100\,\%^* \tag{3.65}$$

Al trabajar con el circuito equivalente reducido al primario es más conveniente expresar el cociente anterior en función de las magnitudes primarias; si se multiplica por la relación de transformación m cada término de la ecuación (3.65) y se tiene en cuenta (3.34) y (3.49) resulta:

$$\varepsilon_c = \frac{V_{1n} - V_2'}{V_{1n}} \cdot 100\,\% \tag{3.66}$$

Para calcular esta relación se va a considerar un transformador que lleva una corriente secundaria I_2 con un f.d.p. inductivo (o en retraso) como indica la Figura 3.24. Al aplicar el 2.º lema de Kirchhoff al circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario se obtiene:

$$\mathbf{V}_{1n} = \mathbf{V}_2' + (R_{cc} + jX_{cc})\,\mathbf{I}_2' \tag{3.67}$$

que permite calcular la tensión secundaria reducida en función de la tensión aplicada al transformador y de la corriente secundaria reducida al primario. Obteniendo en la ecuación ante-

* En Europa este cociente define la caída de tensión relativa. En Estados Unidos se emplea el término regulación, y en este caso en el denominador se pone V_2 en vez de V_{20}. Aquí no se hará distinción entre ambas definiciones.

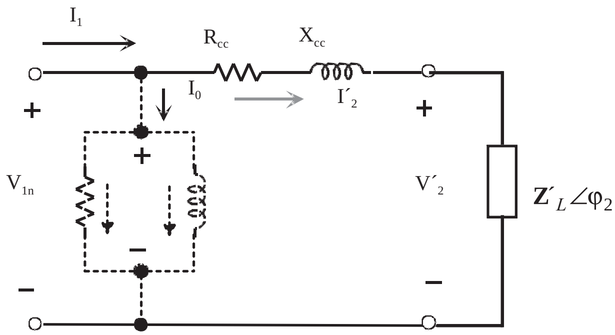


Figura 3.24. Circuito eléctrico equivalente para determinar la caída de tensión de un transformador.

rior la **magnitud** de $\boldsymbol{V}_2'$, la expresión (3.66) permitirá calcular la caída de tensión relativa del transformador.

En la práctica, debido a que la caída de tensión del transformador representa un valor reducido (<10 por 100) respecto a las tensiones puestas en juego, no suele emplearse la ecuación fasorial (3.67) para calcular V_2', sino que se recurre a un método aproximado propuesto a finales del siglo XIX por el profesor Gisbert Kapp. En la Figura 3.25 se muestra el diagrama fasorial correspondiente al circuito equivalente de la Figura 3.24 y que representa en definitiva la ecuación fasorial (3.67), donde se ha tomado la tensión V_2' como referencia y se ha considerado un f.d.p. inductivo (I_2' se retrasa φ_2 respecto de V_2'). Se observa en este gráfico que el numerador de (3.66) viene expresado por:

$$V_{1n} - V_2' = |OS| - |OP| = |PS| \tag{3.68}$$

siendo S el punto de intersección de la recta prolongación de V_2' con la circunferencia trazada con centro en 0 y radio V_{1n}. Como quiera que en los transformadores industriales las caídas de tensión son pequeñas frente a las magnitudes de V_{1n} y V_2', se puede admitir que:

$$V_{1n} - V_2' = |PS| \approx |PR| \tag{3.69}$$

siendo R la proyección del afijo del vector V_1 sobre la recta OS.

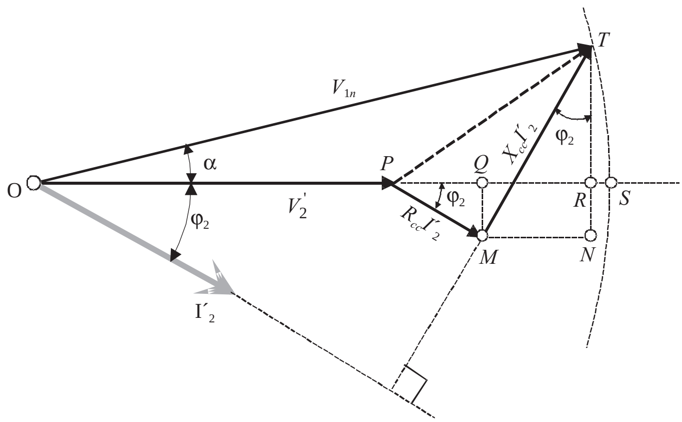


Figura 3.25. Diagrama fasorial de un transformador en carga.

El triángulo de caída de tensión PTM se denomina triángulo de Kapp y sus dimensiones son mucho menores que V_{1n} y V'_2, pero en la Figura 3.25 se ha exagerado su tamaño para mayor claridad del diagrama. Teniendo en cuenta que se cumple:

$$|PR| = |PQ| + |QR| = |PQ| + |MN| \tag{3.70}$$

resulta:

$$|PR| = R_{cc}I'_2 \cos \varphi_2 + X_{cc}I'_2 \text{ sen } \varphi_2 \tag{3.71}$$

por lo que la caída absoluta de tensión tendrá un valor:

$$V_{1n} - V'_2 = R_{cc}I'_2 \cos \varphi_2 + X_{cc}I'_2 \text{ sen } \varphi_2 \tag{3.72}$$

Recuérdese del Capítulo 2, expresión (2.24), que se denomina **índice de carga** C de una máquina eléctrica, al cociente entre la potencia aparente útil y la nominal asignada por el fabricante. En el caso de un transformador la potencia aparente útil S_2 es la potencia aparente que da el secundario, que es el producto de la tensión secundaria (que se considera la tensión asignada secundaria V_{2n}) por la corriente específica secundaria I_2 con la que trabaja y como quiera que la potencia asignada S_{2n} es el producto $V_{2n}I_{2n}$, se deduce que el índice de carga de un transformador se puede expresar de una forma equivalente por los siguientes cocientes:

$$C = \frac{S_2}{S_{2n}} = \frac{V_{2n}I_2}{V_{2n}I_{2n}} = \frac{I_2}{I_{2n}} = \frac{I'_2}{I'_{2n}} \approx \frac{I_1}{I_{1n}} \tag{3.73}$$

es por ello que la expresión (3.72) se puede escribir, en función del índice de carga con el que trabaja el transformador, del siguiente modo:

$$V_{1n} - V'_2 = C\,R_{cc}I'_{2n} \cos \varphi_2 + C\,X_{cc}I'_{2n} \text{ sen } \varphi_2 \tag{3.74}$$

o en valores relativos:

$$\varepsilon_c = \frac{V_{1n} - V'_2}{V_{1n}} \cdot 100\,\% = C\,\varepsilon_{R_{cc}} \cos \varphi_2 + C\,\varepsilon_{X_{cc}} \text{ sen } \varphi_2 \tag{3.75}$$

donde se ha tenido en cuenta, de acuerdo con (3.51) y (3.59), que:

$$\varepsilon_{cc} = \frac{Z_{cc}I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100$$

$$\varepsilon_{R_{cc}} = \frac{R_{cc}I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 \approx \frac{R_{cc}I'_{2n}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad ; \quad \varepsilon_{X_{cc}} = \frac{X_{cc}I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 \approx \frac{X_{cc}I'_{2n}}{V_{1n}} \cdot 100 \tag{3.76}$$

Si el f.d.p. de la carga hubiera sido capacitivo, el lector puede demostrar con una simple composición vectorial que el término $C\,\varepsilon_{xcc}$ sen φ_2 en la expresión (3.75) sería negativo. Este término puede en ocasiones ser superior al otro, resultando caídas de tensión negativas, lo que indica que $V'_2 > V_{1n}$, o de otra forma, que $V_2 > V_{20}$; es decir, aparecen **tensiones en carga superiores a las de vacío**. Este fenómeno se conoce con el nombre de **efecto Ferranti**, por ser el nombre del ingeniero inglés que observó y explicó este resultado por primera vez (véase biografía al final de este capítulo).

AMPLÍE SUS CONOCIMIENTOS

1. Expresiones exactas de las caídas de tensión de un transformador

La expresión (3.71) de la caída de tensión absoluta de un transformador reducido al primario y la relativa correspondiente (3.76) son aproximadas, ya que según (3.69) se ha despreciado el segmento $|RS|$ de la construcción fasorial de tensiones de la Figura 3.25. Se puede obtener un valor más exacto teniendo en cuenta el siguiente desarrollo. Obsérvese en la Figura 3.25 que el segmento despreciado $|RS|$ es igual a:

$$|RS| = |OS| - |OR| = V_{1n} - V_{1n} \cos \alpha = V_{1n}(1 - \cos \alpha) \qquad (1)$$

donde el valor del ángulo α es una magnitud muy reducida. Si se expresa la función coseno en función del seno, se tiene:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \qquad (2)$$

y teniendo en cuenta que si x es una cantidad pequeña, se cumple por desarrollo en serie, la siguiente aproximación:

$$(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} x \qquad (3)$$

la expresión (2) se puede aproximar teniendo en cuenta (3), al hacer $x = \operatorname{sen} \alpha$, por:

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad (4)$$

y al sustituir este valor en la ecuación (1) se obtiene:

$$|RS| = V_{1n}(1 - \cos \alpha) \approx \frac{V_{1n}}{2} \operatorname{sen}^2\alpha \qquad (5)$$

por otro lado, de la construcción gráfica de la Figura 3.25 se puede escribir:

$$|TR| = |TN| - |RN| \qquad (6)$$

y los valores de estos tramos son:

$$|TN| = X_{cc}I_2' \cos \varphi_2 \quad ; \quad |RN| = |QM| = R_{cc}I_2' \operatorname{sen} \varphi_2 \qquad (7)$$

por lo que al sustituir (7) en (6) resulta:

$$|TR| = X_{cc}I_2' \cos \varphi_2 - R_{cc}I_2' \operatorname{sen} \varphi_2 \qquad (8)$$

y teniendo en cuenta en la Figura 3.25 que se cumple:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|TR|}{V_{1n}} \qquad (9)$$

al sustituir (8) en (9) se llega a:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|TR|}{V_{1n}} = \frac{X_{cc}I_2' \cos \varphi_2 - R_{cc}I_2' \operatorname{sen} \varphi_2}{V_{1n}} \qquad (10)$$

y en consecuencia el valor del tramo despreciado (5) vale:

$$|RS| = \frac{V_{1n}}{2} \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{(X_{cc}I_2' \cos \varphi_2 - R_{cc}I_2' \operatorname{sen} \varphi_2)^2}{2V_{1n}} \qquad (11)$$

por consiguiente la expresión exacta de la caída absoluta de tensión de un transformador equivalente a (3.72) será:

$$V_{1n} - V'_2 = R_{cc}I'_2 \cos \varphi_2 + X_{cc}I'_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + \frac{(X_{cc}I'_2 \cos \varphi_2 - R_{cc}I'_2 \operatorname{sen} \varphi_2)^2}{2V_{1n}} \qquad (12)$$

y de un modo análogo la expresión exacta equivalente a la ecuación (3.75) será:

$$\varepsilon_{cc} = C\varepsilon_{Rcc} \cos \varphi_2 + C\varepsilon_{Xcc} \operatorname{sen} \varphi_2 + \frac{1}{200}[C\varepsilon_{Xcc} \cos \varphi_2 - C\varepsilon_{Rcc} \operatorname{sen} \varphi_2]^2 \qquad (13)$$

que son las expresiones que se querían demostrar. El lector puede comprobar que los últimos sumandos de las expresiones (12) y (13) suelen ser muy pequeños y de ahí la gran aproximación de las expresiones (3.72) y (3.75) demostradas en el epígrafe 3.7 que se utilizan en la práctica en el estudio de los transformadores.

2. Comentarios prácticos:

Como ya se ha indicado en el epígrafe 3.6.2, el valor de ε_{cc} en transformadores de menos de 1.000 kVA está comprendido entre el 1 y 6 % y para potencias mayores es del 6 al 13 %. Esto significa de acuerdo con (3.75) que las caídas de tensión en los transformadores de gran potencia son mayores que en los de pequeña potencia. Sin embargo según señala (3.63) cuanto mayor es ε_{cc}, menor es la corriente (relativa) de cortocircuito de falta y por consiguiente menor la potencia de cortocircuito necesaria en el disyuntor de maniobra, lo que reduce extraordinariamente el precio de éste.

En la soldadura eléctrica se construyen transformadores con grandes entrehierros (*shunt magnético*) para aumentar deliberadamente las reactancias de dispersión de los devanados (en definitiva para aumentar ε_{cc}). Es por ello que estos transformadores de soldadura tienen caídas de tensión elevadas. La tensión secundaria en vacío es del orden de 70 a 100 V para que pueda producirse el arco inicial, pero esta tensión cae en carga (cuando se suelda con el electrodo) hasta 15 a 25 V, que es la tensión de mantenimiento del arco. En estos transformadores también se preparan derivaciones en las espiras para modificar la relación de transformación y conseguir diversas corrientes de soldadura.

Ejemplo de aplicación 3.5

Se dispone de un transformador monofásico de 250 kVA, 15.000/250 V, 50 Hz, que tiene unos parámetros R_{cc} = 18 Ω; X_{cc} = 31,17 Ω (véase ejemplo de aplicación 3.4). Calcular: a) Caídas de tensión relativas $\varepsilon_{R_{cc}}$ y $\varepsilon_{X_{cc}}$; b) regulación a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; c) tensión secundaria en el caso anterior; d) regulación a media carga y tensión secundaria correspondiente con f.d.p. 0,6 capacitivo; e) regulación a 3/4 de la plena carga con f.d.p. unidad y tensión secundaria correspondiente. NOTA: La tensión primaria se mantiene constante en todos los casos en 15.000 V.

Solución

a) La corriente asignada primaria del transformador vale:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{V_{1n}} = \frac{250.000}{15.000} = 16,67 \text{ A}$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta (3.76), se tiene:

$$\varepsilon_{R_{cc}} = \frac{18 \cdot 16,67}{15.000} \cdot 100 = 2\,\% \quad ; \quad \varepsilon_{X_{cc}} = \frac{31,17 \cdot 16,67}{15.000} \cdot 100 = 3,46\,\%$$

b) A plena carga $C = 1$, y la regulación de acuerdo con (3.75) será:

$$\varepsilon_c = 1 \cdot 2 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 3{,}46 \cdot 0{,}6 = 3{,}68\,\%$$

c) Teniendo en cuenta que:

$$\varepsilon_c = \frac{V_{1n} - V_2'}{V_{1n}} \cdot 100\,\% = \frac{15.000 - V_2'}{15.000} \cdot 100 = 3{,}68\,\% \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad V_2' = 14.448 \text{ V} \quad \Rightarrow \quad V_2 = 240{,}8 \text{ V}$$

d) A media carga ($C = 1/2$) y para f.d.p. 0,6 capacitivo se cumplirá:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}\,2 \cdot 0{,}6 - \frac{1}{2}\,3{,}46 \cdot 0{,}8 = -0{,}784\,\%$$

que corresponde a $V_2 = 251{,}96$ V, que es superior incluso a la de vacío (efecto Ferranti).

e) Para $C = 3/4$ y f.d.p. unidad resulta:

$$\varepsilon_c = \frac{3}{4}\,2 \cdot 1 + \frac{3}{4}\,3{,}46 \cdot 0 = 1{,}5\,\% \quad \Rightarrow \quad V_2 = 246{,}25 \text{ V}$$

Ejemplo de aplicación 3.6

Un transformador monofásico de 10 kVA, relación 1.000/100 V, tiene los siguientes parámetros de tensiones relativas de cortocircuito: $\varepsilon_{R_{cc}} = 6$ por 100; $\varepsilon_{R_{cc}} = 8$ por 100. En el secundario del transformador se conecta una impedancia de $2 \angle 30°\ \Omega$. 1) Si la tensión secundaria se considera igual a 100 V, ¿cuál será el valor de la tensión primaria necesaria para que la tensión secundaria se mantenga constante al alimentar la carga mencionada? 2) Si la tensión primaria se mantiene constante e igual a 1.000 V, ¿cuál será la tensión que se obtendrá en el secundario al alimentar la carga?

Solución

La corriente primaria asignada del transformador será:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{V_{1n}} = \frac{10.000}{1.000} = 10 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta (3.76) resultará:

$$\varepsilon_{R_{cc}} = \frac{R_{cc} I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad 6 = \frac{R_{cc} 10}{1.000} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad R_{cc} = 6\ \Omega;$$

$$\varepsilon_{X_{cc}} = \frac{X_{cc} I_{1n}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad 8 = \frac{X_{cc} 10}{1.000} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad X_{cc} = 8\ \Omega$$

que determina la impedancia de cortocircuito del transformador reducida al primario.

1) En la Figura 3.26 se muestra el circuito equivalente que define el problema y que es copia del esquema de la Figura 3.24 adaptado a nuestro caso. Al conocerse la magnitud de la tensión secundaria, parece conveniente elegir esta tensión como referencia y así se tiene:

$$\mathbf{V}_2 = 100 \angle 0°$$

Ahora bien, como quiera que la relación de transformación es igual a 1.000/100 = 10, se podrá escribir:

$$\mathbf{V}_2' = m\mathbf{V}_2 = 1.000 \angle 0° \text{ V} \quad ; \quad \mathbf{Z}_L' = m^2\mathbf{Z}_L = 200 \angle 30°\ \Omega$$

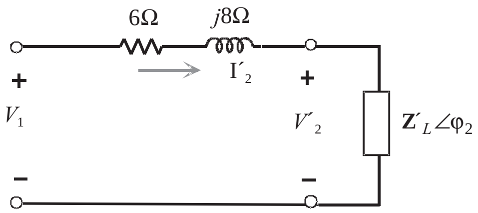


Figura 3.26.

lo que da lugar a una corriente secundaria reducida en el circuito de la Figura 3.26:

$$I_2' = \frac{1.000 \angle 0°}{200 \angle 30°} = 5 \angle -30° \text{ A}$$

y teniendo en cuenta la ecuación (3.67) aplicada a nuestro circuito se tendrá:

$$\mathbf{V}_1 = 1.000 \angle 0° + (6 + j8)\, 5 \angle -30° = 1.046{,}16 \angle 1{,}08°$$

es decir, se requieren 1.046,16 V en el primario para que se mantengan 100 V en el secundario con la carga mencionada. El procedimiento seguido constituye una aplicación directa de la teoría de circuitos al esquema de la Figura 3.24.

Si se aplica el método aproximado representado por una adaptación de la ecuación (3.72) resulta:

$$V_{1n} = V_2' + R_{cc} I_2' \cos \varphi_2 + X_{cc} I_2' \operatorname{sen} \varphi_2$$

donde $\varphi_2 = 30°$ inductivo. Al sustituir los valores correspondientes se obtiene:

$$V_1 = 1.000 + 6 \cdot 5 \cdot 0{,}866 + 8 \cdot 5 \cdot 0{,}5 = 1.045{,}98 \text{ V}$$

que es un valor muy cercano al real obtenido resolviendo directamente la ecuación fasorial.

2) En esta situación se conoce ahora la tensión primaria del esquema de la Figura 3.24, que al tomarla como referencia de fases: $\mathbf{V}_1 = 1.000 \angle 0°$, y al aplicar el 2.º lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 3.24, resulta:

$$\mathbf{I}_2' = \frac{1.000 \angle 0°}{6 + j8 + 200 \angle 30°} = 4{,}78 \angle -31{,}8° \text{ A}$$

Por tanto, la tensión $\mathbf{V}_2'$ que se obtendrá en este circuito será:

$$\mathbf{V}_2' = \mathbf{Z}_L' \cdot \mathbf{I}_2' = 200 \angle 30° \cdot 4{,}78 \angle -31{,}08° = 955{,}85 \angle -1{,}08°$$

que corresponde a un módulo de la tensión secundaria reducida $V_2' = 955{,}85$ V y a una tensión secundaria de:

$$V_2 = \frac{V_2'}{m} = \frac{955{,}85}{10} = 95{,}585 \text{ V}$$

que es la solución pedida. Observará el lector que en este caso resulta más conveniente aplicar la teoría clásica de circuitos para resolver el problema que utilizar métodos aproximados, por no conocer *a priori* la corriente secundaria.

3.8. PÉRDIDAS Y RENDIMIENTO DE UN TRANSFORMADOR

Como ya se ha indicado en el capítulo anterior, una máquina eléctrica presenta unas pérdidas fijas y unas pérdidas variables. Las pérdidas fijas se componen de las pérdidas mecánicas, que

no existen en el transformador (al no poseer esta máquina órganos móviles), y las pérdidas en el hierro. Las pérdidas variables, que cambian según sea el régimen de carga, son debidas a las pérdidas en el cobre. De acuerdo con lo expresado en el epígrafe 3.6, ambas pérdidas pueden obtenerse de los ensayos del transformador. Se debe recordar que se cumplía:

$$P_{Fe} = P_0 \quad ; \quad [P_{cu}]_n = P_{cc} = R_{cc} I'^2_{2n} \tag{3.77}$$

La segunda identidad representa las pérdidas en el cobre a plena carga, puesto que el ensayo de cortocircuito se realiza con corriente asignada. En general, para una corriente secundaria I_2 (o reducida I'_2) se cumplirá:

$$P_{cu} = R_{cc} I'^2_2 \tag{3.78}$$

Teniendo en cuenta la definición (3.73) de índice de carga y la expresión (3.71), la potencia perdida en el cobre en cualquier régimen de carga se podrá expresar como:

$$P_{cu} = R_{cc} I'^2_2 = C^2 P_{cc} \tag{3.79}$$

Como en cualquier máquina eléctrica, el rendimiento es el cociente entre la potencia útil o potencia secundaria y la potencia total o de entrada en el primario, es decir:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_p} \tag{3.80}$$

donde P_p representa la potencia perdida. Si el secundario suministra una corriente I_2 a la tensión V_2 con f.d.p. cos φ_2, se tendrá:

$$P_2 = V_2 I_2 \cos\varphi_2 = C V_2 I_{2n} \cos\varphi_2 \quad ; \quad P_p = P_{Fe} + P_{cu} = P_0 + C^2 P_{cc} \tag{3.81}$$

donde se ha hecho uso de las relaciones (3.73), (3.77) y (3.79); por consiguiente, el rendimiento del transformador resulta ser:

$$\eta = \frac{C V_2 I_{2n} \cos\varphi_2}{C V_2 I_{2n} \cos\varphi_2 + P_0 + C^2 P_{cc}}$$

donde el producto $V_2 I_{2n}$ representa la potencia asignada del transformador en kVA. Se observa que el rendimiento empeora cuanto menor es el f.d.p. de la carga y cuanto menor es el índice de carga. Como ya se ha demostrado en el capítulo anterior, el rendimiento es máximo, para una determinada carga para la cual coinciden las pérdidas fijas y variables, es decir, cuando se cumple:

$$P_0 = C^2_{opt} P_{cc} \tag{3.83}$$

resultando un índice de carga óptimo al cual se obtiene el rendimiento máximo dado por:

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{cc}}} \tag{3.84}$$

Si el transformador trabajara siempre a plena carga convendría que el índice anterior fuera igual a la unidad, de este modo la máquina trabajaría con máximo rendimiento; sin embargo, lo normal es que un transformador trabaje con cargas variables, y esto hace que en la práctica se diseñen estas máquinas con un índice de carga comprendido entre 0,5 y 0,7 para los grandes transformadores de las centrales eléctricas y entre 0,3 y 0,5 para los transformadores de distribución de pequeña potencia.

Ejemplo de aplicación 3.7

Se dispone de un transformador monofásico de 250 kVA, 15.000/250 V, 50 Hz, que tiene unas pérdidas en el hierro de 4.000 W y unas pérdidas en el cobre a plena carga de 5.000 W. Calcular: a) Rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8; b) rendimiento a media carga con f.d.p. unidad; c) potencia de máximo rendimiento; d) rendimiento máximo para f.d.p. 0.9.

Solución

a) De los datos anteriores se deduce:

$$P_0 = P_{Fe} = 4 \text{ kW} \quad ; \quad [P_{cu}]_n = P_{cc} = 5 \text{ kW}$$

A plena carga, el índice C es igual a 1, y el rendimiento del transformador, teniendo en cuenta (3.82), vale:

$$\eta = \frac{1.250 \cdot 0{,}8}{1.250 \cdot 0{,}8 + 4 + 5} = 95{,}7\,\%$$

b) A media carga (C = 1/2) se tendrá:

$$\eta = \frac{(1/2) \cdot 250 \cdot 1}{(1/2)250 \cdot 1 + 4 + (1/2)^2 \cdot 5} = 96\,\%$$

Se observa que el rendimiento en este caso es mayor que en el caso anterior debido a que ahora trabaja la máquina con mejor f.d.p., pese a que el transformador funciona a media carga.

c) El índice de carga para el que se obtiene máximo rendimiento es, de acuerdo con (3.84):

$$C_{opt} = \sqrt{\frac{4}{5}} = 0{,}894 \quad \Rightarrow \quad S_{\eta\text{máx}} = 0{,}894 \cdot 250 = 223{,}6 \text{ kVA}$$

d) El rendimiento máximo será entonces igual a:

$$S_{\eta\text{máx}} = \frac{0{,}894 \cdot 250 \cdot 0{,}9}{0{,}894 \cdot 250 \cdot 0{,}9 + 4 + 0{,}894^2 \cdot 5} = 96{,}2\,\%$$

El rendimiento *maximun maximorum* se cumplirá para el índice de carga anterior, con f.d.p. unidad; el lector puede demostrar que es igual a 96,55 %.

3.9. CORRIENTE DE EXCITACIÓN O DE VACÍO DE UN TRANSFORMADOR. ARMÓNICOS DE LA CORRIENTE DE VACÍO

Cuando un transformador trabaja en vacío ($i_2 = 0$), la corriente que absorbe del primario i_0 se denomina corriente de vacío y es análoga a la corriente de excitación de una bobina con núcleo de hierro, que ya se estudió en el epígrafe 1.7.3 del Capítulo 1. En la Figura 3.27 se muestra la forma de onda de i_0, que tiene una forma de onda acampanada (en el supuesto de que el flujo magnético en el núcleo esté por encima del codo de la curva de imanación). Un análisis de Fourier de esta corriente demuestra que contiene armónicos de magnitud apreciable. En la Figura 3.27 se han representado: la onda fundamental o de primer armónico y de la de tercer armónico. En un caso real el reparto de armónicos es aproximadamente el siguiente: 45 por 100 del tercero, 15 por 100 del quinto, 3 por 100 del séptimo y porcentajes menores para armónicos de mayor orden. Los valores anteriores se refieren a porcentajes respecto a la onda sinusoidal equivalente a la corriente de excitación total. En un análisis simplificado se puede considerar la

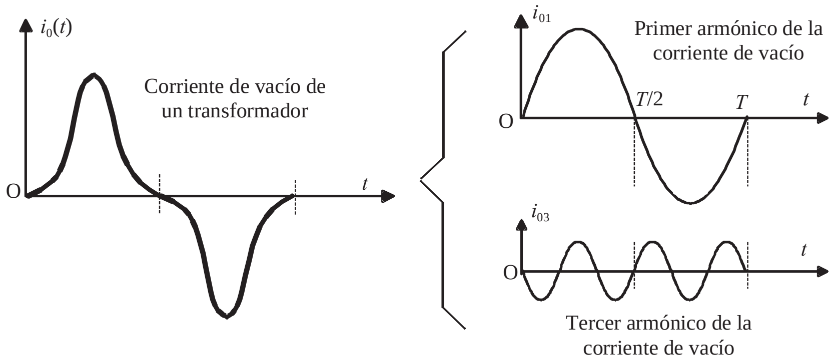


Figura 3.27. Corriente de vacío de un transformador y armónicos primero y tercero.

existencia de un fundamental de corriente a 50 Hz y un tercer armónico a 150 Hz. La circulación en líneas aéreas de un tercer armónico de corriente tiene el inconveniente de que siendo audible la frecuencia de 150 Hz, puede interferir por inducción mutua con líneas telefónicas paralelas cercanas. Otro inconveniente de la circulación de terceros armónicos de corriente por las líneas aéreas y sistemas eléctricos en general es que deforman las tensiones haciéndolas perder su carácter sinusoidal. Téngase en cuenta que aunque el generador de principio de línea suministre una tensión sinusoidal, las corrientes producen caídas de tensión y las componentes fundamentales (a 50 Hz) seguirán produciendo al final de línea un sistema simétrico de tensiones; sin embargo, los terceros armónicos provocarán caídas que deformarán la forma de las tensiones a finales de línea. En el epígrafe 3.11.2 se analizarán los efectos de los armónicos en la transformación de sistemas trifásicos.

3.10. CORRIENTE DE CONEXIÓN DE UN TRANSFORMADOR

La corriente de vacío i_0 analizada en el epígrafe anterior representa en **régimen permanente** un valor del orden de 5 a 8 por 100 de la corriente asignada del transformador, con una inducción máxima que se sitúa en el codo de la curva de imanación del material magnético con el que está construido el núcleo, y que hoy día para chapas de grano orientado se sitúa en un valor cercano a 1,4 Teslas (14.000 gauss).

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que la aplicación brusca de la tensión asignada V_{1n} a un transformador da lugar a un período transitorio en el que la corriente (supóngase por sencillez que el transformador está en vacío) puede alcanzar varias veces la asignada y que por ello en ocasiones se ha confundido incluso con una corriente de cortocircuito. Vamos a analizar este fenómeno, en el que influye tanto el instante de la conexión como el flujo remanente existente en el núcleo.

Vamos a considerar una tensión aplicada al transformador de la forma:

$$v_1(t) = \sqrt{2}\, V_1 \cos(\omega t + \alpha) \tag{3.85}$$

La magnitud máxima a la que llegará el flujo en el primer semiciclo de la tensión aplicada dependerá del ángulo de fase de la misma en el instante de la conexión. Si la tensión inicial es, por ejemplo, de la forma:

$$v_1(t) = \sqrt{2}\, V_1 \cos \omega t \tag{3.86}$$

y se considera el transformador ideal, se cumplirá:

$$v_1(t) = N_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = \sqrt{2}\, V_1 \cos \omega t \tag{3.87}$$

que al integrar nos da:

$$\Phi(t) = \sqrt{2}\, \frac{V_1 \operatorname{sen} \omega t}{N_1 \omega} + C_1 \tag{3.88}$$

donde C_1 indica la constante de integración. Si se supone en un principio que el flujo inicial es cero, la constante anterior será igual a cero, por lo que según (3.88) el flujo correspondiente será ya el de régimen permanente y no causará problemas.

Sin embargo, si el instante de la conexión corresponde al momento en el que la tensión aplicada (3.85) tenga una fase $\alpha = -90°$, es decir:

$$v_1(t) = \sqrt{2}\, V_1 \cos(\omega t - 90°) = \sqrt{2}\, V_1 \operatorname{sen} \omega t \tag{3.89}$$

el flujo resultante será ahora igual a:

$$\Phi(t) = -\sqrt{2}\, \frac{V_1}{N_1 \omega} \cos \omega t + C_2 = -\Phi_m \cos \omega t + C_2 \tag{3.90}$$

Si en $t = 0$, se tiene un flujo nulo, la ecuación anterior nos indica que $C_2 = \Phi_m$, por lo que el flujo instantáneo valdrá:

$$\Phi(t) = \Phi_m (1 - \cos \omega t) \tag{3.91}$$

lo cual indica que para $\omega t = 180°$ (final del primer semiciclo) se obtiene un flujo:

$$\Phi = \Phi_m (1 - \cos 180°) = 2\Phi_m \tag{3.92}$$

que es doble que el flujo máximo de régimen permanente. En la práctica, si se considera un flujo remanente en el núcleo que puede llegar a $0{,}5\Phi_m$ se puede alcanzar flujos instantáneos:

$$2\Phi_m + \Phi_r = 2{,}5\Phi_m \tag{3.93}$$

lo que se traduce, si se tiene en cuenta la curva de imanación del material, en una corriente de excitación que puede llegar a valer 100 veces la corriente de vacío de régimen permanente. Si se considera que esta última corriente es del orden del 5 al 8 por 100 de la corriente asignada, se alcanzarán corrientes instantáneas de 5 a 8 veces la asignada, lo que provocará fuerzas electromagnéticas en los devanados del orden de 5^2 a 8^2, es decir, de 25 a 64 veces las del régimen de plena carga. Debido al valor no nulo de la resistencia del devanado primario, la corriente transitoria de conexión se amortigua rápidamente al cabo de unos pocos ciclos*, y es por ello que al tratarse de corrientes de poca duración se tengan que utilizar protecciones que no actúen rápidamente, evitando la desconexión del disyuntor o interruptor automático principal. Es importante que el lector recuerde bien este fenómeno porque aunque la corriente de conexión no presenta peligro directo para el transformador, puede en ocasiones deconectarlo de la red, lo que en algunos casos suele ser motivo de confusión, ya que el operario cree que hay alguna avería en la instalación y tiene dudas al efectuar nuevamente el reenganche del transformador.

* El ritmo de amortiguamiento es función del cociente R_1/L_{d1} y es más rápido en los primeros ciclos que en los últimos, debido a que la saturación del núcleo hace que la inductancia no sea constante en el período transitorio.

3.11. TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS

3.11.1. Generalidades

La transformación de tensiones y corrientes en los sistemas trifásicos puede realizarse de dos maneras distintas. La primera de ellas consiste en emplear un transformador monofásico en cada una de las tres fases, de tal manera que se formen circuitos magnéticos independientes. Este sistema es poco económico, ya que emplea mucho volumen de hierro, a la par que es poco práctico por ser necesario incorporar tres unidades idénticas para realizar la transformación total. La segunda manera consiste en emplear un solo núcleo magnético en el que se incorporan todos los devanados necesarios. En este caso, el sistema está formado por tres columnas iguales sobre las que se arrollan las espiras que constituyen los bobinados primario y secundario de cada fase, como indica la Figura 3.28*a*. Se puede considerar que este núcleo trifásico es el resultado de la unión de tres sistemas monofásicos de acuerdo con el proceso de simplificación que se observa en las Figuras 3.28*b*, *c* y *d*, donde para dar sencillez a la figura se ha prescindido de los devanados correspondientes. Si el sistema de alimentación es trifásico equilibrado, los tres flujos Φ_a, Φ_b y Φ_c son iguales en magnitud, estando desfasados 120° en el tiempo, resultando un flujo total Φ_T en la columna central cuyo valor es cero, y se puede suprimir por tanto esta columna de retorno, como muestra la Figura 3.28*d*. El sistema resultante *a*) se obtiene como proyección sobre un mismo plano del núcleo *d*); tal disposición es la que se utiliza en la práctica pese a que presenta una asimetría en la columna central, merced al menor recorrido del flujo. Debido a ello la columna central *B* (Figura 3.28*a*) tiene menos reluctancia magnética que las columnas laterales *A* y *C*, lo que provoca una asimetría en las corrientes de vacío, que se hace más acusada en los transformadores trifásicos de pequeña potencia, donde las culatas desempeñan un papel relativamente importante; en estos casos las corrientes de vacío de las fases correspondientes a las columnas laterales *A* y *C* pueden tener una corriente entre 1,2 y 1,5 veces la corriente que lleva la fase de la columna central *B*. Es por ello que cuando se ensayan transformadores trifásicos en vacío deben medirse las tres corrientes primarias y tomar como valor medio de I_0 la media aritmética de las corrientes en las tres fases. Como quiera sin embargo que la corriente de vacío es de pequeño valor (del orden del 3 al 8% de la nominal primaria), el efecto de la asimetría de las corrientes de vacío

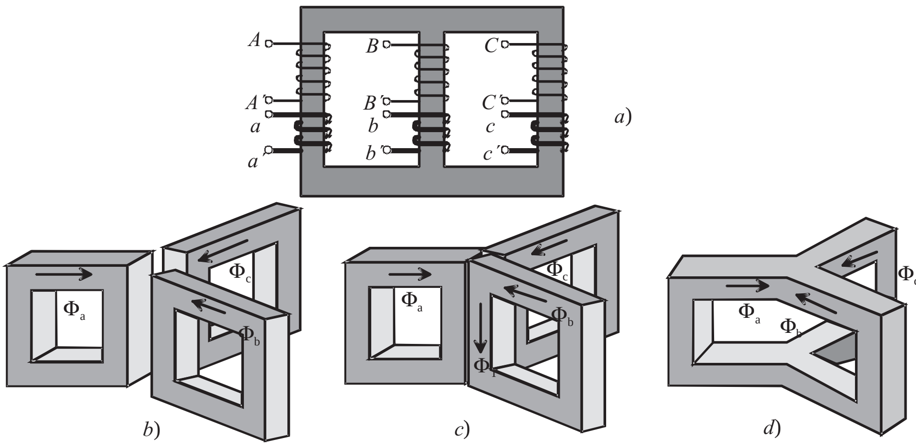


Figura 3.28. Circuito magnético de un trafo trifásico y su génesis a partir de tres trafos monofásicos.

cuando el transformador trabaja en carga es prácticamente despreciable, por lo que no se aprecian asimetrías de las corrientes en esta situación.

En el estudio del transformador trifásico **hay que considerar cada columna como un transformador monofásico**, de tal forma que los ensayos, esquemas equivalentes, etc., deben expresarse en valores **simples**, pudiéndose aplicar entonces las mismas técnicas de análisis empleadas en el estudio de los transformadores monofásicos. Por ejemplo, la relación de transformación será el cociente entre el número de espiras **por fase** del primario y el número de espiras **por fase** del secundario, que coincidirá con la relación entre las **f.e.m.s. por fase entre primario y secundario**.

La designación de los terminales de los devanados se hará siguiendo las recomendaciones expresadas en los epígrafes 3.2 y 3.3, empleando las letras *A*, *B*, *C* para denominar los principios de las bobinas del devanado de A.T., que se supondrá situado en el primario; las mismas letras en minúscula, *a*, *b*, *c*, indicarán los terminales de la misma polaridad instantánea en el devanado secundario. Los demás terminales se expresarán con las mismas letras con tilde, como se muestra en la Figura 3.28*a*.

Las formas que más frecuentemente se emplean para realizar las conexiones de los arrollamientos son: en **estrella** (con o sin hilo neutro), en **triángulo** y en **zig-zag**. En la conexión en estrella se unen en un mismo punto los tres extremos de los arrollamientos que poseen la misma polaridad, existiendo dos formas básicas según se unan los terminales *A*, *B*, *C* o *A*′, *B*′, *C*′ (*a*, *b*, *c* o *a*′, *b*′, *c*′ para el secundario). En la conexión en triángulo se unen sucesivamente los extremos de polaridad opuesta de cada dos devanados hasta cerrar el circuito; según sea el orden de sucesión en que se realiza esta operación, puede existir dos formas diferentes. La conexión en zig-zag, que en la práctica sólo se emplea en el lado de menor tensión, consiste en subdividir en dos partes iguales los devanados secundarios, una parte se conecta en estrella y luego cada rama se une en serie con las bobinas invertidas de las fases adyacentes, siguiendo un determinado orden cíclico. Estas tres formas básicas se muestran en la Figura 3.29 (sólo para el devanado de B.T.).

Las diferentes conexiones se designan con letras, de acuerdo a la siguiente nomenclatura:

Estrella:	Y (en el lado de A.T.),	y (en el lado de B.T.).
Triángulo:	D (”),	d (”).
Zig-zag:	Z (”),	z (”).

Dependiendo de los tipos de conexión de los devanados de un transformador, pueden aparecer unas diferencias de fase entre las tensiones compuestas de primario y secundario. Para que esta fase quede unívocamente determinada se supondrá que el transformador se alimenta por

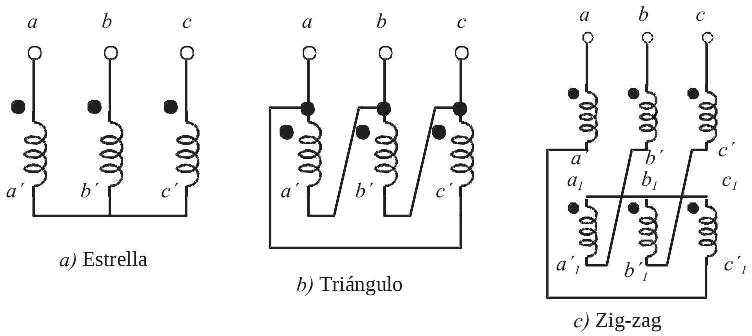


Figura 3.29. Tipos de conexiones de los transformadores trifásicos.

medio de un sistema equilibrado de tensiones de sentido directo RST (es decir, ABC), de tal forma que se considerarán ángulos positivos los de retraso del lado de menor tensión respecto al devanado de tensión más elevada. Estos ángulos no se miden en grados, sino en múltiplos de $30^\circ = 2\pi/12$ radianes, lo que permite identificarlos con los que forman entre sí las agujas de un reloj cuando marca una hora exacta, y esto da lugar al llamado «**índice horario**» del transformador; por ejemplo, un índice igual a 5 significa un retraso de $5 \cdot 30° = 150^\circ$ de la tensión menor respecto a la superior. El proceso a seguir para determinar el índice horario es el siguiente:

1. Se representan las f.e.m.s. **simples** del devanado primario, de tal forma que el terminal *A* se sitúa en la parte superior del diagrama (coincidiendo con el número 12 de un reloj imaginario que se colocará superpuesto al esquema vectorial).
2. Se representan las f.e.m.s. **simples** secundarias, y para ello debe tenerse en cuenta que los devanados primario y secundario situados en la misma columna producen f.e.m.s en fase (para los bornes homólogos).
3. Se superponen ambos diagramas. El ángulo horario es el que forman dos vectores, uno que pasa por el punto *A* y el centro del diagrama y el otro el que pasa por *a* y ese mismo centro*. De aquí se deduce el índice horario.

Para ver de una forma práctica el desarrollo anterior, se va a considerar el cálculo del índice horario del transformador triángulo-estrella indicado en la parte izquierda de la Figura 3.30 donde se muestra la tapa de bornes junto con una representación esquemática de las bobinas abatidas sobre el plano de aquéllas (mirando el transformador por la parte de A.T., los bornes se suceden de izquierda a derecha en el sentido *ABC*).

Primeramente se dibujan las f.e.m.s. simples del primario, colocando el terminal A en la parte superior (Fig. 3.30*a*). Se tendrá un triángulo *ABC*, donde se señala en cada lado los terminales de la bobina a que corresponden y el orden en que se suceden. Se representan

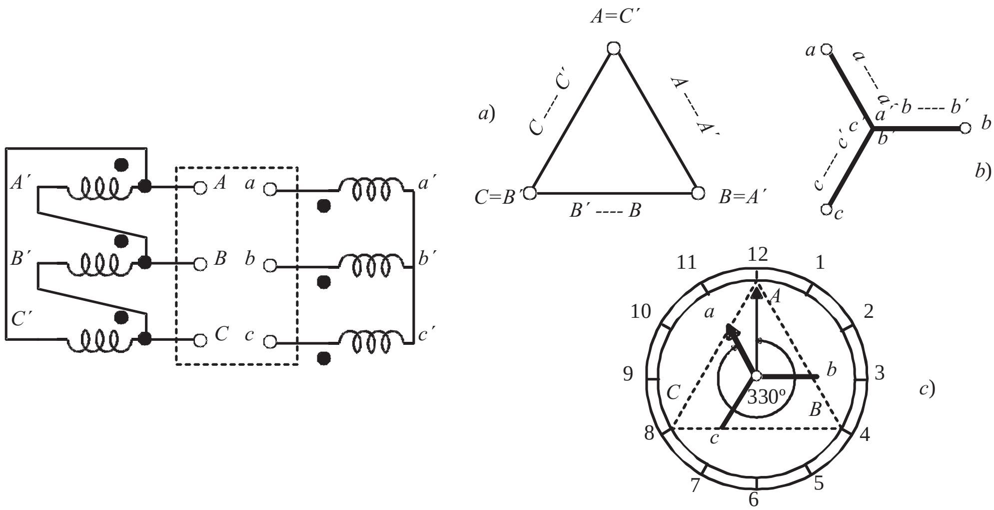
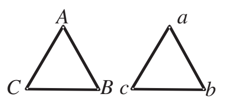
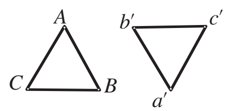
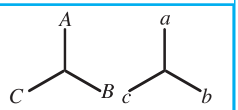
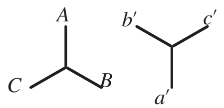
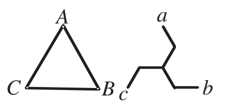
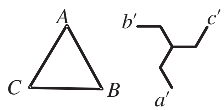
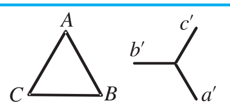
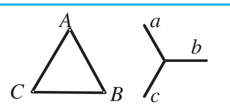
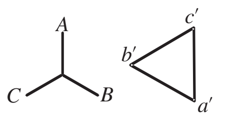
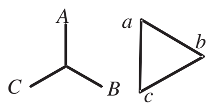
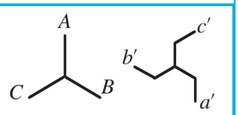
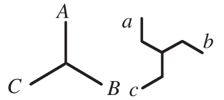


Figura 3.30. Determinación del índice horario de un transformador Dy.

* El lector puede demostrar fácilmente que este ángulo coincide con el que forman las tensiones compuestas. Este procedimiento evita complicaciones gráficas en el diagrama.

luego las f.e.m.s. secundarias (Fig. 3.30*b*), teniendo en cuenta que los arrollamientos de la misma columna están en fase, y así se observa que *a*-*a*′ es paralela a *A*-*A*′, *b*-*b*′ a *B*-*B*′ y *c*-*c*′ a *C*-*C*′. Al superponer ambos diagramas se obtiene la Figura 3.30*c*. El ángulo horario es el que forman los vectores 0*a* y 0*A* (siendo 0 el centro del diagrama), y se observa que el ángulo es de 330° de retraso de la B.T. frente a la A.T., es decir, 330/30 = 11, índice horario que se puede leer directamente en el reloj imaginario que se ha dibujado en la misma figura. La forma simbólica que se emplearía para definir este transformador sería Dy11, que significa: *a*) primario conectado en triángulo (A.T.), *b*) secundario conectado en estrella (B.T.), *c*) el índice horario es igual a 11. Dependiendo de la forma en la que se efectúan las conexiones en primario y secundario y del sentido de sucesión de fases de la red, se pueden obtener en el transformador anterior los índices horarios: 1, 5, 7, 11. Si se introducen además arrollamientos en zig-zag, se encuentran un gran número de combinaciones posibles. En la práctica se utiliza un número limitado de acoplamientos que se dan en la Tabla 3.4, estando agrupados según sea el valor del índice horario. La importancia de este cuadro se justificará en el epígrafe 3.12. En la tabla se han recuadrado los tipos de conexión que se prefieren en el diseño de nuevas instalaciones.

Tabla 3.4. Tipos de acoplamientos de transformadores trifásicos

Índice horario (grados)	*Símbolo acoplam.*	*Diagrama fasorial* *A.T.* *B.T.*	*Índice horario (grados)*	*Símbolo acoplam.*	*Diagrama fasorial* *A.T.* *B.T.*
0 (0°)	Dd0		6 (180°)	Dd6	
	Yy0			Yy6	
	Dz0			Dz6	
5 (150°)	Dy5		11 (330°)	Dy11	
	Yd5			Yd11	
	Yz5			Yz11	

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Experiencia de laboratorio: *Si se dispone de un transformador trifásico con todas las bobinas de primario y secundario independientes se puede preparar una práctica* curiosa *que suele sorprender a los estudiantes. Supóngase que para mayor sencillez se utiliza un transformador trifásico de relación unidad como el mostrado en la Figura 3.31. A continuación debe prepararse el montaje que se señala en la figura; es decir, conectar a cada bobina secundaria una lámpara incandescente de la potencia adecuada al transformador (por ejemplo, supóngase que las lámparas son de 220 V, 60 W). Dejar abierto el devanado primario AA′, conectar un interruptor en paralelo con el devanado primario CC′ y alimentar el transformador con una red monofásica de 220 V que se aplica al devanado central primario BB′.*

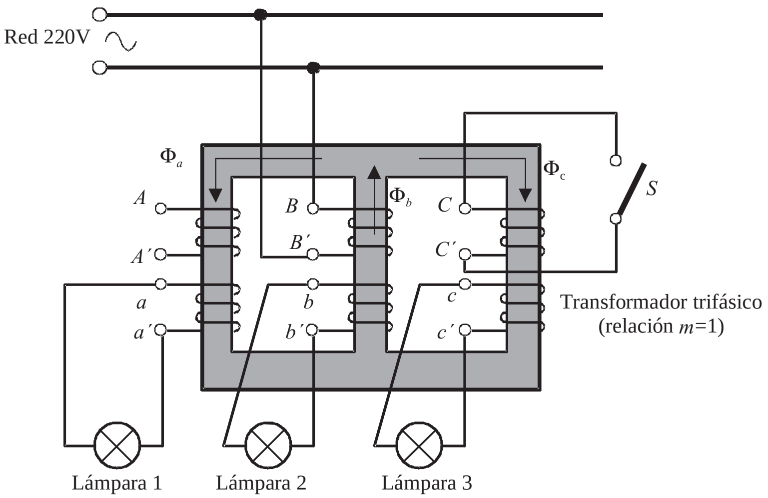


Figura 3.31. Experiencia práctica.

Primera experiencia: *¿Qué sucede con las lámparas si el interruptor S está abierto?*

Solución: *Se observa que la lámpara 2 brilla con su flujo luminoso normal (plena luz), mientras que las lámparas 1 y 3 están a* media luz. *El resultado se explica debido a que los flujos magnéticos en las ramas laterales prácticamente son la mitad del que existe en la rama central, y por consiguiente en los devanados secundarios aa′ y cc′ se inducen unas tensiones de 110 V mientras que en el bb′ la tensión inducida es de 220 V. De ahí que las lámparas 1 y 3 estén sometidas a una tensión mitad de su valor asignado mientras que la lámpara 2 trabaja a su tensión asignada.*

Segunda experiencia: *¿Qué sucede con las lámparas al cerrar el interruptor S*?

Solución: *Se observará que la lámpara 1 que estaba antes a media luz se enciende con su flujo luminoso normal* (plena luz). *La lámpara 2 sigue igual que antes, es decir, a plena luz,* mientras que la lámpara 3 se apaga. *La explicación de esta experiencia es la siguiente: al cortocircuitar el devanado CC′ (¡no preocuparse, no aparecen corrientes elevadas al realizar esta operación!) obligamos a que la tensión en este devanado sea igual a cero voltios, por lo que* **se anula** *el flujo en esta columna (véase simplemente las relaciones (3.5) que relacionan flujo con la f.e.m. inducida) y como consecuencia de ello el flujo central, que antes se repartía por igual*

entre las columnas laterales, está obligado a pasar solamente por la columna de la izquierda y de este modo las tensiones inducidas en los devanados aa′ y bb′ serán iguales entre sí e iguales a 220 V, mientras que la tensión inducida en el devanado cc′ será de cero voltios. En definitiva, al cortocircuitar un devanado se produce la expulsión del flujo que pasa por él, por lo que el flujo magnético debe buscar otro camino de cierre.

Este tipo de práctica se puede completar practicando entrehierros en las columnas. Por ejemplo, si en el caso de la Figura 3.31 se tiene un entrehierro en la columna de la izquierda, estando el interruptor S abierto, las lámparas 2 y 3 funcionarán prácticamente con tensión asignada (por consiguiente, a plena luz), *mientras que la 2 estará casi apagada, ya que por esta columna no pasará casi flujo magnético debido a que su reluctancia magnética es elevada por existir un entrehierro en aquélla. Sin embargo, al cerrar el interruptor S, la lámpara 3 se apagará porque se anula el flujo de su columna; es decir, en esta situación el flujo de la columna central se cerrará ahora por la columna de la izquierda y la lámpara 1 que estaba apagada se encenderá.*

*3.11.2. Armónicos en las corrientes de excitación de transformadores trifásicos

a) Bancos trifásicos a base de transformadores monofásicos

En el epígrafe 3.9 se demostró que si se aplica una tensión sinusoidal a un transformador monofásico y el núcleo trabaja en el codo de la curva de imanación, se obtiene una corriente de excitación de forma acampanada con un contenido de armónicos impares. Aparte del armónico fundamental, el más importante es el tercero. De este modo la corriente de vacío del transformador responde a la forma simplificada siguiente:

$$i_0 = i_{0,1} + i_{0,3} = \sqrt{2}\, I_{0,1} \cos(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}\, I_{0,3} \cos(3\omega t + \varphi_3) \tag{3.94}$$

Si se considera un banco trifásico a base de tres transformadores monofásicos, como se muestra en la Figura 3.32, donde se han conectado los devanados en estrella tanto en el lado primario como en el secundario, las corrientes de vacío de cada uno de los transformadores, de acuerdo con (3.94), serán:

$$\begin{aligned} i_{0,I} &= \sqrt{2}\, I_{0,1,I} \cos(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}\, I_{0,3,I} \cos(3\omega t + \varphi_3) \\ i_{0,II} &= \sqrt{2}\, I_{0,1,II} \cos(\omega t + \varphi_1 - 120°) + \sqrt{2}\, I_{0,3,II} \cos(3\omega t + \varphi_3 - 3 \cdot 120°) \\ i_{0,III} &= \sqrt{2}\, I_{0,1,III} \cos(\omega t + \varphi_1 + 120°) + \sqrt{2}\, I_{0,3,III} \cos(3\omega t + \varphi_3 + 3 \cdot 120°) \end{aligned} \tag{3.95}$$

Se observa en las expresiones anteriores que las componentes fundamentales de las corrientes de vacío de cada transformador forman un sistema trifásico equilibrado, mientras que las corrientes de tercer armónico están en fase. En la Figura 3.33 se muestra de un modo gráfico este hecho. Si el primario del grupo transformador dispone de hilo neutro, la aplicación del primer lema de Kirchhoff al nudo N' de la Figura 3.32 nos indica que por el hilo neutro retorna una corriente:

$$i_{0,N} = 3[\sqrt{2}\, I_{0,3} \cos(\omega t + \varphi_3)] = 3\, i_{0,3} \tag{3.96}$$

es decir, circula una corriente de tercer armónico que es el triple del valor correspondiente a cada uno de los transformadores (por simetría, los componentes fundamentales dan una suma nula).

Como ya se indicó en el epígrafe 3.9, la circulación de corrientes armónicas en las líneas aéreas producen interferencias en líneas telefónicas paralelas cercanas, debido a que su frecuencia de 150 Hz está en el rango audible del oído humano. Por otra parte, la circulación de los terceros armónicos de

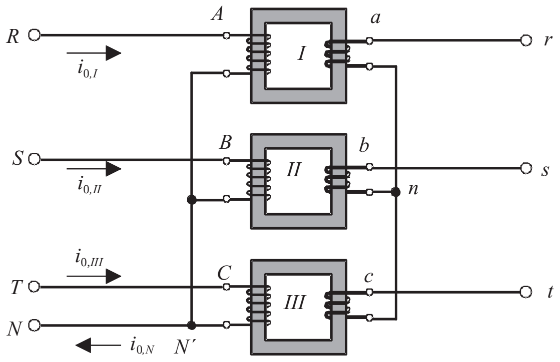


Figura 3.32. Banco trifásico a base de tres transformadores monofásicos.

corriente por las líneas aéreas deforman las tensiones que dejan de ser sinusoidales; téngase en cuenta que aunque al principio de una línea trifásica se tenga un sistema equilibrado y sinusoidal de tensiones, las componentes fundamentales (primer armónico de 50 Hz) de las corrientes producirán al final de la línea un sistema de tensiones simétrico. Sin embargo, los terceros armónicos de corriente producen caídas de tensión que van en fase entre sí, dando lugar a una deformación y desequilibrio de las tensiones que resultarán al final de la línea. ***Es por este motivo por lo que en las líneas de A.T. no se suele disponer de neutro de retorno.***

Ahora bien, si se considera anulado el conductor neutro en el esquema de la Figura 3.32, la aplicación del primer lema de Kirchhoff al nudo N' de esta figura exigirá el que la suma de las tres corrientes mostradas en las ecuaciones (3.95) sea igual a cero. En forma fasorial esta suma es:

$$(\mathbf{I}_{0,1,I} + \mathbf{I}_{0,3,I}) + (\mathbf{I}_{0,1,II} + \mathbf{I}_{0,3,II}) + (\mathbf{I}_{0,1,III} + \mathbf{I}_{0,3,III}) = 0 \tag{3.97}$$

es decir:

$$(\mathbf{I}_{0,1,I} + \mathbf{I}_{0,1,II} + \mathbf{I}_{0,1,III}) + (\mathbf{I}_{0,3,I} + \mathbf{I}_{0,3,II} + \mathbf{I}_{0,3,III}) = 0 \tag{3.98}$$

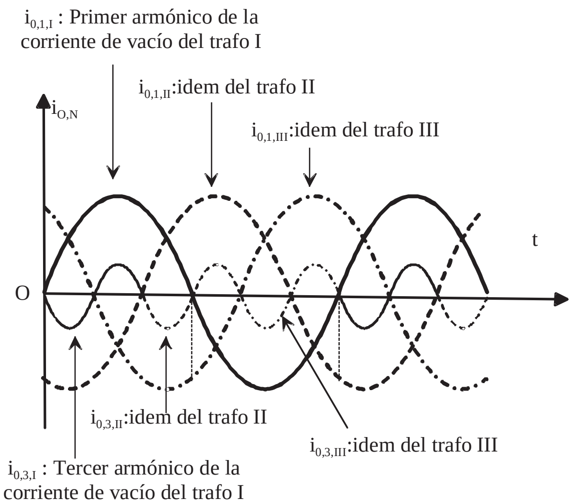


Figura 3.33. Armónicos principal y tercero de la bancada trifásica de la Figura 3.32.

El primer paréntesis da un valor nulo, puesto que representa la suma de las componentes fundamentales de las corrientes de vacío, que de acuerdo con (3.95) constituyen un sistema simétrico equilibrado. Para que se anule el segundo paréntesis de (3.98) será preciso que se anulen las componentes de corriente de tercer armónico, es decir, se cumplirá:

$$\mathbf{I}_{0,3,I} = \mathbf{I}_{0,3,II} = \mathbf{I}_{0,3,III} = 0 \tag{3.99}$$

La no existencia de terceros armónicos en la corriente de excitación indica que la corriente se hace sinusoidal, lo que obligará a que el flujo magnético pierda su carácter sinusoidal. La Figura 3.34 justifica gráficamente este hecho. La composición gráfica es inversa a la realizada en el epígrafe 1.7.3, en la que se demostraba la deformación en la corriente de excitación si se partía de un flujo sinusoidal. En el caso de la Figura 3.34, al partir de una i_0 sinusoidal (es decir, una f.m.m. de excitación sinusoidal), y teniendo en cuenta el carácter no lineal de la curva de imanación, dará lugar a un flujo no sinusoidal en cada uno de los núcleos del banco transformador de la Figura 3.32. Como se muestra en la Figura 3.34, la nueva onda de flujo puede descomponerse en una fundamental más un tercer armónico (se desprecian los armónicos de orden superior) y como consecuencia de este hecho, al no ser sinusoidales los flujos, tampoco lo serán las f.e.m.s. inducidas en los secundarios, lo que equivale a decir que el banco trifásico se ha convertido en un generador de armónicos de tensión. Estas f.e.m.s. serán, de un modo análogo a (3.95), de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e_I &= e_{1,I} + e_{3,I} = \sqrt{2}\, E_{1,I} \cos(\omega t + \alpha_1) + \sqrt{2}\, E_{3,I} \cos(3\omega t + \alpha_3) \\ e_{II} &= e_{1,II} + e_{3,II} = \sqrt{2}\, E_{1,II} \cos(\omega t + \alpha_1 - 120°) + \sqrt{2}\, E_{3,II} \cos(3\omega t + \alpha_3) \\ e_{III} &= e_{1,III} + e_{3,III} = \sqrt{2}\, E_{1,III} \cos(\omega t + \alpha_1 + 120°) + \sqrt{2}\, E_{3,III} \cos(3\omega t + \alpha_3) \end{aligned} \tag{3.100a}$$

Las f.e.m.s. fundamentales son simétricas y equilibradas y las de tercer armónico tienen la misma magnitud y fase. En la Figura 3.35 se han representado los fasores correspondientes a las f.e.m.s. (3.100). Este diagrama fasorial requiere una explicación, ya que muestra vectores giratorios que giran a

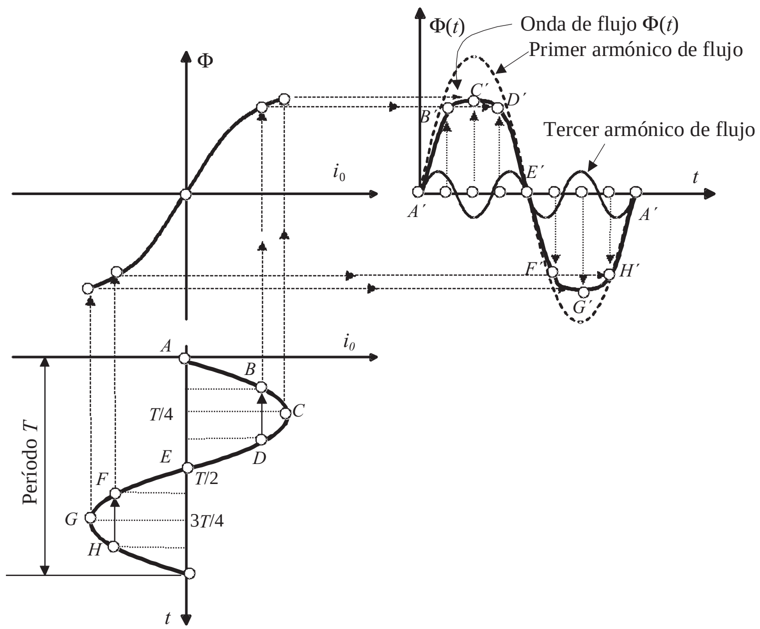


Figura 3.34. Deformación del flujo magnético para corrientes de circulación senoidales.

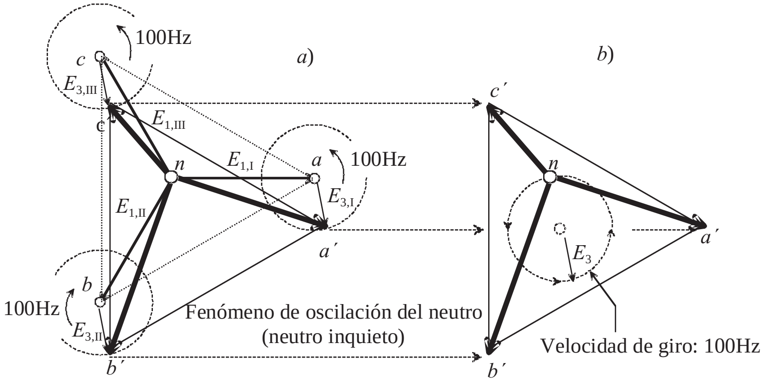


Figura 3.35. F.e.m.s. de primer y tercer armónico y movimiento del neutro.

diferente velocidad por tener diferente frecuencia. Así, las componentes fundamentales de f.e.m. girarán en sentido contrario a las agujas del reloj a una velocidad correspondiente a 50 Hz, mientras que los terceros armónicos de f.e.m. deben girar a 150 Hz. Si se suponen quietos los fasores fundamentales de f.e.m., por ejemplo porque los observadores giramos con ellos, se verán los fasores correspondientes a los terceros armónicos de f.e.m. girando a razón de 100 Hz. Si imaginamos en la Figura 3.35*a* que están fijos el neutro *n* y los fasores fundamentales, entonces los fasores de tercer armónico estarán girando a razón de 100 Hz, con centros en *a, b* y *c*. Los segmentos *na′*, *nb′* y *nc′* representan las f.e.m.s de cada una de las fases del secundario del transformador y que irán variando con el tiempo en virtud del movimiento de *a′*, *b′* y *c′*; sin embargo, los segmentos *a′b′*, *b′c′* y *c′a′*, que representan las f.e.m.s compuestas, forman un triángulo indeformable cuyos lados tienen longitudes constantes pero dotados de un movimiento de vaivén en virtud del movimiento circular de los vértices *a′*, *b′* y *c′*. Se puede dar otra visión más cómoda de este fenómeno, y es considerar quieto el triángulo final *a′b′c′* (Fig. 3.35*b*) y admitir que se mueve el neutro según una circunferencia de radio E_3 (magnitud del tercer armónico). De ahí la denominación que hacen algunos autores del punto *n*, que lo definen como **neutro inquieto** (oscilación del neutro).

La interpretación matemática de esta construcción gráfica es inmediata si el lector analiza las ecuaciones (3.100). Se observa que las f.e.m.s. de cada fase secundaria varían con el tiempo en virtud de la presencia del tercer armónico. Sin embargo, esto no sucede con las f.e.m.s. o tensiones compuestas, que como sabemos se obtienen como diferencia entre las tensiones simples correspondientes, ya que con la resta desaparecen las componentes de tercer armónico. Es decir, en ***las tensiones compuestas no existen componentes de tercer armónico***.

En definitiva, y como conclusión a este estudio: en un banco trifásico estrella-estrella a **tres hilos** aparecen sobretensiones en las tensiones simples debido a la presencia de componentes de tercer armónico, lo que puede resultar perjudicial para la vida de los aislantes y puede provocar a veces grandes tensiones resonantes entre la inductancia del transformador y la capacidad de la línea; por esta razón los transformadores monofásicos del banco trifásico se deben proyectar con inducciones bajas (por debajo del codo de la curva de imanación), lo que supone un encarecimiento de los mismos.

b) Transformadores con núcleo magnético trifásico

Consideremos un transformador Y-y con núcleo magnético trifásico como el mostrado en la Figura 3.36. Por las razones expuestas en el apartado anterior, no se dispone de neutro en la línea de alimentación del primario. Por tanto, no circularán terceros armónicos de corrientes de excitación y, por consiguiente, las corrientes de vacío serán sinusoidales, lo que obliga, según se ha señalado en el epígrafe anterior, a que los flujos no puedan ser sinusoidales y contengan por ello una componente de tercer armónico.

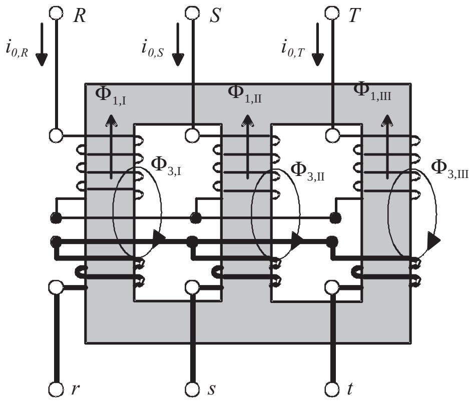


Figura 3.36. Transformador con núcleo trifásico y conexión Yy. Flujos principales y de tercer armónico.

Al ser el núcleo trifásico (Fig. 3.36) la suma de los flujos de las tres columnas, deben anularse, ya que no existe cuarta columna de retorno (en un nudo magnético la suma de los flujos debe ser igual a cero). Evidentemente, la suma de los flujos fundamentales es cero, ya que están desfasados en el tiempo 120°. Sin embargo, no ocurre lo mismo con los flujos de terceros armónicos, que están en fase (homopolares), es decir, pulsan a un tiempo $\Phi_{3,I} = \Phi_{3,II} = \Phi_{3,III}$, por lo que su suma $\Phi_{3,I} + \Phi_{3,II} + \Phi_{3,III} \neq 0$. Este hecho paradójico se resuelve, de acuerdo con el circuito magnético de la Figura 3.36, haciendo que la suma de los flujos anteriores, no nulas, pueda *saltar* por algún sitio. Efectivamente, los terceros armónicos de flujo tienden a cerrarse por una cuarta columna de retorno que es el aire, lo que representa un camino de gran reluctancia, y por tanto apenas existirán terceros armónicos de flujo. La consecuencia de orden práctico es que las tensiones simples secundarias no presentan terceros armónicos de gran consideración, aun cuando se proyecte el transformador para funcionamiento en la zona de saturación.

Una forma práctica de eliminar los flujos de terceros armónicos evitando que ***salten*** por el aire es conectar el secundario en triángulo. En la Figura 3.37 se observa tal disposición. Supóngase por el momento que el triángulo está abierto por medio del interruptor *D*. Además de los fundamentales de flujo, existirán componentes de tercer armónico que saltarán por el aire, que inducirán f.e.m.s. en el devanado

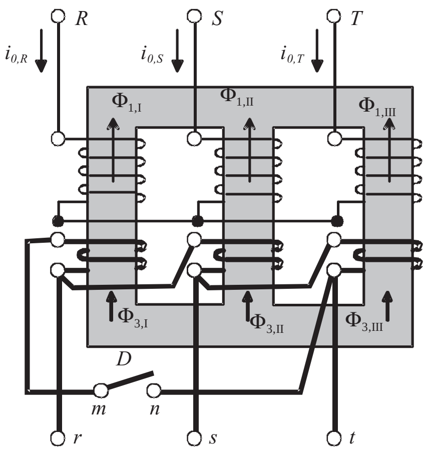


Figura 3.37. Borrado de los flujos de tercer armónico por medio de la conexión en triángulo.

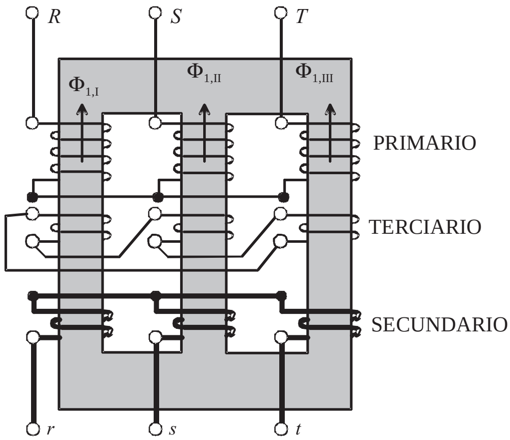


Figura 3.38. Transformador trifásico con devanado terciario.

secundario, con expresiones similares a las indicadas (3.100*a*). Entre los extremos *m* y *n* del interruptor *D* aparecerá una tensión que será la suma de las f.e.m.s. inducidas en cada una de las bobinas secundarias:

$$e_{mn} = (e_{1,I} + e_{1,II} + e_{1,III}) + (e_{3,I} + e_{3,II} + e_{3,III}) = 3e_3 \quad (3.100b)$$

expresión en la que se ha tenido en cuenta que el primer paréntesis se anula porque las f.e.m.s. de primer armónico son iguales y desfasadas 120°, mientras que las de tercer armónico al ser las tres idénticas se obtiene el triple de una de ellas.

En el momento en que se cierre el triángulo por medio del interruptor *D*, la f.e.m. resultante anterior $3e_3$ producirá una corriente de tercer armónico, que al circular por los tres devanados secundarios creará, en cada uno de ellos, flujos en oposición a los flujos armónicos preexistentes producidos por las corrientes primarias de excitación, por lo que finalmente se cumplirá: $\Phi_{3,I} = \Phi_{3,II} = \Phi_{3,III} = 0$. En definitiva, se ha producido un ***borrado*** o anulación de los flujos de tercer armónico. Es como si el devanado secundario en triángulo permitiera llevar o conducir la componente perdida de tercer armónico de la corriente de excitación primaria, haciendo que tanto los flujos como las tensiones inducidas tengan la forma sinusoidal.

Se consigue el mismo efecto dotando al transformador Y-y de arrollamientos de compensación o devanado terciario (Fig. 3.38). El devanado terciario es un arrollamiento conectado en triángulo sin conexión con el exterior, cuyo principio de funcionamiento es análogo al de la conexión del secundario en triángulo (Fig. 3.37). El devanado terciario *constituye un camino de baja impedancia para que puedan circular las corrientes de tercer armónico*. Este montaje se utiliza cuando se desea eliminar los flujos armónicos pero pudiendo disponer de un neutro secundario.

3.11.3. Conexiones de los transformadores trifásicos

Las conexiones básicas de los transformadores trifásicos son: *a*) Y- y; *b*) Y-d; *c*) D-y; *d*) D-d; *e*) Y-z. Vamos a analizar las ventajas e inconvenientes de cada tipo de conexión.

a) Conexión Y-y

Para una tensión dada entre fases V_L, la tensión en bornes de una fase de un transformador conectado en estrella es $V_L/\sqrt{3}$, mientras que cuando se trata de transformadores conectados en triángulo la tensión en cada bobina es V_L, o sea, un 73 por 100 mayor; la corriente en cada

bobina de un transformador conectado en estrella es igual a la corriente de línea I_L, mientras que la de un transformador conectado en triángulo es $I_L/\sqrt{3}$, o sea, el 58 por 100 de la corriente de línea. Así pues, siempre que las restantes condiciones sean las mismas, el devanado de un transformador conectado en estrella tendrá menos espiras, necesitará un conductor de mayor sección transversal que un transformador equivalente conectado en triángulo y su construcción será algo menos costosa. Las construcciones con hilos más gruesos (mayor sección transversal) proporcionan devanados mecánicamente fuertes y, por tanto, mejor dispuestos para resistir los esfuerzos debidos a grandes corrientes de cortocircuito, mientras que las tensiones más bajas reducen el esfuerzo dieléctrico sobre el aislamiento. Por tales razones, la conexión Y-y se considera ventajosa cuando han de enlazarse dos sistemas de tensiones relativamente altas, e incluso existe otra razón que puede resultar conveniente en determinados casos, la de que no existe desplazamiento de fase entre las tensiones de primario y secundario.

La conexión Y-y presenta dos inconvenientes graves:

1. *Si la carga del transformador es desequilibrada, se producen flujos alternos en las columnas que van en fase, es decir, pulsan al unísono (homopolares), lo que da lugar a tensiones homopolares que provocan un desequilibrio en las tensiones simples (traslado del neutro) tanto del primario como del secundario.*
2. *Existen terceros armónicos de tensión, como ya se ha indicado en el epígrafe anterior.*

Los problemas anteriores se pueden resolver mediante una de las siguientes técnicas:

a) Conectando rígidamente a tierra los neutros de los transformadores, especialmente el del primario. Esta solución no es del todo conveniente, ya que entonces se permite que circulen los armónicos de la corriente de vacío.

b) Añadir un tercer devanado (terciario) conectado en triángulo (véase Fig. 3.38) que anula los flujos homopolares debidos bien sea a los armónicos de tensión como a los desequilibrios de las cargas. A pesar de no ser necesario, los devanados terciarios tienen terminales hacia el exterior del transformador que se utilizan en la alimentación de los servicios auxiliares del centro de transformación en el que están situados. Como el devanado terciario debe ser capaz de soportar corrientes circulantes, normalmente su capacidad es del orden de la tercera parte de la potencia asignada de los otros dos devanados. En la práctica, la conexión Y-y se usa muy poco, ya que pueden lograrse iguales prestaciones con otro tipo de transformador trifásico.

b) Conexión Y-d

Esta conexión no tiene problema con los componentes de tercer armónico de tensión (véase epígrafe 3.11.2), puesto que éstos dan lugar a una corriente circulante en el lado conectado en triángulo. La conexión se comporta razonablemente bien bajo cargas desequilibradas, ya que el triángulo redistribuye parcialmente cualquier desequilibrio que se presente.

Sin embargo, esta disposición tiene el problema de que, debido a la conexión en triángulo, las tensiones secundarias sufren un desplazamiento de 30° con respecto a las tensiones del primario, lo cual puede causar inconvenientes al conectar en paralelo los secundarios de dos grupos transformadores, ya que para hacer esta maniobra, y como se demostrará más adelante, es preciso que los diferentes grupos tengan el mismo índice horario. La conexión Y-d se adapta particularmente bien a transformadores en sistemas de alta tensión en el extremo reductor de tensión de la línea.

c) Conexión D-y

Esta conexión presenta las mismas ventajas y el mismo desplazamiento de fase que la conexión Y-d. Se utiliza como transformador elevador en las redes de A.T. El empleo de la conexión en estrella en la parte de alta tensión permite poner a tierra el punto neutro, con lo que queda limitado el potencial sobre cualquiera de las fases a la tensión simple del sistema, reduciéndose al mismo tiempo el coste de los devanados de A.T., por las razones expuestas en la explicación de la conexión Y-y.

Esta conexión es también muy utilizada en los transformadores de distribución, correspondiendo la estrella al lado de baja tensión, que permite de este modo alimentar cargas trifásicas y cargas monofásicas (en este caso entre fase y neutro). El primario en triángulo tiende a compensar los desequilibrios producidos por las cargas monofásicas.

d) Conexión D-d

Esta conexión se utiliza en transformadores de B.T., ya que se necesitan más espiras/fase de menor sección. Se comporta bien frente a cargas desequilibradas. La ausencia de neutro puede ser a veces una desventaja. Este montaje puede trabajar al 58 por 100 (es decir, $1/\sqrt{3}$) de la potencia asignada trabajando como triángulo abierto en el caso de un banco trifásico con transformadores monofásicos en el que hay una unidad averiada y hay que proceder a su reparación.

e) Conexión Y-z

La conexión zig-zag se emplea únicamente en el lado de B.T. Este montaje se utiliza en redes de distribución, ya que permite el uso de un neutro en el secundario. Se comporta bien frente a desequilibrios de cargas. Debido a la composición de tensiones del lado secundario, se requiere un 15 por 100 más de espiras que en una conexión en estrella convencional.

Ejemplo de aplicación 3.8

Se conecta un transformador trifásico reductor a una línea de 20 kV y absorbe 20 A. Si la relación de espiras por fase es igual a 100, calcular la tensión compuesta y la corriente de línea en el secundario del transformador, para las siguientes conexiones: a) Estrella-estrella; b) triángulo-triángulo; c) estrella-triángulo; d) triángulo-estrella. NOTA: Se desprecian las pérdidas del transformador.

Solución

La potencia del transformador es en todos los casos igual a:

$$S = \sqrt{3}\, V \cdot I = \sqrt{3} \cdot 20.000 \cdot 20 \approx 693 \text{ kVA}$$

En las diferentes conexiones, se tiene:

a) **Estrella-estrella**: La tensión simple de primario será:

$$V_1 = \frac{20.000}{\sqrt{3}}$$

y la corriente de cada fase coincide con la de la línea, es decir, $I_1 = 20$ A. Los valores simples secundarios, vendrán ligados por la relación de transformación, de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$m = 100 = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

de donde se deduce:

$$V_2 = \frac{200}{\sqrt{3}} \quad ; \quad I_2 = 2.000 \text{ A}$$

que en valores compuestos corresponden a 200 V y 2.000 A.

b) **Triángulo-triángulo**: De forma análoga al caso anterior, se deducen unos valores de línea igual a 200 V y 2.000 A en el secundario.

c) **Estrella-triángulo**: Los valores simples de primario, teniendo en cuenta que está conectado en estrella, serán:

$$V_1 = \frac{20.000}{\sqrt{3}} \quad ; \quad I_1 = 20 \text{ A}$$

Los valores simples de tensión y corriente secundaria, de acuerdo con la relación de transformación, dan:

$$V_2 = \frac{200}{\sqrt{3}} \quad ; \quad I_2 = 2.000 \text{ A}$$

que teniendo en cuenta que este devanado está conectado en triángulo, corresponde a unos valores de línea de $200/\sqrt{3}$ voltios y $2.000\sqrt{3}$ amperios.

d) **Triángulo-estrella**: La tensión y corriente de cada fase del primario al estar conectado este devanado en triángulo son:

$$V_1 = 20.000 \text{ V} \quad ; \quad I_1 = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ A}$$

y los valores correspondientes en secundario serían:

$$V_2 = 200 \text{ V} \quad ; \quad I_2 = \frac{2.000}{\sqrt{3}} \text{ A}$$

quie teniendo en cuenta que este devanado está en estrella, resultan unos valores de línea de $200\sqrt{3}$ y $2.000/\sqrt{3}$ A.

Ejemplo de aplicación 3.9

Determinar el índice horario del transformador estrella zig-zag representado en la Figura 3.39. Si el primario tiene N_1 espiras por fase y el secundario N_2 (total, suma de las dos mitades), calcular la relación entre las f.e.m.s. de línea de primario y secundario.

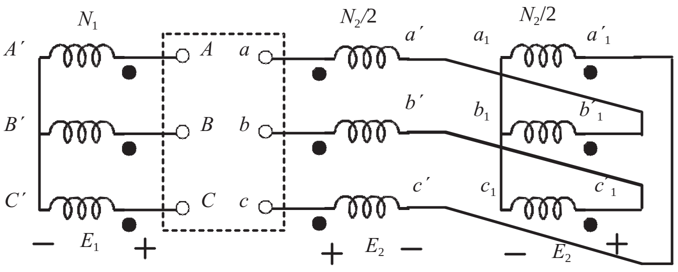


Figura 3.39.

Solución

En la Figura 3.40*a* se representa el diagrama vectorial de las f.e.m.s. primarias, formando una estrella de sucesión ABC. En la Figura 3.40*b* se muestra la composición vectorial de las f.e.m.s. secundarias, donde aparece la estrella invertida a_1', b_1', c_1', a la cual se suman las f.e.m.s. de las fases adyacentes. Al superponer ambos diagramas se obtiene la Figura 3.40*c*, donde se observa que el índice horario es igual a 11. Para calcular la relación de las f.e.m.s. compuestas, se observa que en el primario se cumple:

$$E_{1línea} = \sqrt{3}\, E_1$$

En el secundario, si se denomina E_2 la f.e.m. inducida en cada semidevanado (es decir, producida por $N_2/2$ espiras), se observa en la composición vectorial de la Figura 3.40*b* que se cumple:

$$E_{2línea} = 3\, E_2$$

y en consecuencia, resulta:

$$\frac{E_{1línea}}{E_{2línea}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{N_1}{N_2/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{N_1}{N_2}$$

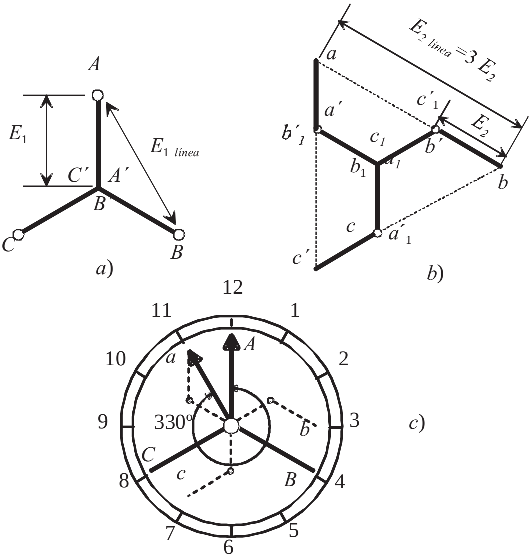


Figura 3.40.

Ejemplo de aplicación 3.10

La Figura 3.41 muestra tres transformadores monofásicos de relación 1.000 V/200 V cada uno y con unas impedancias de primario y secundario, respectivamente, de valores: $\mathbf{Z}_1 = 0{,}75 + j\,1\ \Omega$; $\mathbf{Z}_2 = 0{,}03 + j\,0{,}04\ \Omega$; *se consideran despreciables las ramas paralelo de cada uno de los transformadores. Los tres transformadores se unen entre sí formando sus primarios una conexión en triángulo y sus secundarios una conexión en estrella. El conjunto alimenta una carga equilibrada conectada en estrella de* $2 \angle 45^\circ\ \Omega$*/fase. Si la tensión simple secundaria es igual a 200 V, la sucesión de fases es RST y se toma como referencia de fase secundaria la tensión* $\mathbf{V}_{an}$*. Determinar las expresiones fasoriales de: 1) las corrientes* $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ *e* $\mathbf{I}_c$*; 2) las corrientes* $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ *e* $\mathbf{I}_3$*; 3) las corrientes* $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_S$ *e* $\mathbf{I}_T$*; 4) tensión* $\mathbf{V}_{RS}$, $\mathbf{V}_{ST}$ *y* $\mathbf{V}_{TR}$.

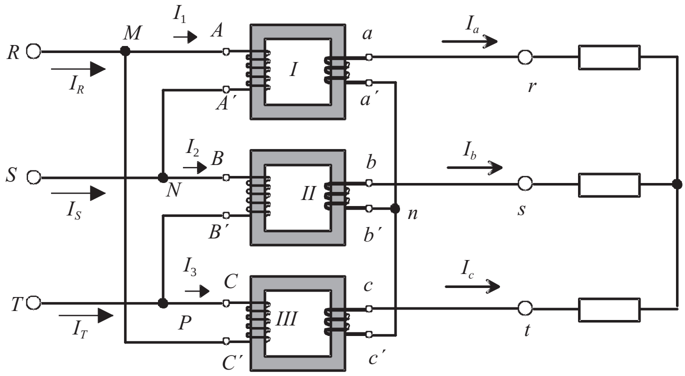


Figura 3.41.

Solución

1) Resolveremos el problema para el transformador superior, dando las respuestas de los otros transformadores a base de hacer un corrimiento cíclico de sus fases respecto del primario. Así, se tiene:

$$\mathbf{V}_{an} = \mathbf{V}_{aa'} = 200 \angle 0° \text{ V}$$

lo que da lugar a una corriente en la 1.ª fase secundaria:

$$\mathbf{I}_a = \frac{200 \angle 0°}{2 \angle 45°} = 100 \angle -45° \text{ A}$$

y para las otras dos fases se tendrá:

$$\mathbf{I}_b = 100 \angle -165° \text{ A} \quad ; \quad \mathbf{I}_c = 100 \angle 75° \text{ A}$$

2) La f.e.m. secundaria del primer transformador, de acuerdo con (3.24), será:

$$\mathbf{E}_{aa'} = \mathbf{V}_{aa'} + \mathbf{Z}_2\mathbf{I}_a$$

es decir:

$$\mathbf{E}_{aa'} = 200 \angle 0° + (0{,}03 + j\,0{,}04) \cdot 100 \angle -45° = 204{,}95 \angle 0{,}2° \text{ V}$$

que corresponde a una f.e.m. primaria, de acuerdo con (3.25), de:

$$\mathbf{E}_{AA'} = m \cdot \mathbf{E}_{aa'} = 5 \cdot 204{,}95 \angle 0{,}2° = 1.024{,}76 \angle 0{,}2° \text{ V}$$

ya que $m = 1.000/200 = 5$.

Además, si se tiene en cuenta que se desprecian las corrientes de vacío (rama paralelo), la corriente primaria por fase del primer transformador, de acuerdo con (3.31), será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{I}_a}{m} = \frac{100 \angle -45°}{5} = 20 \angle -45° \text{ A}$$

y para los otros dos (teniendo en cuenta el sentido de sucesión de fases):

$$\mathbf{I}_2 = 20 \angle -165° \text{ A} \quad ; \quad \mathbf{I}_3 = 20 \angle 75° \text{ A}$$

3) Las corrientes primarias de línea se obtendrán aplicando el primer lema de Kirchhoff a los nudos *M*, *N* y *P*. Para la fase *R* se tiene:

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_3 = 20 \angle -45^\circ - 20 \angle 75^\circ = 20\sqrt{3} \angle -75^\circ = 34{,}64 \angle -75^\circ \text{ A}$$

que corresponden a las otras dos fases:

$$\mathbf{I}_S = 34{,}64 \angle -195^\circ \quad ; \quad \mathbf{I}_T = 34{,}64 \angle 45^\circ$$

4) La tensión primaria del primer transformador se obtiene aplicando la 1.ª ecuación (3.24), resultando:

$$\mathbf{V}_{AA'} = \mathbf{E}_{AA'} + \mathbf{Z}_1\mathbf{I}_1 = 1.024{,}76 \angle 0{,}2^\circ + (0{,}75 + j\,1)\ 20 \angle -45^\circ \text{ V}$$

que conducen a un valor:

$$\mathbf{V}_{AA'} = 1.049{,}5 \angle 0^\circ$$

que corresponde, de acuerdo con la Figura 3.41, a la tensión primaria $\mathbf{V}_{RS}$. Y para las otras fases resultará:

$$\mathbf{V}_{ST} = 1.049{,}5 \angle -120^\circ \quad ; \quad \mathbf{V}_{TR} = 1.049{,}5 \angle +120^\circ$$

El lector puede comprobar que la tensión compuesta secundaria $\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{rs}$ es igual a:

$$\mathbf{V}_{rs} = \mathbf{V}_{ab} = \mathbf{V}_{aa'} - \mathbf{V}_{bb'} = \sqrt{3} \cdot 200 \angle 30^\circ = 346{,}4 \angle 30^\circ$$

que al comparar con la primaria correspondiente:

$$\mathbf{V}_{RS} = 1.049{,}5 \angle 0^\circ$$

nos indica que la tensión secundaria de línea (lado de B.T.) se adelanta 30° respecto a la tensión primaria de línea. O de otro modo: la tensión secundaria de línea se **retrasa** 330° respecto a la tensión primaria, lo que corresponde a un índice horario 330°/30° = 11, que el lector puede demostrar más fácilmente por el método gráfico explicado en el epígrafe 3.11.1.

Ejemplo de aplicación 3.11. Circuito equivalente monofásico de un sistema trifásico

La Figura 3.42 muestra el esquema de una instalación trifásica equilibrada. Se dispone de un transformador de 50 kVA, conexión Dy1, relación compuesta 15.000/380 V, con las siguientes tensiones relativas de cortocircuito: ε_{cc} = 10 por 100; ε_{xcc} = 8 por 100, que alimenta por su secundario una carga equilibrada en estrella de 5 ∠ 0° Ω/fase a través de una línea de impedancia 0,1 + j 0,2 Ω/hilo. Calcular: a) Parámetros R_{cc}, X_{cc} y Z_{cc} del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; b) si se aplica al primario una tensión trifásica equilibrada de 15 kV de línea (lectura del voltímetro V_1), determinar las lecturas de los voltímetros V_A y V_B.

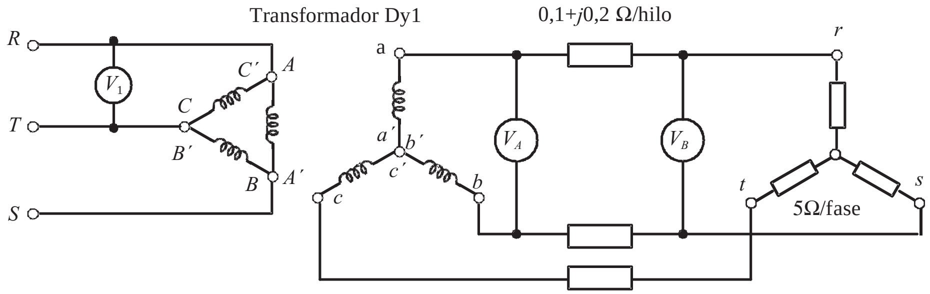


Figura 3.42.

Solución

Los problemas de transformadores trifásicos se pueden resolver por dos procedimientos distintos: a) desde el punto de máquina eléctrica, teniendo en cuenta la configuración interna real física con la que se unen los devanados. Este procedimiento suele ser más útil cuando solamente se analiza el transformador; b) desde el punto de sistema eléctrico de potencia completo. Este procedimiento tiene interés cuando el transformador forma parte de una red eléctrica más completa, que puede incluir líneas de alimentación del transformador y de éste a las cargas.

En el primer caso, el problema se resuelve de un modo similar al indicado en el ejemplo de aplicación anterior 3.10, es decir, se calculan las distintas tensiones y corrientes que tienen lugar en uno de los transformadores monofásicos que constituyen el conjunto trifásico. A partir de los resultados obtenidos para este transformador monofásico, se calculan las tensiones y corrientes de línea teniendo en cuenta las conexiones eléctricas que existen entre los tres transformadores monofásicos. Un procedimiento similar se utiliza en el caso de tratarse de transformadores trifásicos de tres columnas, calculando las tensiones y corrientes que tienen lugar en ***una sola columna*** *del transformador y determinando* a posteriori *las tensiones y corrientes de línea en función de las conexiones internas entre los arrollamientos. Este método es muy útil para el ingeniero constructor del transformador, ya que tiene en cuenta la realidad física de cómo están unidos entre sí los devanados.*

Cuando el transformador es un componente más de un sistema eléctrico de potencia, el ingeniero no está tan interesado en lo que sucede dentro de cada columna del transformador sino en las modificaciones que éste produce en los niveles de corrientes y tensiones de la red. En esta situación es más práctico desarrollar un circuito equivalente monofásico de todo el conjunto: red de alimentación, transformador, líneas e impedancias de carga, lo que se resuelve más fácilmente si todas las fuentes (red), devanados del transformador y cargas se suponen conectados en estrella. En el caso de que algún componente de la red esté realmente conectado en triángulo, deberá obtenerse su equivalente en estrella de acuerdo con las reglas de transformación triángulo-estrella que se utiliza en la teoría de los circuitos trifásicos.

Como aplicación de estas ideas, se va a resolver este ejercicio de dos maneras distintas, para que el lector utilice el que más le interese en función del tipo de problema que esté resolviendo.

1. *Primer procedimiento. Desde el punto de vista de máquina eléctrica*

a) Las tensiones **simples** de primario y secundario del transformador (valores asignados) son:

$$V_{1n} = 15.000 \text{ V} \quad ; \quad V_{2n} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219{,}39 \text{ V}$$

ya que el primario está en triángulo y el secundario en estrella. De este modo la relación de transformación entre tensiones simples será:

$$m = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{15.000}{219{,}39} = 68{,}37$$

La corriente asignada por fase primaria es:

$$S_N = 3\, V_{1n} \cdot I_{1n} \quad \Rightarrow \quad I_{1n} = \frac{50.000}{3 \cdot 15.000} = 1{,}11 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta las definiciones (3.59) y (3.76) aplicadas a una fase del primario, resultará

$$0{,}1 = \frac{Z_{cc} \cdot 1{,}11}{15.000} \quad \Rightarrow \quad Z_{cc} = 1.350\ \Omega \quad ; \quad 0{,}08 = \frac{X_{cc} \cdot 1{,}11}{15.000} \quad \Rightarrow \quad X_{cc} = 1.080\ \Omega$$

de donde se deduce: $R_{cc} = \sqrt{Z_{cc}^2 - X_{cc}^2} = 810\ \Omega$

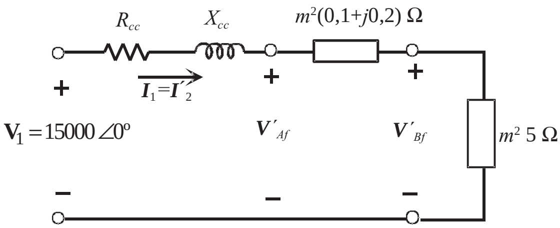


Figura 3.43.

b) El circuito equivalente por fase reducido al primario de la instalación es el mostrado en la Figura 3.43, en el que se ha tomado como referencia de fases la tensión primaria (realmente quiere decir la tensión primaria de la 1.ª fase del transformador). En este circuito se tiene:

Impedancia reducida de la línea: $m^2\,(0{,}1 + j\,0{,}2) = 467{,}45 + j\,934{,}9\ \Omega$
Impedancia reducida de la línea de la carga: $m^2 \cdot 5 \angle 0° = 23.372{,}6 + j\,0\ \Omega$

por lo que la corriente $\mathbf{I}'_2$ valdrá:

$$\mathbf{I}'_2 = \frac{15.000 \angle 0°}{(810 + j\,1.080) + (467{,}45 + j\,934{,}9) + 23.372{,}6} = 0{,}606 \angle -4{,}67°\ \text{A}$$

y en consecuencia las tensiones reducidas $\mathbf{V}'_{Af}$ y $\mathbf{V}'_{Bf}$ serán:

$$\mathbf{V}'_{Af} = [(467{,}45 + j\,934{,}9) + 23.372{,}6] \cdot 0{,}606 \angle -4{,}67° = 14.458{,}2 \angle -2{,}42°$$
$$\mathbf{V}'_{Bf} = 23.372{,}6 \cdot 0{,}606 \angle -4{,}67° = 14.163{,}8 \angle -4{,}67°$$

que corresponden a unos módulos:

$$V'_{Af} = 14.458{,}2\ \text{V} \quad ; \quad V'_{Bf} = 14.163{,}8\ \text{V}$$

y en consecuencia las tensiones secundarias por fase serán:

$$V'_{Af} = \frac{V'_{Af}}{m} = \frac{14.458{,}2}{68{,}37} \approx 211{,}5\ \text{V} \quad ; \quad V'_{Bf} = \frac{V'_{Bf}}{m} = \frac{14.163{,}8}{68{,}37} \approx 207{,}2\ \text{V}$$

que al estar conectado el secundario en estrella corresponde a unos valores de línea:

$$V_A = \sqrt{3} \cdot 211{,}5 \approx 366{,}28\ \text{V} \quad ; \quad V_B = \sqrt{3} \cdot 207{,}2 \approx 358{,}9\ \text{V}$$

que corresponden a las lecturas que señalarán los voltímetros de la Figura 3.42.

Comprobará el lector que la resolución de un problema de transformadores trifásicos por este procedimiento es análoga a la de los transformadores monofásicos. La clave consiste en visualizar una sola de las fases o columna del transformador real (parte del primario y secundario correspondiente). Este transformador individual se comporta exactamente igual que el transformador monofásico estudiado en la primera parte de este capítulo. Para transformadores trifásicos los cálculos de impedancia, caída de tensión, rendimiento, etc., se efectúan por **fase**, empleando exactamente las mismas técnicas ya desarrolladas para transformadores monofásicos.

*Para evitar errores en el planteamiento de las ecuaciones, conviene que se siga este procedimiento: 1) Obtener la relación de transformación como cociente de las tensiones asignadas **simples** de primario y secundario. 2) Determinar los parámetros por **fase** del transformador. 3) Dibujar el circuito equivalente de la instalación reducida al primario, en la que se indiquen los valores de las potencias, tensiones y corrientes por **fase**. 4) Resolver el circuito equivalente, indicando los valores de las soluciones por **fase**. 5) Expresar las soluciones en valores de línea, teniendo en cuenta para ello las conexiones específicas del primario y secundario del transformador.*

2. *Segundo procedimiento. Desde el punto de vista de sistema eléctrico*

En esta situación, y tal como ya se ha indicado en la introducción al problema, conviene analizar la red en todo su conjunto, para lo cual hay que conseguir un equivalente monofásico de todo el sistema, lo que requiere transformar todos los elementos que estén conectados en triángulo en una estrella equivalente. En este problema solamente es el primario del transformador el que está conectado en triángulo, por lo que vamos a preparar un circuito equivalente al de la Figura 3.42 pero con el primario en estrella. En la Figura 3.44*a* se muestra el esquema correspondiente y en la Figura 3.44*b* se representa el circuito equivalente por fase de todo el sistema: red de alimentación, transformador y carga.

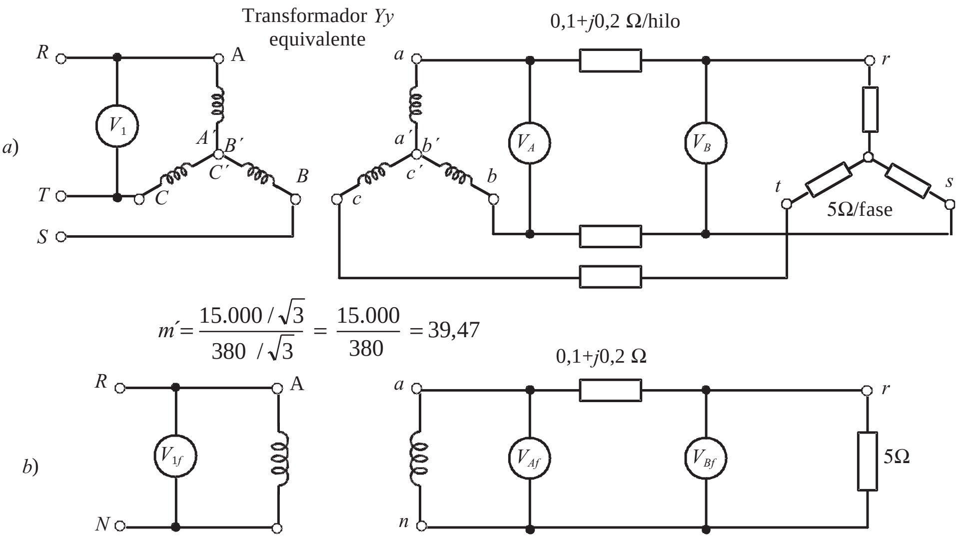


Figura 3.44.

En la figura anterior debe destacarse que la relación de transformación del ***transformador equivalente*** es diferente a la real calculada con el primer método y que por ello denominamos m' y que es igual al cociente de la tensión asignada simple del primario en estrella $V_{1n\lambda}$ dividido por la tensión asignada simple del secundario en estrella $V_{2m\lambda}$, es decir:

$$m' = \frac{V_{1n\lambda}}{V_{2n\lambda}} = \frac{15.000/\sqrt{3}}{380/\sqrt{3}} = 39{,}47$$

Como observa el lector, con este procedimiento coinciden las relaciones de tensión tanto como cociente de tensiones simples como de tensiones compuestas. Por otro lado, la impedancia equivalente del transformador reducida al primario calculada en el caso anterior, cuando se consideraba el primario conectado en triángulo, era igual a:

$$Z_{cc\Delta} = 810 + j\,1.080\ \Omega$$

Sin embargo, la impedancia por fase reducida al primario del *transformador equivalente estrella-estrella,* de acuerdo con las reglas de conversión triángulo-estrella, será:

$$\mathbf{Z}_{cc\lambda} = \frac{\mathbf{Z}_{cc\Delta}}{3} = \frac{810 + j\,1.080}{3} = 270 + j\,360\ \Omega$$

El circuito equivalente monofásico de la Figura 3.44*b*, al reducir el secundario al primario da lugar al indicado en la Figura 3.45, teniendo en cuenta que $m' = 39{,}47$.

En este circuito se puede calcular la corriente $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}'_2$, que vale:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}'_2 = \frac{\dfrac{15.000}{\sqrt{3}} \angle 0°}{(270 + j\,360) + 39{,}47^2 \cdot (0{,}1 + j\,0{,}2) + 39{,}47^2 \cdot 5 \angle 0°} = 1{,}05 \angle -4{,}67° \text{ A}$$

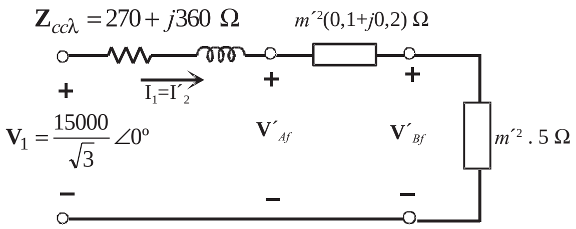


Figura 3.45.

y en consecuencia las tensiones reducidas $\mathbf{V}'_{Af}$ y $\mathbf{V}'_{Bf}$ serán:

$$\mathbf{V}'_{Af} = [39{,}47^2 \cdot (0{,}1 + j\,0{,}2) + 39{,}47^2 \cdot 5 \angle 0°]\ 1{,}05 \angle -4{,}67° \approx 8.350{,}4 \angle -2{,}42°$$

$$\mathbf{V}'_{Bf} = [39{,}47^2 \cdot 5 \angle 0°]\ 1{,}05 \angle -4{,}67° \approx 8.180{,}3 \angle -4{,}67°$$

que corresponden a unos módulos:

$$V'_{Af} = 8.350{,}4 \text{ V} \quad ; \quad V'_{Bf} = 8.180{,}3 \text{ V}$$

por lo que las tensiones secundarias por fase serán:

$$V_{Af} = \frac{V'_{Af}}{m'} = \frac{8.350{,}4}{39{,}47} = 211{,}5 \text{ V} \quad ; \quad V_{Bf} = \frac{V'_{Bf}}{m'} = \frac{8.180{,}3}{39{,}47} = 207{,}2 \text{ V}$$

que corresponden a unos valores de línea:

$$V_A = \sqrt{3} \cdot 211{,}5 \approx 366{,}3 \text{ V} \quad ; \quad V_B = \sqrt{3} \cdot 207{,}2 \approx 358{,}9 \text{ V}$$

que coinciden con los valores calculados con el primer procedimiento.

El lector puede comprobar que este procedimiento tiene grandes ventajas analíticas en la resolución de problemas complejos en los que pueden existir líneas de alimentación al transformador, cargas en estrella o triángulo, varios transformadores implicados en los cálculos, líneas o *feeders* de alimentación a las cargas, etc.

3.12. ACOPLAMIENTO EN PARALELO DE TRANSFORMADORES

Cuando aumenta la demanda en un sistema eléctrico es necesario con frecuencia elevar la potencia de los transformadores de alimentación. Antes que retirar una unidad antigua y sustituirla por otra nueva y de mayor potencia, es más económico disponer de un transformador adicional conectado en paralelo con el ya existente y cubrir así la demanda. Por otro lado, el consumo de un sistema eléctrico puede variar fuertemente de unas épocas a otras del año; si se proyecta la instalación con un único transformador, éste deberá tener la potencia suficiente

para poder suministrar la carga solicitada en los momentos de mayor demanda, y en esta situación en las épocas de menor consumo el transformador trabajará con poca carga, por lo que su rendimiento será bajo. Una forma de mejorar la instalación eléctrica será colocar dos o tres transformadores más pequeños en paralelo de tal forma que en los períodos de menor demanda funcione solamente uno de ellos y en épocas de mayor consumo se incorporan nuevas unidades en paralelo. Este procedimiento mejora notablemente el rendimiento de la instalación, con la ventaja adicional de que si se produjera la avería de un transformador siempre cabe la posibilidad de alimentar la carga más esencial con los otros transformadores. De ahí la importancia del estudio del acoplamiento de transformadores en paralelo.

Se dice que dos o más transformadores funcionan en paralelo, cuando sus bornes homólogos están unidos entre sí, tanto del lado primario como del secundario, por conexiones de resistencia y reactancia despreciables. El acoplamiento en paralelo es adecuado cuando no se producen corrientes internas de circulación entre los transformadores cuando trabajan en vacío, ni una distribución desigual de la potencia cuando alimentan una carga común. Los requerimientos necesarios para que el acoplamiento en paralelo de transformadores sea perfecto son por ello los siguientes:

1. *Los transformadores deben tener el mismo índice horario (es decir, deben pertenecer al mismo grupo de conexiones en el caso de transformadores trifásicos).*
2. *Los transformadores deben tener las mismas relaciones de transformación (en el caso trifásico se refiere a las mismas relaciones de transformación entre tensiones compuestas).*
3. *Los transformadores deben tener idénticas tensiones relativas de cortocircuito* (ε_{cc}).

Las dos primeras condiciones son necesarias incluso en el funcionamiento en vacío, de esta forma se evitan corrientes de circulación entre ambos transformadores en ausencia de carga, debido a la no coincidencia de las fases o a la desigualdad de las magnitudes de sus f.e.m.s. secundarias. Es decir, los transformadores deben tener ***rigurosamente iguales en magnitud y en fase***, ***las tensiones en los bornes secundarios en vacío***, porque en caso contrario se tendrían corrientes de circulación entre los devanados secundarios aún en ausencia de carga. Esta condición de igualdad en magnitud y fase de las tensiones secundarias obliga a conocer con antelación la polaridad de los terminales de los transformadores y que en el caso de que se trate de transformadores monofásicos, se determina tal como se señaló en el epígrafe 3.6.

En la Figura 3.46 se muestra el esquema eléctrico de la conexión de dos transformadores monofásicos en paralelo I y II. Como los transformadores deben tener marcados sus terminales debidamente, bastará unir en paralelo todos los primarios, de tal manera que los bornes homólogos *A* de los diferentes transformadores (en el caso de la Figura 3.46 solamente hay dos transformadores), se conecten a la misma fase de la barra primaria (que se supone que es la de A.T.) y que todos los bornes *A′* se unan a la otra fase de la barra y, para la red secundaria (o de B.T.), se seguirá exactamente el mismo procedimiento, uniendo a una de las fases de la barra secundaria todos los terminales *a* y a la otra todos los *a′*. Sin embargo, si se tratara de transformadores que no tienen marcada su polaridad o existe alguna duda sobre la correcta designación de los terminales, es preciso antes de la puesta en servicio, hacer las conexiones mostradas en la Figura 3.46, es decir después de quitar la carga (abriendo el interruptor *S* para que los transformadores estén en vacío) y de conectar en paralelo todos los primarios, y de unir a uno de los conductores de la barra secundaria un terminal secundario de cada transformador, antes de conectar el otro se intercalará el voltímetro que se indica en la Figura 3.46 y pueden ocurrir dos casos que el voltímetro marque cero, en cuyo caso la conexión es la

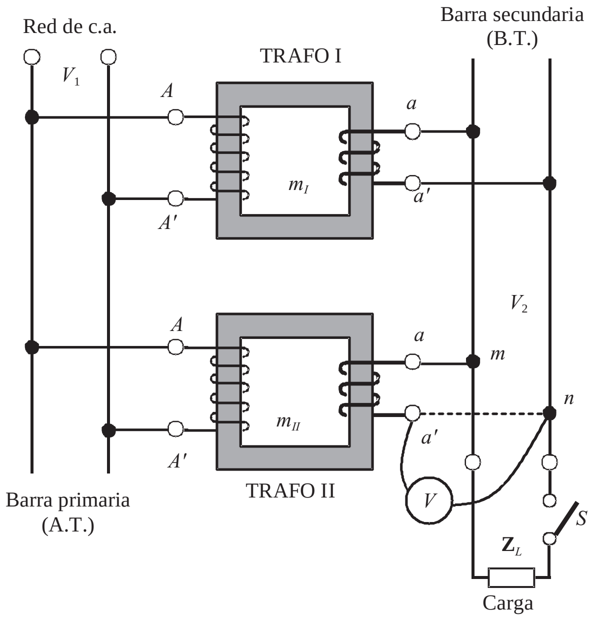


Figura 3.46. Conexión de transformadores en paralelo.

correcta (véase línea de trazo discontinuo) o que señale el doble de la tensión secundaria, en este caso es preciso conmutar entre sí los bornes del secundario del segundo transformador para hacer la conexión definitiva.

En el caso de que se trate de transformadores trifásicos, la exigencia de igualdad en magnitud y fase de las tensiones secundarias, hace que el acoplamiento en paralelo de transformadores trifásicos sea más delicada que la de los monofásicos, puesto que la fase no sólo depende del tipo de conexión que tengan los transformadores a acoplar, sino también de las polaridades de sus terminales. En definitiva la igualdad de fase obliga a que los transformadores tengan el mismo índice horario, ya que dependiendo del tipo de conexión, existen desfases entre las tensiones primarias y secundarias, lo que significa que aunque las tensiones primarias coincidan en fase, pueden no estar en fase las tensiones secundarias. Si se consideran dos transformadores trifásicos con las mismas relaciones de transformación compuestas y que tengan el mismo índice horario con sus terminales marcados correctamente, para proceder a la conexión se conectarán los bornes marcados con la misma letra a la misma línea de la red, tanto en el lado de A.T (primario) como en el de B.T. (secundario), como se indica en la Figura 3.47.

En el caso de que se desconozcan los índices horarios de los transformadores (teniendo por supuesto la misma relación de tensiones compuestas), se puede comprobar por tanteos la posibilidad de su acoplamiento y determinar además las conexiones a efectuar entre los terminales de ambos para realizar la maniobra. Supóngase por ejemplo que se desean acoplar en paralelo los dos transformadores trifásicos mostrados en la Figura 3.48. Para reconocer los terminales homólogos de los mismos procederemos del siguiente modo: uniremos los primarios a la barra primaria, procurando unir a las mismas fases de esta barra los terminales que se consideren homólogos en ambos transformadores (en el caso de la Figura 3.48 se han supuesto homólogos los terminales *A*, *B* y *C* de ambos); una vez hecho esto, se eligen dos terminales

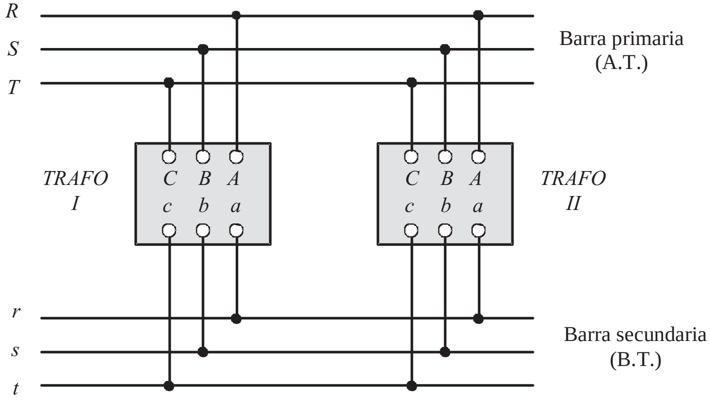


Figura 3.47. Conexión en paralelo de transformadores trifásicos del mismo índice horario.

secundarios que se supongan homólogos y se unen entre sí permanentemente (en el caso de la Figura 3.48, se han unido a_I con a_{II}), y después con un voltímetro se miden las d.d.p. entre los demás bornes, los terminales cuya d.d.p. sea cero serán bornes homólogos y se podrán conectar a la misma fase de la línea; por ejemplo si la d.d.p. entre b_I y b_{II} marca cero y entre c_I y c_{II} señala también cero, es evidente que los terminales a_I , b_I y c_I son homólogos de los a_{II} , b_{II} y c_{II} . En el caso de que no se lograra este resultado, se unirán otros bornes del secundario (por ejemplo el c_I con b_{II}) y se seguirá el procedimiento anterior; si no se llegara nuevamente a encontrar bornes homólogos se hará otra combinación en los secundarios; agotadas todas las posibilidades en el lado secundario, se procederá a intercambiar entre sí, dos bornes de la parte del primario de uno de los transformadores y se procederá como antes; si aún no se llegara a encontrar bornes homólogos querrá decir que los dos transformadores no pueden conectarse en paralelo (a no ser que se cambien las conexiones internas).

Todo lo explicado hasta ahora es para asegurar y demostrar las condiciones 1) y 2) señaladas anteriormente como requisitos para el acoplamiento en paralelo, tanto de transformadores monofásicos como trifásicos en vacío. En definitiva la condición 1) de exigencia del mismo índice horario se debe a la necesidad de que las fases de las tensiones secundarias de ambos

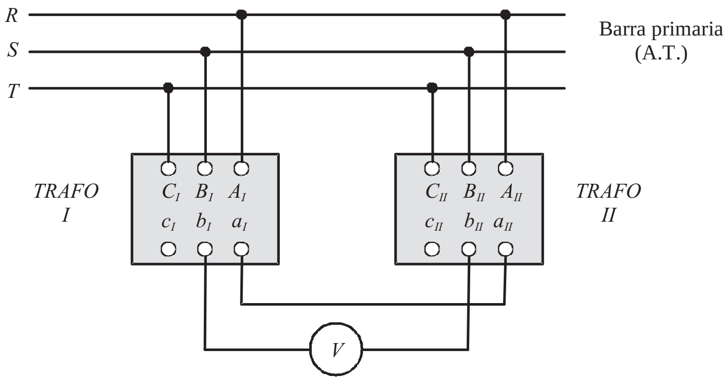


Figura 3.48. Comprobación de la polaridad de los terminales en transformadores trifásicos.

transformadores coincidan y la condición 2) que exige la igualdad de las relaciones de transformación $m_I = m_{II}$ es consecuencia de la igualdad que se requiere en las magnitudes de las tensiones secundarias (y como las tensiones primarias ya coinciden, el cociente entre la tensión primaria y secundaria de cada transformador es precisamente su relación de transformación compuesta).

La tercera condición que se ha señalado es necesaria además ***para el correcto funcionamiento en carga***, de forma que esta última se distribuya entre los transformadores, proporcionalmente a sus potencias asignadas aparentes. En la práctica se admiten unas desviaciones máximas del 10% y se suele exigir también que la relación de las potencias asignadas de los transformadores conectados en paralelo no supere la relación 3:1. Para demostrar lo anterior en la Figura 3.49*a* se muestra el esquema del acoplamiento en paralelo de dos transformadores (que se suponen por simplicidad que son monofásicos). En la Figura 3.49*b*, se indica el circuito equivalente por fase, **reducido al primario** del sistema que se forma, donde por sencillez se ha omitido la rama de vacío. En la Figura 3.49*c* se muestra el esquema equivalente al de la Figura 3.49*b*. En estas figuras $\mathbf{Z}_{ccI}$ y $\mathbf{Z}_{ccII}$ son respectivamente las impedancias complejas de cortocircuito de cada transformador reducidas al primario, $\mathbf{I}_I$ e $\mathbf{I}_{II}$ son las corrientes de carga de ambos transformadores reducidas al primario, $\mathbf{V}_2'$ es la tensión compleja secundaria reducida al primario. Analizando este circuito, se observa que al ser comunes las tensiones primaria y secundaria, las caídas de tensión han de ser idénticas, es decir:

$$\mathbf{Z}_{ccI}\mathbf{I}_I = \mathbf{Z}_{ccII}\mathbf{I}_{II} \tag{3.101}$$

Si se denominan I_{In} e I_{IIn} las intensidades nominales asignadas de cada máquina, la expresión (3.101) se puede escribir también en forma modular:

$$\frac{I_I}{I_{In}}\frac{Z_{ccI}I_{In}}{V_{1n}} \cdot 100 = \frac{I_{II}}{I_{IIn}}\frac{Z_{ccII}I_{IIn}}{V_{1n}} \cdot 100 \tag{3.102}$$

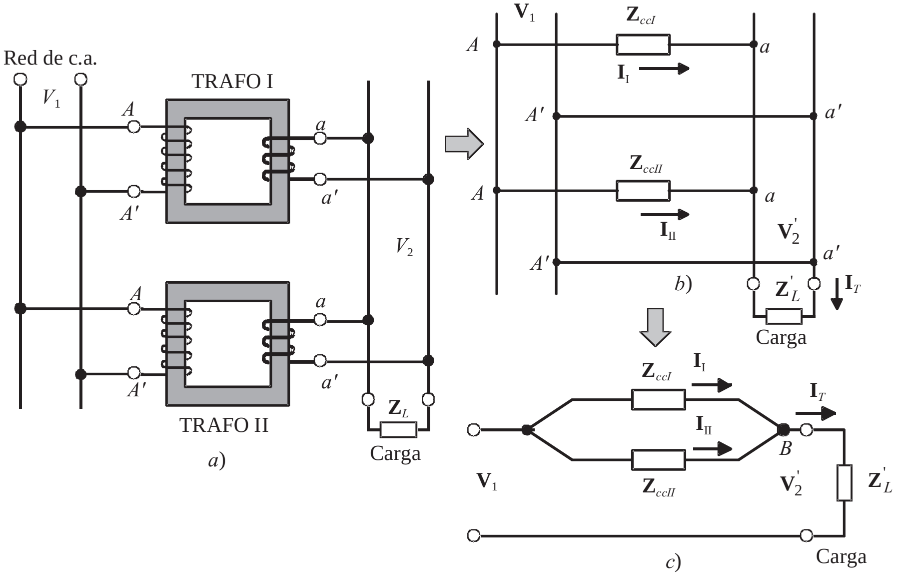


Figura 3.49. Reparto de corrientes entre transformadores en paralelo.

que teniendo en cuenta las definiciones de índice de carga (3.73) y tensión de cortocircuito (3.76), y que son:

$$C_I = \frac{S_I}{S_{In}} = \frac{I_I}{I_{In}} \quad ; \quad C_{II} = \frac{S_{II}}{S_{IIn}} = \frac{I_{II}}{I_{IIn}} \tag{3.103a}$$

$$\varepsilon_{ccI}(\%) = \frac{Z_{ccI} I_{In}}{V_{1n}} \cdot 100 \quad ; \quad \varepsilon_{ccII}(\%) = \frac{Z_{ccII} I_{IIn}}{V_{1n}} \cdot 100 \tag{3.103b}$$

la expresión (3.102) se puede poner del siguiente modo:

$$C_I\ \varepsilon_{ccI} = C_{II}\ \varepsilon_{ccII} \tag{3.104}$$

es decir:

$$\frac{C_I}{C_{II}} = \frac{\varepsilon_{ccII}}{\varepsilon_{ccI}} \tag{3.105}$$

lo que indica que los índices de carga de cada transformador son inversamente proporcionales a las tensiones de cortocircuito.

Por consiguiente, la tercera condición exigible para realizar el acoplamiento en paralelo indica que los transformadores deben tener las mismas tensiones relativas de cortocircuito, es decir que ε_{ccI} debe ser igual a ε_{ccII}, lo que significa en la ecuación (3.105), **que los índices de carga deben ser iguales**, y teniendo en cuenta que según (3.103*a*) el índice de carga de un transformador es el cociente entre la potencia aparente que suministra a la carga y la potencia aparente nominal asignada, lo anterior quiere decir que el reparto de las potencias aparentes se debe realizar en forma proporcional a las potencias asignadas respectivas, ya que según la definición (3.103*a*) y teniendo en cuenta que el cociente (3.105) es igual a la unidad, se deduce:

$$C_I = C_{II} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_I}{S_{In}} = \frac{S_{II}}{S_{IIn}} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_I}{S_{II}} = \frac{S_{In}}{S_{IIn}} \tag{3.106}$$

Por otro lado el circuito equivalente de la Figura 3.49*c* permite calcular las corrientes complejas que suministran cada uno de los transformadores, ya que en el nudo *B* se cumple:

$$\mathbf{I}_T = \mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} \tag{3.107}$$

y teniendo en cuenta la ecuación (3.101), entre ambas ecuaciones se obtiene:

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{I}_T = \frac{\mathbf{Z}_{ccII}}{\mathbf{Z}_{ccI} + \mathbf{Z}_{ccII}} \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = \mathbf{I}_T \frac{\mathbf{Z}_{ccI}}{\mathbf{Z}_{ccI} + \mathbf{Z}_{ccII}} \tag{3.108}$$

que son las expresiones complejas de las corrientes suministradas por cada uno de los transformadores reducidas al primario. Si ahora se tiene en cuenta el circuito equivalente de la Figura 3.49*b*, las potencias complejas suministradas por cada transformador son respectivamente:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2' \mathbf{I}_I^* = P_I + jQ_I \quad ; \quad \mathbf{S}_{II} = \mathbf{V}_2' \mathbf{I}_{II}^* = P_{II} + jQ_{II} \tag{3.109}$$

expresiones que permiten determinar el reparto de potencias aparentes, activas y reactivas que suministran cada transformador a la carga.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

¿Cómo funciona un centro de transformación de una instalación industrial?. En la Figura 3.50 se muestra el esquema unifilar de un centro de transformación de una pequeña industria que dispone de dos transformadores en paralelo Dy11. Se señalan de un modo simplificado los aparatos de maniobra de la instalación. En la parte superior llega la acometida de entrada en A.T. de la Compañía Eléctrica suministradora (por ejemplo a 20 kV) y que tiene tres hilos (que se señalan por medio de tres líneas cruzadas en la acometida de entrada). Existe primeramente un seccionador que es un aparato de maniobra que se utiliza para cortar/cerrar la ***tensión*** *de una forma visible (¡este aparato no tiene poder de corte para abrir o cerrar la corriente!) y después se incluye un interruptor automático en A.T. (que se denomina vulgarmente* ***disyuntor****). Este interruptor automático está en baño de aceite y tiene la capacidad de actuar con el circuito en carga, es decir puede abrir/cerrar la* ***corriente y desconectar la instalación en caso de una sobrecarga o un fallo de cortocircuito****. La salida del interruptor anterior llega a unas barras de A.T. de la cual* cuelgan *los transformadores, que se ha supuesto que tienen la conexión triángulo/estrella y por supuesto con el mismo índice horario, en este caso 11. Las salidas de los transformadores tienen cada una su interruptor de B.T. y alimentan a unas barras de B.T. a cuatro hilos (tres fases y neutro y con tensiones de 230/400 V). De estas barras se obtienen las salidas que por medio de interruptores tripolares (cargas trifásicas) o bipolares (cargas monofásicas) alimentan los diversos consumos de la instalación industrial.*

Inicialmente todos los interruptores y el seccionador están abiertos. La puesta en servicio de la instalación consiste en cerrar primeramente el seccionador de entrada, después el disyuntor principal, con los cual quedan con tensión las barras de A.T. Posteriormente se cierran los interruptores 1 y 2 de A.T. de los transformadores (uno después del otro, para que no coincidan simultáneamente las altas corrientes de conexión de los transformadores, que pueden hacer

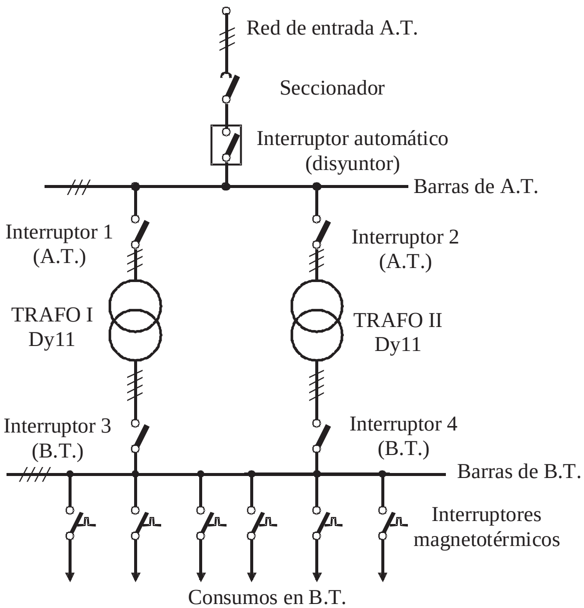


Figura 3.50. Disposición de un Centro de Transformación con dos transformadores en paralelo.

disparar el disyuntor de entrada). A continuación se cierran los interruptores 3 y 4 de B.T. de los transformadores con lo que se alimenta la barra secundaria de B.T. El cierre posterior de los interruptores magnetotérmicos que se unen a esta barra irá dando suministro de energía eléctrica a los diversas cargas de la industria. La desconexión de la instalación se realiza actuando sobre los aparatos de maniobra mencionados pero en orden inverso al comentado para realizar la conexión.

Debe señalarse que el acoplamiento en paralelo de transformadores presenta el «peligro» de que pueden desconectarse lo mismo del lado primario como del lado secundario. Imaginemos que por una avería se desea desconectar el transformador II de la instalación, alimentando la industria solamente con el transformador I. Evidentemente se deberá abrir primeramente el interruptor 4 de B.T. de este transformador y después el interruptor 2 del lado de A.T. y así quedará fuera de servicio. Si por error solamente se abre el interruptor 2 de A.T. y no se abre el interruptor 4 de B.T, debe destacarse que ¡el transformador II no ha quedado aislado!. Obsérvese analizando el circuito de la Figura 3.50 que en esta situación el transformador II tendría tensión en el lado de A.T. (pese a haber abierto el interruptor 2 de A.T. y esto se debe a que vuelve ***tensión de retorno del transformador I)****. Esto quiere decir que el transformador 2 estaría trabajando en sentido inverso, recibiendo tensión de la barra secundaria (por medio del transformador 1) al estar cerrado el interruptor 4, por lo que existiría tensión en sus terminales primarios. Esto lógicamente representa un gran peligro para el operario, que en estas circunstancias, no debe tocar los terminales del transformador II. Es por ello, que si por cualquier motivo deba dejarse fuera de servicio un transformador que está en paralelo con uno u más transformadores,* ***debe asegurarse que se ha procedido a abrir los dos interruptores del transformador considerado*** *y que debe separarse de la red, tanto del lado de A.T. como del lado de B.T.*

Ejemplo de aplicación 3.12

Dos transformadores monofásicos tienen las siguientes características:

TRANSFORMADOR I: 1.000/100 V ; 100 kVA ; $\varepsilon_{RCC} = 3\,\%$, $\varepsilon_{RCC} = 4\,\%$; $\varepsilon_{CC} = 5\,\%$

TRANSFORMADOR II: 1.000/100 V ; 200 kVA ; $\varepsilon_{RCC} = 3\,\%$, $\varepsilon_{XCC} = 4\,\%$; $\varepsilon_{CC} = 5\,\%$

Se conectan en paralelo para alimentar una carga de 150 kVA, con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular: a) impedancias internas de ambos transformadores; b) valores de las corrientes secundarias, potencias activas, reactivas y aparentes suministradas por cada transformador. NOTA: Se supone la tensión secundaria constante e igual a 100 V.

Solución

a) **Transformador I**

La intensidad asignada del primario es:

$$I_{1n} = \frac{100.000}{1.000} = 100 \text{ A}$$

y teniendo en cuenta las expresiones (3.76) se obtiene:

$$0{,}03 = \frac{R_{CCI}\,100}{1.000} \quad ; \quad 0{,}04 = \frac{X_{CCI}\,100}{1.000}$$

de donde se deduce $R_{CCI} = 0{,}3\ \Omega$; $X_{CCI} = 0{,}4\ \Omega$, que expresan los valores de la impedancia de cortocircuito (interna) del transformador I reducida al primario.

Transformador II

Operando de una forma similar, se obtiene:

$$R_{CCII} = 0{,}15\ \Omega \quad ; \quad X_{CCII} = 0{,}2\ \Omega$$

b) El circuito equivalente del acoplamiento en paralelo, reducido al primario, será el indicado en la Figura 3.51.

La corriente suministrada por el conjunto (reducida al primario), vale:

$$I_T = \frac{150.000}{1.000} = 150 \text{ A}$$

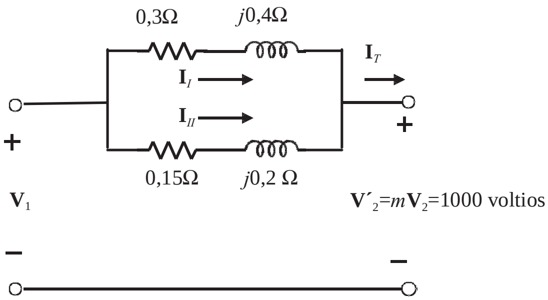


Figura 3.51.

Si se toma $\mathbf{V}_2'$ como referencia de fase, la intensidad anterior expresada en forma compleja será:

$$\mathbf{I}_T = 150 \angle -37°$$

La igualdad en las caídas de tensión de ambos transformadores se expresará:

$$(0{,}3 + j\,0{,}4)\ \mathbf{I}_I = (0{,}15 + j\,0{,}2)\ \mathbf{I}_{II}$$

Como además el primer lema de Kirchhoff en el nudo A indica que:

$$\mathbf{I}_I + \mathbf{I}_{II} = 150 \angle -37°$$

se obtienen como soluciones:

$$\mathbf{I}_I = 50 \angle -37° \quad ; \quad \mathbf{I}_{II} = 100 \angle -37°$$

que son las corrientes reducidas al principio que circulan por cada transformador y teniendo en cuenta que la relación de transformación es $m_I = m_{II} = 1000/100 = 10$ corresponden a unas corrientes secundarias:

$$\mathbf{I}_{I2} = m\mathbf{I}_I = 500 \angle -37° \quad ; \quad \mathbf{I}_{II2} = m\mathbf{I}_{II} = 100 \angle -37°$$

En consecuencia y al haber tomado la tensión secundaria como referencia de fase, las potencias aparentes complejas que suministra cada transformador son respectivamente:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{V}_2\mathbf{I}^*_{I2} = 100 \angle 0° \cdot 500 \angle 37° = 50 \angle 37° \text{ kVA} = 40 \text{ kW} + j30 \text{ kVAr}$$

$$\mathbf{S}_{II} = \mathbf{V}_2 I^*_{II2} = 100 \angle 0° \cdot 1000 \angle 37° = 100 \angle 37° \text{ kVA} = 80 \text{ kW} + j60 \text{ kVAr}$$

es decir

$$S_I = 50 \text{ kVA} \quad ; \quad S_{II} = 100 \text{ kVA}$$

y las potencias activas y reactivas son respectivamente:

$$P_I = 40 \text{ kW} \quad ; \quad Q_I = 30 \text{ kVAr} \quad ; \quad P_{II} = 80 \text{ kW} \quad ; \quad Q_{II} = 60 \text{ kVAr}$$

siendo los índices de carga:

$$C_I = \frac{S_I}{S_{In}} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \quad ; \quad C_{II} = \frac{S_{II}}{S_{IIn}} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$$

este resultado está de acuerdo con lo previsto, ya que las caídas relativas de tensión ε_{CC} coinciden en ambos transformadores.

3.13. AUTOTRANSFORMADORES

El autotransformador es un transformador especial formado por un devanado continuo, que se utiliza a la vez como primario y secundario, por lo que las tensiones de alimentación y salida no van aisladas entre sí. A diferencia del transformador de dos devanados, un autotransformador transfiere energía entre los dos circuitos, **en parte por acoplamiento magnético y en parte por conexión eléctrica directa**. Para ver la comparación con el transformador se va a considerar el esquema de la Figura 3.52; en *a*) se muestra un transformador de dos devanados separados y en *b*) un autotransformador, ambos con las mismas tensiones de entrada y salida. Se supondrá que las dos máquinas son ideales y que no existen caídas de tensión, corriente de vacío, etc. Igualmente, se supone que son iguales los flujos en el núcleo y la densidad de corriente en los devanados.

Se observa que el transformador necesita N_1 espiras en el primario y N_2 espiras en el secundario; en cambio, el autotransformador sólo emplea N_1 espiras; en una parte de ellas, N_1-N_2, circula la corriente I_1, mientras que por la otra, que es una derivación que recoge N_2 espiras, circula una corriente I_2-I_1 en el sentido indicado en la Figura 3.52*b*. El peso en cobre en cada uno de los casos es proporcional al número de espiras y a la corriente que las recorre. (Se debe tener en cuenta que, fijando una densidad de corriente J, la sección de los conductores es proporcional a la intensidad que circula por ellos, ya que $J = I/S$.) Teniendo en cuenta además que se verifica:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} \qquad (3.110)$$

la relación entre el peso de cobre como autotransformador G_a y como transformador G_t será:

$$\frac{G_a}{G_t} = \frac{I_1(N_1 - N_2) + (I_2 - I_1)\,N_2}{I_1N_1 + I_2N_2} = 1 - \frac{V_2}{V_1} \qquad (3.111)$$

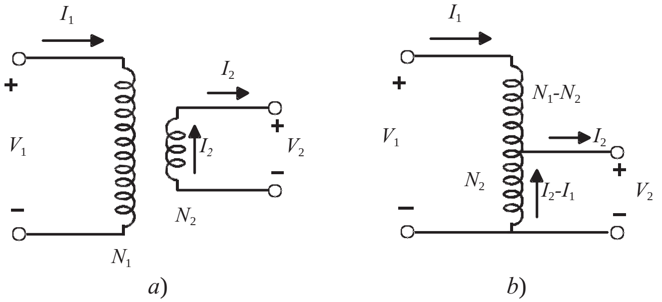


Figura 3.52. Comparación entre un transformador y un autotransformador.

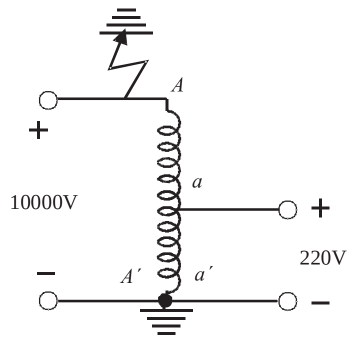


Figura 3.53. Falta a tierra en un autotransformador.

lo que indica un ahorro en material para el autotransformador frente al transformador. Por ejemplo, si $V_1/V_2 = 2$, se obtiene una economía en el cobre de un 50 por 100. La reducción en el número de espiras total permite también emplear circuitos magnéticos con menos «ventana», lo que supone un menor peso en hierro. El autotransformador tiene en consecuencia menos pérdidas en el cobre y en el hierro, lo que mejora el rendimiento y la caída de tensión frente al transformador.

El autotransformador, sin embargo, presenta dos inconvenientes fundamentales: por una parte, debido a su menor resistencia y reactancia (al existir menos espiras), resulta un bajo valor de la caída ε_{CC}, lo que supone en caso de una falta de cortocircuito, de acuerdo con (3.63), corrientes más elevadas; por otra parte, si la relación de transformación es muy elevada, por ejemplo, 10.000/220 V, tiene el inconveniente (Fig. 3.53) de presentar un borne común a los arrollamientos de A.T. y B.T. ($A' = a'$).

Supóngase, por ejemplo, que el terminal *A* por un accidente queda conectado a tierra; en consecuencia, los terminales de B.T. presentan en a' y a unas d.d.p. respecto de tierra de 10.000 V y 9.780 V, respectivamente. Este inconveniente se puede evitar conectando a tierra el borne común $A' = a'$; sin embargo, el problema puede volver a reproducirse si por un fallo se queda el circuito abierto entre a y a' (ya que el terminal a quedaría al mismo potencial que A respecto de tierra, es decir, a 10.000 V). Debido a estos graves inconvenientes, se suele limitar el uso de los autotransformadores a los casos en que no exista mucha diferencia entre las tensiones V_1 y V_2. En cualquier caso, se está obligado conectar a tierra el borne común de ambos devanados.

En los laboratorios es muy frecuente tener un tipo de autotransformador de relación variable, donde el terminal a se mueve mediante un cursor, lo que permite obtener diversas tensiones de salida a partir de una tensión primaria constante. El aparato se conoce vulgarmente por el nombre de **variac (*vari*able *a*lternating *c*urrent**, es decir, corriente alterna variable*)*.También se construyen autotransformadores de tipo trifásico con conexión Yy.

3.14. TRANSFORMADORES CON TOMAS

En las redes de energía eléctrica es necesario un control de la tensión por varios motivos: 1) para ajustar o regular la tensión de alimentación o de suministro a los usuarios dentro de los límites legales prescritos; 2) para controlar el flujo de potencia activa y reactiva en la red; 3) para ajuste de la tensión, de acuerdo con los correspondientes cambios en la carga. Estos cambios pueden ser de tipo estacional (5-10 por 100), diario (3-5 por 100) y de corta

duración (1-2 por 100) y se realizan modificando la relación de transformación de los transformadores del sistema eléctrico a base de cambiar el número de espiras por medio de tomas en los devanados. Los ajustes o modificaciones ocasionales se realizan con el transformador sin tensión. Los cambios diarios o de corta duración se realizan con el transformador en carga.

3.14.1. Tomas de regulación

Para regular la tensión de un transformador monofásico se establecen diversas derivaciones, llamadas **tomas**, en uno de los arrollamientos (Fig. 3.54) y al propio tiempo se dispone de un medio para conmutar. La recomendación UNESA prescribe cinco posiciones de regulación con tensiones por escalón del 2,5 por 100 y un límite mínimo de ±5 por 100. Es decir, +5 por 100, +2,5 por 100, 0, −2,5 por 100, −5 por 100. Las tomas pueden preverse en uno u otro de los arrollamientos.

En caso de transformadores trifásicos (Fig. 3.55) se pueden disponer las tomas en las entradas de las fases, o se puede variar N_1 por corrimiento del punto neutro. Desde el punto de vista económico, no es indiferente el empleo de cualquiera de las posibles soluciones técnicas por varios motivos:

1. *No es económico disponer las tomas en baja tensión o, en general, en arrollamientos con tensiones relativamente bajas. Las derivaciones de los devanados y los contactos de los conmutadores deberían preverse para elevadas intensidades. Es más económico conmutar en alta.*
2. *Si ambos devanados son para alta tensión, desde el punto de vista del conmutador, pueden ser aceptables cualquiera de las dos soluciones. En tal caso, es preferible disponer la conmutación en el arrollamiento correspondiente a la tensión variable. El objeto es poder proyectar el transformador con la mayor economía posible, es decir, trabajando en todos los casos con la misma inducción B en el núcleo.*

Un aspecto técnico adicional que decide la colocación de las tomas en el devanado de A.T. es que cuando se trata de transformadores con una tensión reducida en el lado de B.T., al tener entre las tomas un número entero de espiras, el escalón mínimo que puede conseguirse en B.T. puede ser superior al exigido. Por ejemplo, considérese un transformador con una tensión de 260 V/fase y 15 V/espira: si se ponen tomas entre dos espiras consecutivas se obtiene un cambio relativo de:

$$\frac{15}{260} = 5{,}77\,\%$$

que representa el escalón mínimo posible y supone un cambio sustancial en la variación de tensión del transformador.

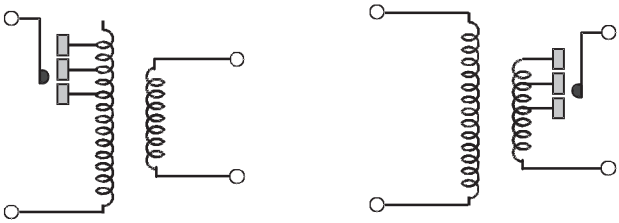


Figura 3.54. Transformador con tomas en el primario o en el secundario.

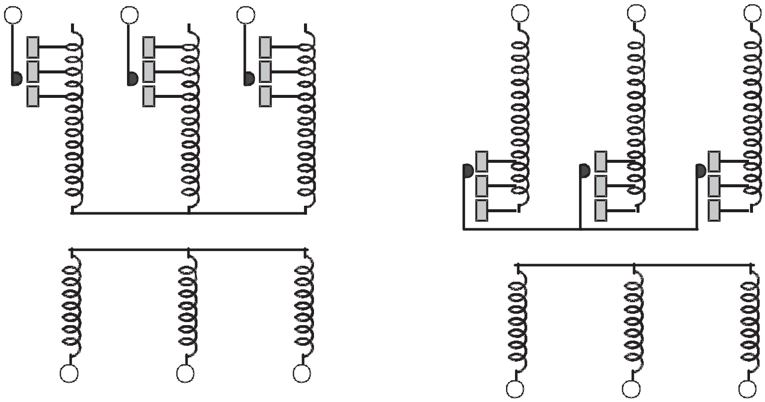


Figura 3.55. Transformadores trifásicos con tomas.

Es preciso destacar que, si un arrollamiento con tomas tiene una sección constante (todas sus tomas están previstas para la máxima intensidad asignada I_{1n}), la potencia del transformador será diversa para cada toma. Por ejemplo, si se tienen tres tomas: +5 por 100, 0, −5 por 100, en la toma superior la potencia que puede dar el transformador es 1,05 $V_{1n}I_{1n}$ para la toma normal se tendrá $V_{1n}I_{1n}$ y para la toma inferior 0,95 $V_{1n}I_{1n}$.

(Puede proyectarse el transformador con secciones escalonadas, de forma que las tomas estén preparadas para intensidades inversamente proporcionales a las tensiones. Así se tienen los **transformadores de potencia constante**, frente a los anteriores de **intensidad constante**.)

Se entenderá por potencia asignada de un transformador la correspondiente a la toma normal. Ésta determinará la relación de transformación asignada m.

En principio, puede establecerse cualquier número de tomas, y así:

$$30.000 \text{ V} \pm 2{,}5\,\% \pm 5\% - 7{,}5\,\%/380 - 220 \text{ V}$$

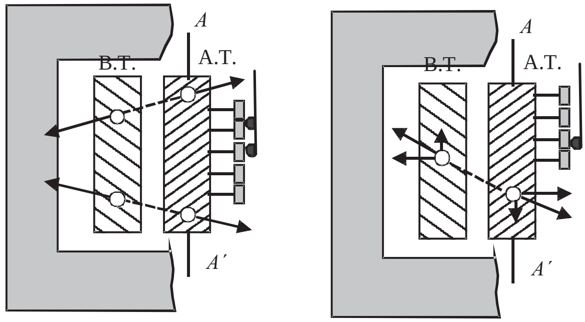
que representa un campo de regulación desde +5 por 100 a −7,5 por 100. Desde el punto de vista económico, conviene no excederse innecesariamente en el margen de regulación, ya que encarece el precio del transformador. Además existe otra razón de seguridad en relación a los cortocircuitos.

Un aspecto importante a tener en cuenta es la situación de las tomas frente a la posición geométrica de los devanados. Conviene que las tomas se realicen (Fig. 3.56*a*) en la parte central del devanado de A.T. del transformador (a base de modificar la distancia entre los **dedos** de las tomas), pues con esto se logra reducir los esfuerzos axiales, que pueden ser muy fuertes en casos de cortocircuitos. En la Figura 3.56*b* se muestra un esquema de conexión incorrecto, ya que se producen por asimetría fuertes esfuerzos axiales que en el caso *a*) quedan contrarrestados.

3.14.2. Elementos de conmutación

El paso de una tensión a otra puede realizarse en forma simple (económica) o en forma más práctica. Las modalidades de conmutación son:

1. Con transformador sin tensión.
2. Con transformador en carga.



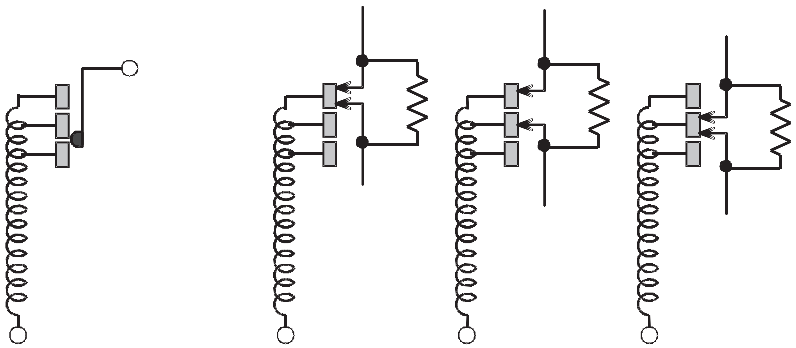
a) CORRECTO *b*) INCORRECTO

Figura 3.56. Situación geométrica de las tomas.

Lo más económico es disponer los extremos de las tomas hasta un tablero en el interior de la caja o cuba del transformador, accesible mediante un registro. Una mejora sin gran encarecimiento consiste en hacer accesibles las diversas tomas desde el exterior (tomas sobre tapas). Puede lograrse disponiendo tantos juegos de aisladores sobre tapa como derivaciones existan, o bien dando salida por un mismo pasatapa a todas las derivaciones de una misma columna, dadas las escasas tensiones que suelen existir entre tales tomas. Cabe una solución mixta entre las anteriores, es decir, de las diversas tomas sobre tablero conectar, con salida al exterior, aquellas que, en un sector de trabajo determinado, se cree que van a tener más utilización.

Otra mejora consiste en disponer conmutadores que permitan la maniobra desde el exterior, sin tensión. Su cuerpo de conmutación suele estar sumergido en el aceite de la caja, ya que no realiza cortes de corriente. En ocasiones no es tolerable la interrupción del servicio. En otras situaciones, dada la frecuencia con que se prevé realizar los cambios de tomas, es conveniente tener que proceder a previas interrupciones. Existen casos en que las conmutaciones de tensiones se realizan, normalmente, en el proceso de trabajo. Interesa, por consiguiente, conmutadores o **reguladores de tensión bajo carga**.

La necesidad de no interrumpir el paso de corriente (carga) crea el problema que se muestra en la Figura 3.57. Al estar el contacto móvil pasajeramente puenteando unas espiras del arrollamiento, se crea localmente en ellas un cortocircuito. La forma de evitarlo se ve en *b*). Se ha representado la operación de conmutación en tres tiempos. Los dos contactos móvi-



a) Paso entre tomas directo *b*) Paso entre tomas en tres tiempos

Figura 3.57. Detalle del funcionamiento del cambiador de tomas en carga.

les están unidos a través de una impedancia (puede ser una bobina o incluso una resistencia, dado el breve tiempo de conmutación) de valor reducido pero suficiente para moderar la corriente de cortocircuito. El proceso completo de la conmutación está mecánicamente establecido, de forma que sea brusco y completo, es decir, independiente de la voluntad del operador. Al existir cortes de arco, se producirán alteraciones del aceite. Esto hace necesario disponer la conmutación en un departamento con aceite separado del resto. Es preciso evitar la difusión de los productos del arco.

3.15. TRANSFORMADORES DE MEDIDA

En la práctica de la Electrotecnia es frecuente el empleo de tensiones y corrientes elevadas que conviene medir. Sin embargo, no es posible proceder a una conexión directa de los aparatos de medida a los circuitos de A.T., debido al peligro que presentaría el personal que se acercara a los instrumentos. Los transformadores de medida permiten separar ambos circuitos, adaptando al mismo tiempo las magnitudes de la red a la de los instrumentos, que generalmente están normalizados en unos valores de 5 A para los amperímetros y 110 V para los voltímetros (a plena escala).

Para la conexión de los amperímetros y *bobinas amperimétricas* de los instrumentos se emplean los denominados **transformadores de corriente**, mientras que para la conexión de los voltímetros y *bobinas voltimétricas* se emplean los **transformadores de tensión**. Unos y otros deben garantizar el aislamiento necesario para la seguridad del personal, y además deben reproducir con la mayor precisión las magnitudes primarias (de acuerdo con la relación de transformación correspondiente), para no dar lugar a errores en las medidas efectuadas con los aparatos. Las características que definen un transformador de medida vienen recogidas en la Norma UNE 21088.

3.15.1. Transformadores de tensión

Su forma de funcionamiento y conexión es análoga a la de los transformadores de potencia. En la Figura 3.58 se muestra su conexión en **paralelo** con la red alimentando un voltímetro (en general, a su secundario se conectan en **paralelo** todas las bobinas voltimétricas de los aparatos de medida). A diferencia con los transformadores de potencia, debido a la alta impedancia de la carga conectada, el transformador de tensión funciona casi en vacío, y de esta forma la caída de tensión interna es muy pequeña. Además, y como muestra la Figura 3.58, un borne de su secundario debe conectarse a tierra para prevenir el peligro de un contacto accidental entre primario y secundario. El transformador de tensión debe proporcionar una tensión secundaria proporcional a la tensión primaria. Si se tiene en cuenta la relación existente entre ambas tensiones y la corriente de carga, de acuerdo a la expresión (3.72) resulta:

$$V_1 - V_2' = R_{cc} I_2' \cos \varphi + X_{cc} I_2' \operatorname{sen} \varphi \qquad (3.112)$$

Idealmente conviene que se cumpla:

$$V_1 = V_2' \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{V_1}{K_v} \qquad (3.113)*$$

* Al hablar de transformadores de medida de tensión se prefiere denominar a la relación de transformación K_v en lugar de m, que se utiliza en transformadores de potencia.

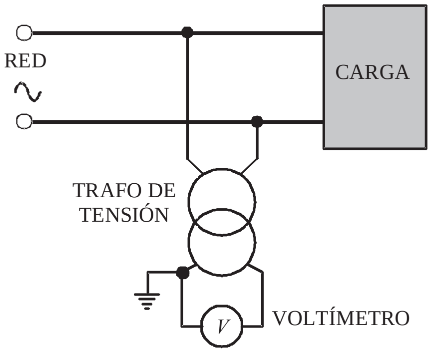


Figura 3.58. Transformador de tensión alimentando un voltímetro.

lo que indica, de acuerdo con (3.112), que debe procurarse que las caídas de tensión sean lo más mínimas posibles. Por ello estos transformadores deben presentar una reactancia pequeña y una corriente de carga reducida, lo cual obliga a diseñar el sistema con poco flujo de dispersión y un circuito magnético que necesite una pequeña corriente de vacío. Las tensiones primarias de los transformadores de tensión están normalizadas en los valores asignados siguientes: 110, 220, 385, 440, 2.200, 3.300, 5.500, 6.600, 11.000, 13.200, 16.500, 22.000, 27.500, 33.000, 44.000, 55.000, 66.000, 110.000, 132.000, 220.000, 396.000. La tensión secundaria asignada está normalizada en 110 voltios. Los transformadores de tensión se definen según *su carga asignada en VA*, denominada también *potencia de precisión*, que es la máxima carga que puede conectarse a su secundario (teniendo en cuenta también la potencia disipada en los hilos de conexión), para que el error de la medida esté comprendido dentro de los márgenes indicados por el constructor. Los valores normales de la potencia de precisión para un f.d.p. de 0,8 son: 10, 15, 25, 30, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 500 VA. Al hablar de transformadores de medida de tensión también se definen los siguientes tipos de errores:

a) **Error de relación o de tensión:** que indica la desviación porcentual de la tensión realmente existente en el secundario, V_2, con respecto a la que debería existir si el transformador fuera ideal, V_1/K_v, es decir:

$$\varepsilon_v = \frac{V_2 - V_1/K_v}{\dfrac{V_1}{K_v}} \cdot 100 \tag{3.114}$$

b) **Error de fase o de ángulo**: que es la diferencia de fase existente entre los vectores V_1 y V_2, y se mide en minutos. Este error tiene importancia cuando se trata de medir la energía (por ejemplo, en el caso de que el secundario del transformador de tensión alimenta la bobina voltimétrica de un vatímetro o un contador, ya que entonces altera el valor real del ángulo formado por V_1 e I_1).

De acuerdo con estos errores, se dispone en la práctica de las siguientes **clases de precisión**: **0,1; 0,2; 0,5; 1;3**, que indican el valor máximo de ε_v permitido cuando el transformador se carga con su potencia asignada y un f.d.p. de 0,8 inductivo (en la práctica se indica también el valor del error de fase a que corresponde, en minutos).

En la Tabla 3.5 se indican los valores de los consumos en VA de los aparatos de medida más frecuentes.

Tabla 3.5. Consumos en VA de los aparatos de medida que se pueden conectar a un trafo de tensión

Aparatos que se pueden conectar a un transformador de tensión	*Consumo aproximado en VA*
Voltímetros:	
Indicadores	2-6
Registradores	10-25
Vatímetros:	
Indicadores	1-4
Registradores	3-15
Fasímetros:	
Indicadores	4-5
Registradores	15-20
Contadores	3-5
Frecuencímetros:	
Indicadores	1-5
Registradores	10-15
Relés:	
de máxima tensión	10-15
temporizados de máxima tensión	25-35
direccionales	25-40
de mínima tensión	5-15
de distancia	10-30

3.15.2. Transformadores de corriente

Tienen por misión reducir la corriente de la red a valores más apropiados a las escalas de los instrumentos (5 A en general y a veces también 1 A a plena escala). Se conectan en serie con la línea. En la Figura 3.59 se muestran los dos tipos de símbolos más empleados.

En el secundario se conectan en **serie** los amperímetros y bobinas amperimétricas de los aparatos de medida. Debido a la baja impedancia de estos aparatos, los transformadores de intensidad trabajan prácticamente en cortocircuito, por ello se emplean bajas inducciones en

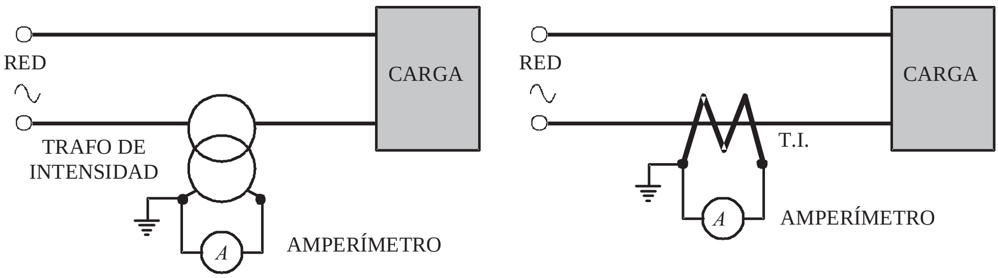


Figura 3.59. Transformador de intensidad. Forma de conexión y representación.

el núcleo (<3.000 gauss, es decir, 0,3 Teslas). Según indica la fórmula (3.12), la relación entre las corrientes secundaria, primaria y de vacío es:

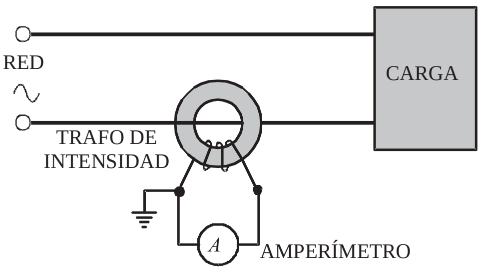
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2' + \mathbf{I}_0 \quad ; \quad \mathbf{I}_2' = \frac{\mathbf{I}_2}{m} \tag{3.115}$$

Idealmente se debe cumplir:

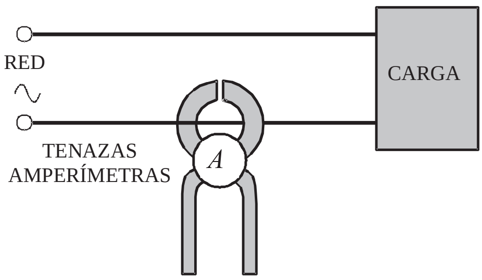
$$I_1 = I_2' = K_i \cdot I_2 \tag{3.116}$$

donde se ha denominado K_i a la relación entre las corrientes asignadas de primario y secundario. Para que se cumpla (3.116) es preciso que el circuito magnético esté muy bien diseñado para hacer despreciable I_0 frente a I_1 o I_2'. Sin embargo, en este tipo de transformador es interesante observar que no influyen en la medida los posibles flujos de dispersión. De ahí que se empleen transformadores como indica la Figura 3.60*a*, donde se muestra un primario que se reduce a un solo conductor que pasa por el interior del núcleo magnético. En redes de baja tensión se utiliza también, por su comodidad, un tipo de transformador de intensidad denominado de **tenaza** o de **pinzas** (Fig. 3.60*b*), que permite medir la corriente de una línea sin necesidad de interrumpir su funcionamiento, a base de abrir las tenazas e introducir dentro el cable conductor, que actuará como devanado primario (1 espira); el arrollamiento secundario alimenta un amperímetro incorporado generalmente en el mismo aparato, existiendo la posibilidad de obtener varias escalas conmutando el juego de espiras de este devanado.

En los transformadores de intensidad, la f.m.m. primaria está contrarrestada por la f.m.m. secundaria; si por cualquier circunstancia se abriera este último circuito, de acuerdo con (3.115) se tendría $I_1 = I_0$; es decir, toda la f.m.m. del primario se convertiría en f.m.m. de excitación, la cual no ha variado porque I_1 es una corriente que depende de la red, y esto hace crecer peligrosamente el flujo, lo cual lleva consigo un aumento en las pérdidas en el hierro y en las tensiones del secundario (peligrando la vida de los aislantes y la seguridad del personal). En consecuencia, **debe evitarse terminantemente dejar en circuito abierto un transformador de intensidad**. Si se desea cambiar una carga (por ejemplo, el amperímetro), se tienen dos soluciones: o se interrumpe el servicio de la línea para proceder al cambio necesario, o se puede realizar la operación sin desconectar la red, si previamente se **cortocircuita** el secundario del transformador de intensidad. Si los transformadores de intensidad se conectan a redes de A.T. es preciso unir uno de los bornes secundarios a tierra para prevenir el peligro de contacto accidental entre los devanados primario y secundario. Las corrientes primarias de los transformadores de intensidad están normalizadas en los valores asignados siguientes: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400, 500, 600, 750, 1.000, 2.000, 3.000, 4.000,



a) Trafo de intensidad con N_I=1



b) Tenazas amperimétricas

Figura 3.60. Tipos de transformadores de intensidad.

6.000, 10.000 amperios. La corriente secundaria asignada está normalizada en 5 A y también se utiliza la escala de 1 A. Los transformadores de intensidad, de forma análoga a los de tensión, se definen según sea el valor de su potencia asignada en VA (existen de 10, 15, 30, 50, 75, 100, 150, 200, 300 y 400 VA), que es la máxima carga que puede conectarse a su secundario para que el error de la medida esté comprendido en los valores indicados por el fabricante. Y así se definen:

a) **Error de intensidad o de relación**: que indica la desviación porcentual de la corriente realmente existente en el secundario, I_2, con respecto a la que debería existir si el transformador fuera ideal, I_1/K_i, es decir:

$$\varepsilon_i = \frac{I_2 - I_1/K_i}{\dfrac{I_1}{K_i}} \cdot 100 \qquad (3.117)$$

b) **Error de fase**: que es la diferencia de fase existente entre los vectores I_1 e I_2 y se expresa en minutos.

Las clases de precisión son idénticas a las indicadas para los transformadores de tensión, y las potencias consumidas por los aparatos de medida más frecuentes se indica en la Tabla 3.6.

En la práctica los transformadores de corriente y tensión se encuentran combinados en las instalaciones para medir: intensidad, tensión, potencia, energía, etc. En la Figura 3.61 se muestra una disposición típica (se ha elegido una red monofásica para dar mayor sencillez al esquema). Se observa que las bobinas amperimétricas están conectadas en serie, mientras que las voltimétricas van dispuestas en paralelo. Para mayor claridad se ha dibujado con trazo más grueso el circuito amperimétrico.

Tabla 3.6. Consumos en VA de aparatos de medida que se conectan en serie

Aparatos que se pueden conectar a un transformador de tensión	*Consumo aproximado en VA*
Amperímetros:	
Indicadores	0,25-2
Registradores	1,5-9
Vatímetros:	
Indicadores	1-4
Registradores	1,5-8
Fasímetros:	
Indicadores	2-6
Registradores	6-12
Contadores	0,5-3
Relés:	
de sobreintensidad, instantáneos	1-10
de sobreintensidad, temporizados	1-5
direccionales	1,5-10
diferenciales	3-12
de distancia	6-20

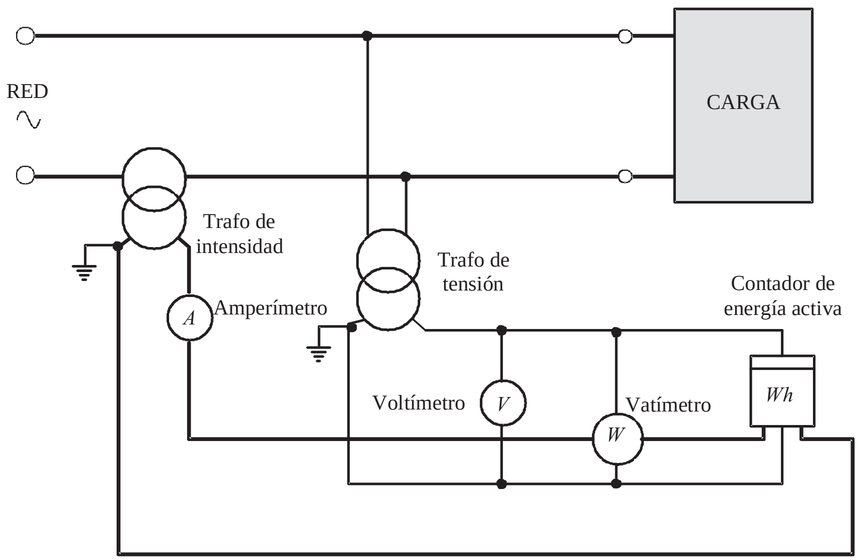


Figura 3.61. Transformadores de intensidad y tensión en un equipo de medida.

En las instalaciones eléctricas existen también transformadores de intensidad y tensión que se emplean para alimentar aparatos de protección automática (relés) de los diversos equipos del sistema: generadores, transformadores, etc.

*3.16. APÉNDICE: TRANSFORMACIONES ESPECIALES

Como complemento a este capítulo se exponen a continuación dos tipos de transformaciones que se han utilizado o se utilizan actualmente en la práctica para modificar el número de fases de una instalación empleando transformadores.

3.16.1. Transformación trifásica a bifásica y viceversa. Conexión Scott

Es una conexión específica de dos transformadores monofásicos para convertir un sistema de tensiones trifásicas en bifásicas y viceversa. Esta disposición se debe al ingeniero americano Charles F. Scott, quien la inventó en 1894 cuando trabajaba en la Compañía Westinghouse y se basa en el hecho bien conocido de que en un sistema trifásico en estrella la tensión compuesta entre dos fases está en cuadratura con la tensión simple de la tercera fase (por ejemplo, V_{ST} forma 90° con V_{RN}). En la Figura 3.62 se muestra el esquema de conexiones y el diagrama fasorial de tensiones. Se dispone de dos transformadores monofásicos con el mismo número de espiras secundarias N_2, mientras que el número de espiras primarias están en la misma relación que la altura y la base de un triángulo equilátero; es decir, de acuerdo con la Figura 3.62, el transformador A tiene $\frac{\sqrt{3}}{2}N_1$ espiras, mientras que el transformador B tiene N_1 espiras en su primario. De este modo las respectivas relaciones de transformación son:

$$m_a = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}N_1}{N_2} \quad ; \quad m_b = \frac{N_1}{N_2} \tag{3.118}$$

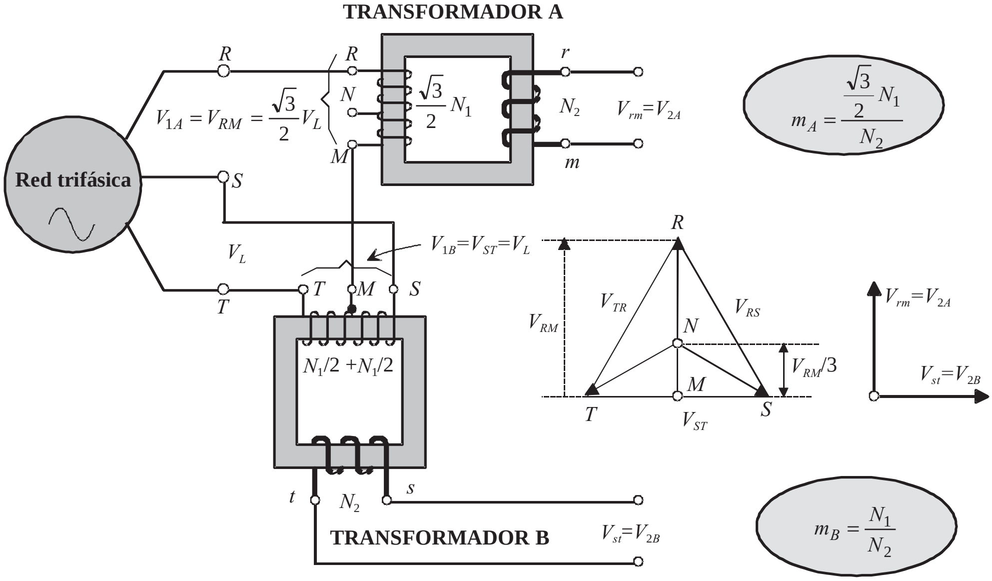


Figura 3.62. Transformación de trifásica a bifásica. Conexión Scott.

Si se denomina V_L a la tensión compuesta del sistema trifásico, y se toma como referencia de fases la tensión compuesta $\mathbf{V}_{ST}$, el valor complejo de la tensión primaria aplicada al transformador A es:

$$\mathbf{V}_{1a} = \mathbf{V}_{RM} = \frac{\sqrt{3}}{2} V_L \angle 90° \tag{3.119}$$

y de este modo el valor complejo de la tensión secundaria del transformador A será:

$$\mathbf{V}_{2a} = \frac{\mathbf{V}_{1a}}{m_a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} V_L \angle 90°}{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{N_1}{N_2}} = \frac{N_2}{N_1} V_L \angle 90° \tag{3.120}$$

De un modo similar, el valor complejo de la tensión primaria aplicada al transformador B es la tensión compuesta trifásica $\mathbf{V}_{ST}$, cuya expresión fasorial, de acuerdo con la Figura 3.59, es:

$$\mathbf{V}_{1b} = \mathbf{V}_{ST} = V_L \angle 0° \tag{3.121}$$

y de este modo el valor complejo de la tensión secundaria del transformador B será:

$$\mathbf{V}_{2b} = \frac{\mathbf{V}_{1b}}{m_b} = \frac{V_L \angle 0°}{\frac{N_1}{N_2}} = \frac{N_2}{N_1} V_L \angle 0° \tag{3.122}$$

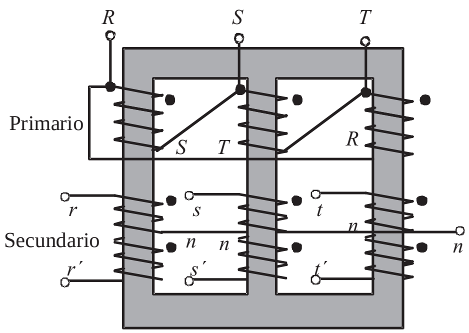
De acuerdo con los resultados (3.120) y (3.122), se obtienen dos tensiones secundarias de igual módulo y desfasadas entre sí 90°; es decir, se ha transformado el sistema trifásico simétrico primario en un sistema bifásico secundario simétrico. En el caso de que interese la inclusión de un hilo neutro en el primario, se puede realizar mediante una toma en el punto *N* del primario del transformador A, y que de acuerdo con la construcción fasorial deberá situarse a 1/3 de la altura (baricentro del triángulo de tensiones), lo que significa que el tramo *MN* tiene 1/3 de las espiras totales del tramo *RM*.

La conexión Scott se empleó inicialmente para transformar las corrientes bifásicas de los alternadores de la central del Niágara (instalación que fue la primera en Estados Unidos en la que se utilizó la c.a. y construida por la Compañía Westinghouse, que se inauguró en 1896) en un sistema trifásico. Se ha utilizado también la conexión Scott en tracción eléctrica, para alimentar dos tramos monofásicos de una red ferroviaria, de tal modo que si los consumos monofásicos de los trenes son iguales, sus corrientes se distribuyen por igual en las tres fases del sistema trifásico de entrada (primario). En la actualidad este tipo de montaje ha caído en desuso; de hecho, sirva como ejemplo actual el sistema que se utiliza para la alimentación de los ferrocarriles españoles de alta velocidad (AVE), que tienen una potencia por tren de 8.800 kW y utilizan centros de transformación trifásicos con una entrada de 132 kV (e incluso de 220 kV y 380 kV) y que por medio de dos transformadores monofásicos convencionales de 20 MVA alimentan a 25 kV dos catenarias distintas, para reducir al máximo los desequilibrios en el primario; la alimentación con estas elevadas tensiones hace que el impacto de los desequilibrios en la red primaria trifásica sea muy reducido. Los centros de transformación de estas líneas del AVE están separados entre sí de 40 a 50 km.

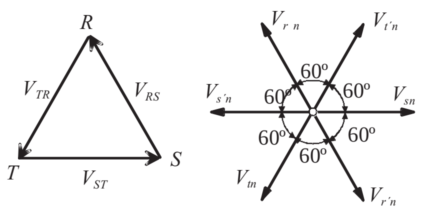
3.16.2. Transformación trifásica a hexafásica

Un sistema hexafásico consiste en seis tensiones desfasadas entre sí 60°. Existen varios procedimientos para obtener un sistema hexafásico a partir de un esquema trifásico. En la Figura 3.63*a* se muestra uno de los más utilizados. Se parte de un transformador de núcleo trifásico; el devanado primario está conectado en triángulo y el devanado secundario es una doble estrella. En la Figura 3.63*b* se muestran los fasores de las tensiones de cada una de las fases para primario y secundario. Téngase en cuenta para realizar esta construcción que todos los devanados de la misma columna tienen sus tensiones en fase, con las polaridades que prescribe el criterio de punto, es decir, los terminales que llevan punto tienen la misma polaridad instantánea. Así, en la primera columna la tensión primaria es $\mathbf{V}_{RS}$, por lo que la tensión secundaria $\mathbf{V}_{rn}$ estará en fase con $\mathbf{V}_{RS}$, mientras que la tensión secundaria $\mathbf{V}_{r'n}$ estará en oposición de fase respecto a $\mathbf{V}_{RS}$, y así se construyen los fasores de las demás tensiones del diagrama mostrado en la Figura 3.63*b*.

Este tipo de transformadores se utiliza en instalaciones rectificadoras para convertir la c.a. de una red de distribución de energía eléctrica en c.c., como por ejemplo: instalaciones de electrólisis, tracción eléctrica, instalaciones de c.c. en alta tensión (HVDC: *high voltage direct current*), ya que tienen la ventaja de que al aumentar el número de fases se reduce el número de armónicos. Para instalaciones de mucha potencia se utilizan también sistemas dodecafásicos. La conversión trifásica a dodecafásica se puede conseguir fácilmente mediante dos transformadores trifásicos, uno idéntico al de la Figura 3.63*a*, es decir, con conexión triángulo-doble estrella, y el otro con conexión estrella-doble estrella. De este modo, debido a que uno de los primarios está en estrella y el otro en triángulo, se consigue un desfase



a) Devanados del transformador



b) Diagramas fasoriales de tensiones

Figura 3.63. Transformación de trifásica en hexafásica.

de 30° entre el juego de los dos sistemas hexafásicos secundarios, por lo que se obtienen doce tensiones secundarias separadas entre sí 30°, lo que reduce enormemente el rizado de la c.c. obtenida a la salida de los rectificadores conectados a los secundarios. En el Capítulo 7, dedicado a los accionamientos eléctricos, se dan ejemplos del uso de estos transformadores en circuitos rectificadores.

PROBLEMAS

3.1. Un transformador monofásico de 100 kVA, 3.000/220 V, 50 Hz, tiene 100 espiras en el devanado secundario. Supuesto que el transformador es ideal, calcular: *a*) corrientes primaria y secundaria a plena carga; *b*) flujo máximo; *c*) número de espiras del arrollamiento primario.

[Resp.: *a*) 33,33 A, 454,55 A; *b*) 9,91 · 10^{-3} Wb; *c*) 1.364 espiras aprox.]

3.2. Un transformador monofásico de 10 kVA, 220/380 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: *Vacío:* 220 V, 2 A, 150 W (medidos en el lado de B.T.). *Cortocircuito:* 10 V, 26,32 A, 75 W (medidos en el lado de A.T.). Calcular: *a*) parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario; *b*) si el primario se alimenta a 220 V, calcular la tensión secundaria cuando el transformador funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

[Resp.: *a*) R_{Fe} = 323,5 Ω; X_μ = 117,02 Ω; R_{cc} = 0,036 Ω; X_{cc} = 0,122 Ω; *b*) 372 V.]

3.3. Un transformador monofásico de 125 kVA, 3.000/380 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: *Vacío:* 3.000 V, 0,8A, 1.000 W (medidos en el primario). *Cortocircuito:* 10 V, 300 A, 750 W (medidos en el secundario). Calcular: *a*) Componentes de la corriente de vacío. *b*) Potencia de pérdidas en el hierro y de pérdidas en el cobre a plena carga. *c*) Rendimiento a plena carga con f.d.p. unidad, 0,8 inductivo y 0,8 capacitivo. *d*) Tensión secundaria a plena carga, con f.d.p. anteriores (se supone que al primario se le aplica la tensión asignada de 3.000 V).

[Resp.: *a*) I_{Fe} = 0,334 A, I_μ = 0,727 A; *b*) P_{Fe} = 1.000 W, P_{cu} = 901,8 W; *c*) 98,5 %, 98,13 %, 98,13 %; *d*) 377,26 V, 371,47 V, 384,14 V.]

3.4. Un transformador monofásico de 75 kVA, 3.000/220 V, 50 Hz, necesita 200 V aplicados al primario para que circule la corriente asignada en cortocircuito, siendo la potencia absorbida en el ensayo de 2 kW. Determinar: *a*) Caída de tensión relativa y tensión secundaria correspondiente cuando trabaja a plena carga con f.d.p. unidad, 0,8 inductivo y 0,8 capacitivo. *b*) Si la potencia absorbida en vacío es de 1,5 kW, calcular el rendimiento a plena y media carga con f.d.p. 0,8.

[Resp.: *a*) 2,67 %, 214,13 V; 5,81 %, 207,21 V; −1,55 %, 223,4 V; *b*) 94,49 %, 93,75 %.]

3.5. En la Figura P.3.1*a* se muestra una red monofásica constituida por un alternador al principio de la instalación, que genera una tensión constante de 220 voltios y que a través de una línea de impedancia 0,3+*j*0,4Ω/hilo alimenta al final de la misma una impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$= 0,9+*j*1,2Ω. *a*) Calcular la tensión en la carga, la potencia activa que se consume en la carga, la potencia activa entregada por el alternador y el rendimiento de la instalación (definido éste como cociente de las dos potencias ante-

riores); *b*) Responder a las preguntas del apartado anterior, si se incluyen en la instalación dos transformadores ideales (véase Figura 3.1b), uno de ellos *T*1 situado al principio de línea, que es un transformador elevador de tensión con una relación de transformación $m_1 = 0{,}1$ y otro *T*2 situado a final de la línea y que es un transformador reductor de tensión con $m_2 = 10$. *Sugerencia*: El apartado *b*) se resuelve fácilmente reduciendo toda la red al lado de A.T., teniendo en cuenta tanto la transformación de la tensión del generador hacia este lado de la línea como la transformación de la impedancia de carga, (ésta se ve desde los terminales *A′B′* del primario del transformador *T*2, como $m^2\mathbf{Z}_L$).

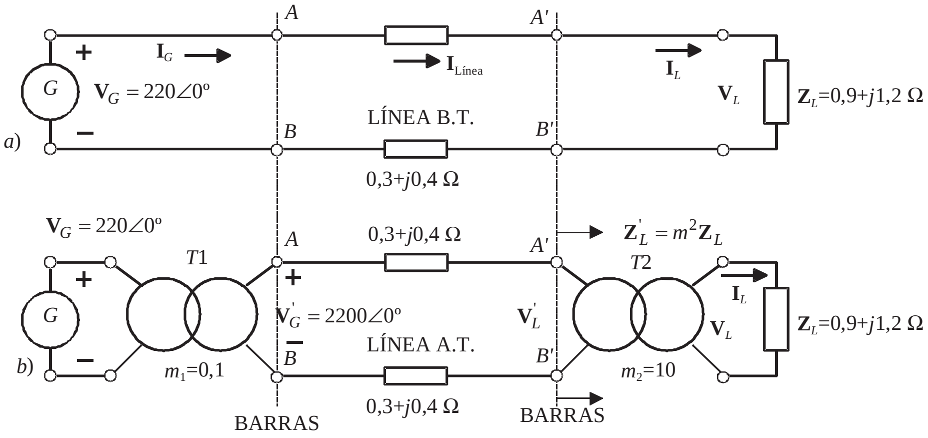


Figura P.3.1.

[Resp. *a*) 132 V; 6969,6 W; 11616 W; 60 % ; *b*) 218,54 V; 19.104,43 W; 19231,79 W; 99,34 %]

3.6. El rendimiento para un factor de potencia unidad de un transformador monofásico de 200 kVA, 3.000/380 V, es de 0,98 tanto para la plena carga como para media carga. El f.d.p. en vacío es de 0,2 y la caída de tensión relativa a plena carga, con un f.d.p. 0,8 inductivo, es del 4 por 100. Determinar los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario.

[Resp.: R_{Fe} = 6,61 kΩ; X_μ = 1,36 kΩ; R_{cc} = 0,61 Ω; X_{cc} = 2,19 Ω.]

3.7. El rendimiento máximo de un transformador monofásico de 500 kVA, 3.300/500 V, 50 Hz, es del 97 por 100 y ocurre para los 3/4 de la plena carga con f.d.p. unidad. Se observa en un ensayo de cortocircuito que son necesarios 330 V aplicados al primario para que circule en ese estado la corriente asignada por el transformador. Calcular la caída relativa de tensión a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

[Resp.: 7,51 %.]

3.8. Calcular los rendimientos de un transformador de 100 kVA para media carga, plena carga y uno y un cuarto de la plena carga, con f.d.p.: *a*) unidad; *b*) 0,8. Las pérdidas en el cobre a plena carga son de 1.000 W y las pérdidas en el hierro son de 1.000 W.

[Resp.: *a*) 97,56 %, 98,04 %, 97,98 %; *b*) 96,96 %, 97,56 %, 97,50 %.]

3.9. El rendimiento de un transformador monofásico de 100 kVA es de 93,02 por 100 cuando suministra la plena carga con un f.d.p. de 0,8 y de 94,34 por 100 a media carga con f.d.p. unidad. Calcular: *a*) Pérdida en el hierro; *b*) pérdida en el cobre a plena carga.

[Resp. *a*) 2 kW; *b*) 4 kW.]

3.10. Dos transformadores monofásicos de 100 kVA, 1.000/100 V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Las impedancias de cortocircuito reducidas al primario de cada uno son $Z_{ccI} = 0{,}3 + j\,0{,}4\ \Omega$ y $Z_{ccII} = 0{,}4 + j\,0{,}3\ \Omega$, respectivamente. Se desea alimentar a 100 V una carga de 150 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular las corrientes, potencias aparentes y activas suministradas por cada transformador.

[Resp.: $I_I = I_{II} = 757{,}6$ A; $S_{II} = SI_I = 75{,}76$ kVA ; $P_I = 53{,}57$ kW; $P_{II} = 66{,}43$ kW.]

3.11. Dos transformadores de 100 kVA, 1.000/100 V, 50 Hz, funcionan en paralelo. Los ensayos de cortocircuito de estos transformadores cuando funcionan con corriente asignada con los devanados de B.T. en cortocircuito dan los siguientes resultados:

Transformador	*Tensión aplicada*	*Potencia entrada*
I	30 voltios	1.200 vatios
II	90 voltios	1.800 vatios

a) Si se desea alimentar a 100 V una carga de 100 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, ¿cuál será el reparto de potencias aparentes y activas en cada transformador? *b*) ¿Cuál es la mayor potencia, con f.d.p. unidad, que pueden llevar los dos transformadores en paralelo sin sobrecargar ninguno de ellos?

[Resp.: *a*) 75,31 kVA, 67,5 kW, 25,1 kVA, 17,5 kW; *b*) 132,78 kVA.]

3.12. Un transformador de 40 kVA, 1.000/100 V, ha dado los siguientes resultados en un ensayo de cortocircuito: 51 V, 40 A, 400 W (medidas en el lado de A.T.). Se desea conectar en paralelo con otro transformador de 20 kVA, 1.000/100 V, que en un ensayo de cortocircuito ha dado: 42 V, 20 A, 245 W (medidas en el lado de A.T.). Indicar cómo se repartirán una potencia de 60 kVA con f.d.p. 0,8 inductivo.

[Resp.: Transformador I: 37,46 kVA, 29,15 kW; Transformador II: 22,72 kVA, 18,85 kW. Este transformador irá sobrecargado.]

3.13. Un transformador monofásico de 500 kVA, 15.000/3.000 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: *Vacío:* 15.000 V, 1,67 A, 4.000 W (medidos en el lado de A.T.). *Cortocircuito:* 750 V, 33,33 A, 10.000 W (medidos en el lado de A.T.): *a*) Calcular los parámetros del circuito equivalente del transformador reducido al primario; *b*) calcular las caídas relativas de tensión $\varepsilon_{R_{cc}}$, $\varepsilon_{X_{cc}}$, ε_{cc}. *c*) Hallar el rendimiento del transformador cuando funciona a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo. *d*) Calcular la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador y el rendimiento máximo para un f.d.p. unidad. *e*) Si se aplican 15.000 V al primario y se conecta una carga en el secundario que absorbe 100 A con f.d.p. 0,8 inductivo, ¿cuál será el valor de la tensión secundaria?, ¿y la caída relativa de tensión? *f*) Contestar a la pregunta anterior en el caso de que la carga absorba los 100 A con f.d.p. 0,8

capacitivo. *g*) Si se produce un cortocircuito en el secundario del transformador, ¿cuál sería el valor de la corriente primaria en régimen permanente? *h*) Se acopla en paralelo este transformador con otro de potencia doble, con la misma relación de la transformación 15.000/3.000 V y la misma caída relativa ε_{cc} pero su componente resistiva $\varepsilon_{R_{cc}}$ es mitad que la del transformador original. Si se desea alimentar una potencia total de 1.000 kVA con f.d.p. 0,6 inductivo, ¿cuáles serán los valores de las potencias activas y aparentes suministradas por cada transformador? ¿Cuáles serían los rendimientos de ambos transformadores en este caso si el segundo de ellos tiene una potencia de pérdidas en el hierro de 6 kW?

[Resp.: *a*) R_{Fe} = 56,18 kΩ, X_μ = 9,1 kΩ, R_{cc} = 9 Ω, X_{cc} = 20,63 Ω; *b*) $\varepsilon_{R_{cc}}$ = 2%; $\varepsilon_{X_{cc}}$ = 4,58%; ε_{cc} = 5%. *c*) 96,62%; *d*) 316,22 kVA; 97,53%; *e*) 2.921,74 V; ε_c = 2,61%; *f*) 3.020,66 V; ε_c = −0,69%; *g*) 666 A; *h*) Transformador I: 335,1 kVA, 236,5 kW, 96,5%; Transformador II: 670,2 kVA, 363,5 kW, 97,2%.]

3.14. Los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador monofásico de 10 kVA, relación 2.000/200 V, han dado los siguientes resultados: *Vacío:* Medidas realizadas en el lado de B.T. (secundario). Potencia consumida en vacío = 300 W; Tensión aplicada = 200 V; Corriente absorbida = 5 amperios. *Cortocircuito:* Medidas realizadas en el lado de A.T. (primario). Potencia absorbida = 500 W; Tensión aplicada = = 140 V; Corriente absorbida = asignada. Determinar: *a*) Parámetros del circuito equivalente aproximado por fase del transformador reducido al primario; *b*) si se conecta el primario del transformador a una red monofásica de 2.000 V y el secundario alimenta una carga que consume 45 amperios con f.d.p. 0,8 capacitivo, determinar la tensión secundaria que se obtiene a la salida del transformador y el rendimiento de la máquina en estas condiciones; *c*) calcular la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad.

[Resp.: *a*) R_{Fe} = 13,33 kΩ, X_μ = 4,19 kΩ, R_{cc} ≈ 20 Ω, X_{cc} = 19,6 Ω; *b*) 198,1 V, 91%; *c*) 7,75 kVA, 92,81%.]

3.15. Un transformador monofásico de 200 kVA, relación 2.000/200 V, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y cortocircuito: *Vacío:* 200 V, 100 A, 5.000 W (medidos en el lado de B.T.). *Cortocircuito:* 200 V, 100 A, 7.000 W (medidos en el lado de A.T.). Calcular: 1) Parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; 2) si se alimenta el primario con una red de 2.000 V y el secundario lleva una corriente de 800 A, con f.d.p. 0,8 inductivo, ¿cuál será la tensión en bornes del secundario y el rendimiento del transformador en estas condiciones?; 3) si estando alimentado el primario con una red de 2.000 V se conecta en el secundario una carga constituida por una resistencia de 0,3 ohmios en serie con una reactancia capacitiva de 0,4 ohmios (es decir, una impedancia compleja **Z** = 0,3 − *j* 0,4 ohmios), ¿cuál será el valor de la tensión en bornes del secundario? (efecto Ferranti), ¿cuál será el valor de la corriente primaria? (téngase en cuenta la rama en paralelo del circuito equivalente del transformador, para contestar a esta última pregunta).

[Resp.: 1) R_{Fe} = 800 Ω, X_μ = 206,6 Ω, R_{cc} = 0,7 Ω, X_{cc} = 1,873 Ω; 2) 186,53 V, 92,64 %, 3) 204,3 V, 35,8 A.]

3.16. Un transformador monofásico de 160 kVA, relación 2.000/200 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: *Vacío:* 2.000 V, 1 A, 1.000 W (medidos en el lado de alta tensión). *Cortocircuito:* 8 V, $I_{corto} = I_{asignada}$, 2.560 W (medidos en el lado de B.T.). Calcular: *a*) Circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario (indicando los valores de los parámetros de este circuito que se obtienen de los ensayos); *b*) si se aplica la tensión asignada al primario, ¿cuál será la tensión secundaria cuando el transformador suministre una corriente secundaria de 400 A con f.d.p. 0,8 inductivo? ¿Cuánto vale el rendimiento del transformador en este caso?; *c*) ¿cuánto vale la potencia aparente de máximo rendimiento y el rendimiento máximo con f.d.p. 0,8 capacitivo?; *d*) ¿cuál será la regulación o caída de tensión relativa del transformador en el caso anterior?

[Resp.: *a*) R_{Fe} = 4.000 Ω, X_μ = 2.309,5 Ω, R_{cc} = 0,4 Ω, X_{cc} = 0,916 Ω; *b*) 196,52 V, 97,5 %; *c*) 100 kVA, 97,56 %; *d*) −0,5725 %.]

3.17. Un transformador monofásico de 10 kVA, relación 1.000/100 V, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros suministrados por el fabricante: P_{Fe} = 200 W, ε_{cc} = 10 %, $\varepsilon_{X_{cc}}$ = 8 %. Calcular: *a*) Tensión secundaria y rendimiento del transformador cuando alimenta una carga que absorbe una corriente de 50 amperios con f.d.p. 0,707 inductivo (la tensión primaria se supone que es de 1.000 V); *b*) si la tensión secundaria es de 100 voltios y el transformador alimenta una carga de 5 kW con f.d.p. 0,8 capacitivo, ¿cuál sería la tensión primaria correspondiente para que la tensión secundaria no varíe?; *c*) si se aplica al transformador una tensión primaria de 1.000 voltios y se conecta en el secundario una impedancia: $Z = 0{,}5 \angle 36{,}87^\circ$ Ω, ¿cuál será la tensión secundaria que tendrá el transformador y el rendimiento en estas condiciones?; *d*) se acopla el transformador anterior con otro de 25 kVA, relación 1.000/100 V, 50 Hz, cuya impedancia de cortocircuito reducida a primario vale: $Z_{ccII} = 3{,}2 + j\,2{,}4$ ohmios. Ambos transformadores alimentan una carga a tensión constante de 100 V y que absorbe una potencia de 20 kW con f.d.p. unidad. ¿Cuáles serán las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada uno de los transformadores?

[Resp.: *a*) 95,05 V, 90,56 %; *b*) 1.000 V; *c*) 83,8 V, 85,63 %; *d*) S_I = 5.760 VA, P_I = 5.643 W, Q_I = 1.161 VAR, S_{II} = 14.400 VA, P_{II} = 14.354 W, Q_{II} = −1.161 VAR.]

3.18. Un transformador trifásico de 2.000 kVA, 6.600/33.000 V, tiene un primario conectado en triángulo y un secundario en estrella. La impedancia de cada fase del primario es $0{,}5 + j\,2{,}6$ Ω y la correspondiente del secundario es de $4{,}3 + j\,21{,}7$ Ω. Calcular la tensión en bornes del secundario a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo cuando el primario se conecta a la tensión asignada.

[Resp.: 31.014 V.]

3.19. Se han realizado unos ensayos en un transformador trifásico de 100 kVA, 400/6.600 V, 50 Hz, conexión estrella-triángulo, dando los siguientes resultados: *Vacío:* 400 V, 1.250 W (datos medidos en el lado de B.T.). *Cortocircuito:* 314 V, corriente de plena carga, 1.600 W (datos medidos en el lado de A.T.). Calcular: *a*) Rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,8 en retraso; *b*) rendimiento a media carga con f.d.p. unidad. *c*) potencia aparente de máximo rendimiento y rendimiento máxi-

mo con f.d.p. unidad; *d*) tensión necesaria en el primario para el caso *a*) si la tensión secundaria se mantiene 6.600 V.

[Resp.: *a*) 96,56 %; *b*) 96,81 %; *c*) 88 kVA, 97,25 %; *d*) 416 V.]

3.20. En la Figura P.3.2 se muestra el esquema de conexiones y las lecturas de los aparatos de medida para la realización de los ensayos de vacío y cortocircuito de un transformador trifásico Yd de 10 kVA, relación de tensiones compuestas 1.000 V/100 V. Determinar: 1) Parámetros del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario; 2) Angulo horario del transformador (alimentación con sistema de secuencia directa).

Lecturas en vacío: P_1 = 265,2 W; P_2 = −65,2 W; $V_{1(línea)}$ = 1.000 V; $V_{2(línea)}$ = 100 V; $I_{0(línea)}$ = 0,35 A.

Lecturas en cortocircuito: P_1 = 360,2 W; P_2 = −210,2 W; $V_{2cc(línea)}$ = 10 V; $I_{2cc(línea)}$ = = 57,7 A.

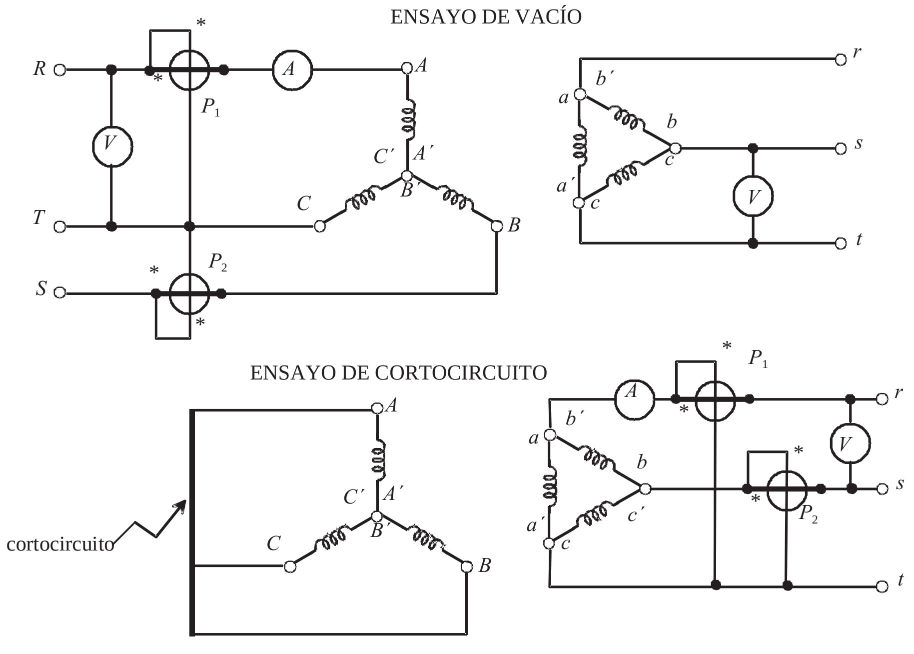


Figura P.3.2.

[Resp.: 1) $R_{Fe} \approx$ 5 kΩ, X_μ = 1.747 Ω, R_{cc} = 1,5 Ω, X_{cc} = 9,89 Ω; 2) Yd 11.]

3.21. La Figura P.3.3 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica de un grupo de bombeo utilizado para un sistema de riego por aspersión. Se dispone de una red de distribución de 15 kV, 50 Hz, que por medio de un transformador Dy 11, 100 kVA, relación compuesta: 15 kV/380 V, suministra energía eléctrica al grupo motobomba a través de una línea resistiva de 0,2 ohmios por hilo. El grupo motobomba está representado por una impedancia de 6 ∠ 36,87° ohmios por fase.

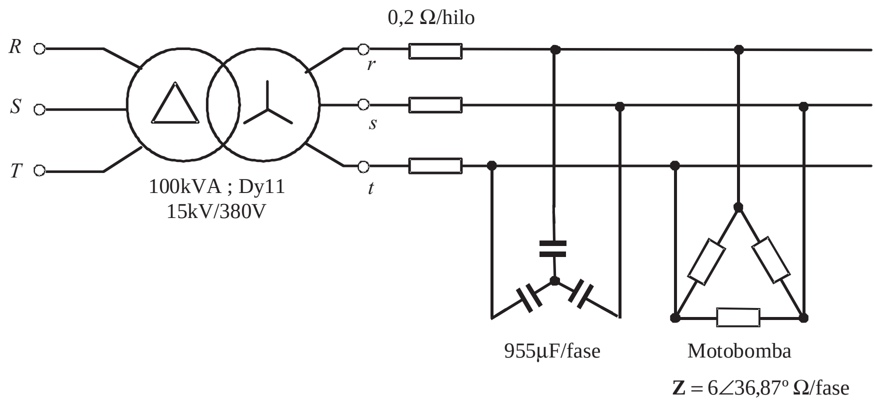


Figura P.3.3.

Las características del transformador que se leen en su placa de características son las siguientes:

$$100 \text{ kVA, Dy 11; 15 kV/380 V} \quad ; \quad \varepsilon_{cc} = 10\,\% \quad ; \quad \varepsilon_{X_{cc}} = 8\,\%$$

Calcular: 1) Parámetros R_{cc}, X_{cc} y Z_{cc} del circuito equivalente del transformador reducido al primario (se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente); 2) tensión secundaria de línea en bornes del secundario del transformador y tensión en bornes del grupo motobomba, si la red de distribución en A.T. tiene una tensión constante de línea de 15 kV; 3) rendimiento del transformador en estas condiciones; 4) si para corregir el f.d.p. del grupo motobomba se conecta una batería de condensadores en estrella de 955 μF/fase (como se indica en la figura), ¿cuál será la nueva tensión de línea en bornes del grupo motobomba?

[Resp.: 1) R_{cc} = 404,05 Ω, X_{cc} = 540,14 Ω, Z_{cc} = 675 Ω; 2) 357,4 V, 330,4 V; 3) 95,39 %; 4) 340,5 V.]

3.22. Se tiene un transformador trifásico de 250 kVA, conexión Yy0, con una relación de tensiones compuestas de 15.000/380 V. De los datos del fabricante se conocen los siguientes parámetros: ε_{cc} = 10 %, $\varepsilon_{X_{cc}}$ = 8 %, y se considera despreciable el efecto de la rama paralelo del circuito equivalente del transformador: *a*) calcular: parámetros R_{cc} y X_{cc} del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario y corriente que circularía por el secundario si por una falta se produce un cortocircuito franco en los bornes del secundario. (Se supone para resolver esta última cuestión que la tensión de alimentación del primario es la asignada de 15.000 V); *b*) si la tensión compuesta de línea en el secundario es de 380 V y se conecta al transformador una carga en estrella de 15 ∠ 60° ohmios por fase, ¿cuál será la tensión compuesta que debe aplicarse al primario para que la tensión secundaria siga permaneciendo constante en 380 V de línea. ¿Cuál será el rendimiento del transformador en estas condiciones?; *c*) si se conecta este transformador en paralelo con otro de 350 kVA, conexión Yy0, con la misma relación de tensiones y de valores ε_{cc} = 10 % y $\varepsilon_{X_{cc}}$ = 9 %, ¿cómo se repartirán una potencia de 400 kW con f.d.p. 0,8 inductivo?

(es decir, calcular las potencias activas y aparentes suministradas por cada transformador).

[Resp.: *a*) R_{cc} = 54 Ω, X_{cc} = 72 Ω, I_{2cc} = 3.798 A; *b*) 15.052 V, 99,54 %; *c*) S_I = 209,15 kVA, P_I = 180,3 kW, Q_I = 106,00 kVAR, S_{II} = 292,8 kVA, P_{II} = 219,5 kW, Q_{II} = 194 kVAR.]

3.23. Un transformador trifásico tiene las siguientes características asignadas: Conexión, Yy0; potencia aparente asignada, 100 kVA; relación de tensiones compuestas, 3.000 V/380 V. Los resultados de unos ensayos de vacío y cortocircuito han dado los siguientes valores: *Vacío:* 3.000 V, P_0 = 5 kW, medidos en el lado de A.T. (primario). *Cortocircuito:* 300 V, I_{1cc} = corriente asignada, P_{cc} = 6 kW (medidos en el primario). (NOTA: Las potencias anteriores son totales trifásicas y las tensiones son compuestas o de línea). Si la tensión secundaria de línea se mantiene constante en 380 V, se pide: 1) La tensión compuesta necesaria en el primario cuando el transformador alimenta una carga trifásica equilibrada de 50 kW con f.d.p. 0,6 capacitivo; 2) potencia aparente de máximo rendimiento y rendimiento máximo del transformador para un f.d.p. unidad; 3) se desea ampliar la instalación para alimentar una carga trifásica de 120 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que se acopla en paralelo este transformador con otro cuyas características asignadas son las siguientes: Conexión, Yy0; potencia asignada, 50 kVA; relación, 3.000 V/380 V; $\varepsilon_{R_{cc}}$ = 8 %, $\varepsilon_{X_{cc}}$ = 6 %; P_0 = 2 kW. Calcular los valores de las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada transformador y los rendimientos correspondientes.

[Resp.: 1) 2.930,1 V; 2) 91,3 kVA, 90,13 %; 3) 100 kVA, 75 kW, 68 kVAr, 87,2 %, 50 kVA, 45 kW, 22 kVAr, 88,24 %.]

3.24. Un transformador monofásico de 50 kVA, 6.600/220 V, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: *Vacío:* 1.000 W, 220 V, 25 A (datos leídos en el lado de B.T.). *Cortocircuito:* 1.200 W, 300 V, 7,575 A (datos leídos en el lado A.T.) 1) Calcular: parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; 2) se dispone de tres transformadores monofásicos idénticos al citado, que se conectan en triángulo en la parte de A.T. (primario) y en estrella la parte de B.T. (secundario). Si se alimenta el primario de esta combinación a una red trifásica a 6.600 V, determinar la tensión secundaria de línea, si la corriente secundaria de línea es de 200 A con un f.d.p. 0,8 inductivo; 3) la combinación señalada en el apartado anterior (conexión Dy) se conecta nuevamente a una red trifásica de 6.600 V y en el secundario se coloca una carga trifásica equilibrada en triángulo de impedancia: 2,16 + j 1,62 ohmios/fase; calcular la tensión secundaria de línea y el rendimiento del transformador en estas condiciones.

[Resp.: 1) R_{cc} = 20,91 Ω, X_{cc} = 33,62 Ω; 2) 366,85 V; 3) 364,25 V, 94,55 %.]

3.25. En la Figura P.3.4 se muestra el esquema interno de las bobinas de un transformador trifásico de 50 kVA, relación de tensiones compuestas 1.000/100 V, 50 Hz, conexión Dy, que ha dado los siguientes valores en unos ensayos: *Vacío:* 1.000 V (línea), 3 A (línea), 1 kW (total, las tres fases). *Cortocircuito:* 100 V (línea), $I_{corto} = I_{asignada}$, 1,5 kW (totales). Ambos ensayos se han medido en el lado de A.T.

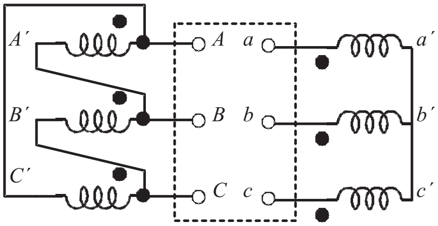


Figura P.3.4.

a) Determinar los parámetros del circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario; *b*) Ángulo horario del transformador, cuando se alimenta mediante un sistema directo de tensiones; *c*) Tensión primaria de línea y rendimiento del transformador cuando alimenta una carga en el secundario que absorbe una potencia de 25 kW con f.d.p. 0,8 inductivo. (La tensión secundaria de línea se mantiene siempre constante en 100 V); *d*) ¿Cuál es la potencia aparente de máximo rendimiento del transformador y el rendimiento máximo con f.d.p. unidad?; *e*) Se desea ampliar la instalación para alimentar una carga trifásica de 80 kW con f.d.p. 0,8 inductivo, por lo que se hace necesario acoplar en paralelo este transformador con otro Dy de igual índice horario y cuyas características asignadas son: 75 kVA, 1.000/100 V; $\varepsilon_{R_{cc}} = 6{,}5\,\%$; $\varepsilon_{X_{cc}} = 5\,\%$. Calcular los valores de las potencias aparentes, activas y reactivas suministradas por cada transformador. ¿Es adecuado el reparto de las potencias aparentes? ¿Por qué? NOTA: La tensión secundaria es constante en todos los casos e igual a 100 V de línea.

[Resp. *a*) $R_{Fe} = 3.000\ \Omega$, $X_\mu = 588{,}3\ \Omega$, $R_{cc} = 1{,}8\ \Omega$, $X_{cc} = 5{,}72\ \Omega$; *b*) Dy11; *c*) 1.050,77 V, 94,04 %; *d*) 40,825 kVA, 95,33 %; *e*) $S_I = 36{,}9$ kVA, $P_I = 18{,}66$ kW, $Q_I = 31{,}83$ kVAr, $S_{II} = 67{,}5$ kVA, $P_{II} = 61{,}34$ kW, $Q_{II} = 28{,}16$ kVAr, $C_I = 0{,}738$, $C_{II} = 0{,}9$. No es adecuado el reparto, ya que $C_I \neq C_{II}$. El transformador II resulta siempre más sobrecargado.]

3.26. Determinar el ángulo horario del transformador indicado en la Figura P.3.5.

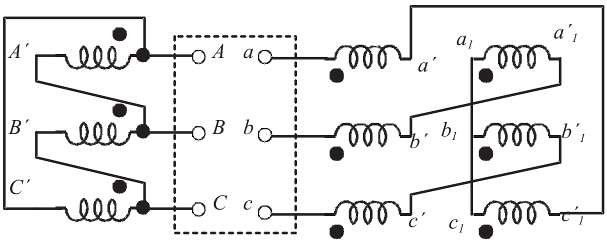


Figura P.3.5.

[Resp.: Dz0.]

3.27. La Figura P.3.6 muestra un transformador trifásico triángulo-estrella de relación de tensiones compuestas 10.000/380 V, que alimenta en el lado de baja tensión una carga trifásica equilibrada conectada en estrella. Para medir la potencia absorbida por la carga se utilizaron dos vatímetros P_1 y P_2 cuyas lecturas fueron: $P_1 = 1.000$ kW,

P_2 = 500 kW; suponiendo que en estas condiciones el transformador trabaja a plena carga y que la tensión secundaria compuesta es de 380 V, calcular: 1) Potencia aparente o de plena carga del transformador (kVA); 2) si las impedancias de los devanados primario y secundario son: $\mathbf{Z}_1 = 2{,}9 + j\,5{,}1$ ohmios; $\mathbf{Z}_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-3} + j\,2{,}36 \cdot 10^{-3}$ ohmios, calcular la tensión primaria V_1 necesaria en el primario para alimentar la carga a 380 V de línea; 3) calcular el rendimiento del transformador a plena carga si el índice de carga óptimo o de máximo rendimiento del transformador es igual a 0,75; 4) ¿cuál es el valor del ángulo horario del transformador si la sucesión de fases es RST? Nota: Utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.

[Resp.: 1) 1.732 kVA; 2) 10.588,6 V; 3) 94,12 %; 4) Dy11.]

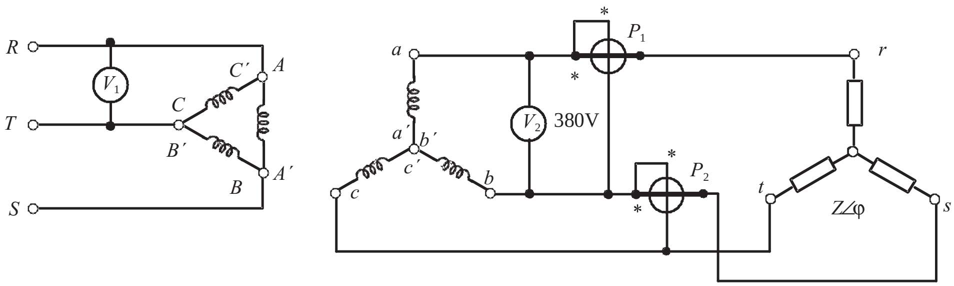


Figura P.3.6.

3.28. La Figura P.3.7 muestra un transformador trifásico estrella-triángulo de relación de tensiones compuestas 15.000/380 V, que alimenta en el lado de baja tensión una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo de 0,3 ∠ + 36,87° ohmios/fase. Suponiendo que en estas condiciones el transformador trabaja a plena carga y que la tensión secundaria es de 380 V, calcular: 1) Potencia aparente o de plena carga del transformador en kVA; 2) si las impedancias de los devanados primario y secundario por fase son, respectivamente, $\mathbf{Z}_1 = 2 + j\,4$ ohmios, $\mathbf{Z}_2 = 1 \cdot 10^{-3} + j\,2 \cdot 10^{-3}$ ohmios, calcular la tensión V_1 de línea para alimentar la carga a 380 V; 3) calcular el rendimiento del transformador si el índice de carga óptimo o de máximo rendimiento es igual a 0,8; 4) ¿cuál es el valor del ángulo horario del transformador si la sucesión de fases es RST? Nota: Utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador reducido al primario.

[Resp.: 1) 1.444 kVA; 2) 15.483,5 V; 3) 96,8 %; 4) Yd11.]

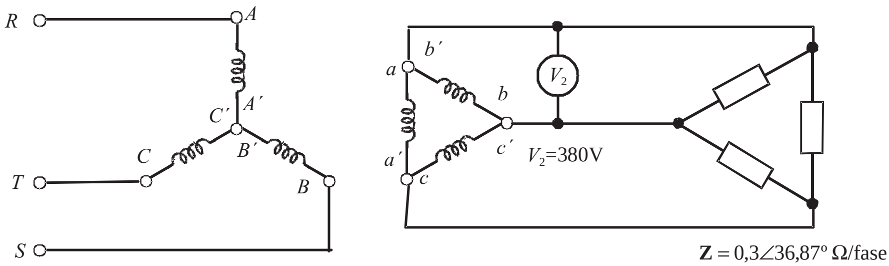


Figura P.3.7.

3.29. Se dispone de un transformador trifásico de 50 MVA, 380 kV/60 kV (tensiones compuestas), conexión Yy0, (ver Figura P.3.8) que ha sido sometido a un ensayo de cortocircuito, alimentado por el lado de B.T. Las medidas fueron las siguientes: V_{2cc} = 4,2 kV de línea; I_{2cc} = 420,5 A; P_{cc} (total) = 184 kW. El transformador está conectado a una red de 370 kV de tensión compuesta, 50 Hz, a través de una línea trifásica de 50 km de longitud, de resistencia despreciable y reactancia 0,4 ohmios por kilómetro. El transformador alimenta por su secundario una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo constituida por una resistencia de 220 ohmios en serie con un condensador de 15 microfaradios. Calcular: *a*) tensión secundaria de línea V_2; *b*) corriente secundaria I_2; *c*) rendimiento del transformador en esas condiciones si las pérdidas en el hierro son de 150 kW. Nota: Para realizar el problema se considera despreciable la impedancia en paralelo del circuito equivalente.

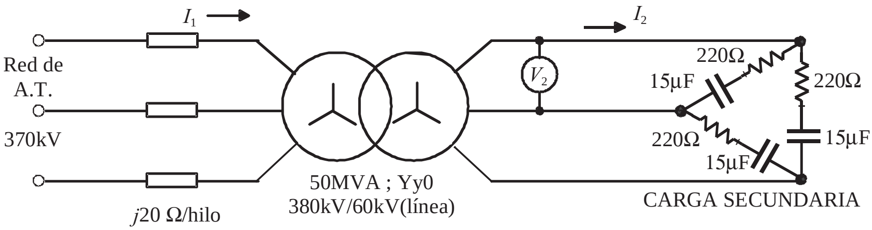


Figura P.3.8.

[Resp. *a*) 60.789 V; *b*) 345,42 A; *c*) 98,97 %.]

3.30. La Figura P.3.9 muestra el esquema simplificado de la instalación eléctrica para la alimentación de un grupo de bombeo y su aplicación en regadíos. Se dispone de una red de distribución trifásica alimentada por una pequeña minicentral hidráulica situada en un área cercana a la estación de bombeo. La minicentral consiste en un grupo turbina-alternador que genera una tensión asignada de 3.000 V y que a través de una red de media tensión de impedancia despreciable alimenta un transformador reductor de tensión para la alimentación de la estación de bombeo.

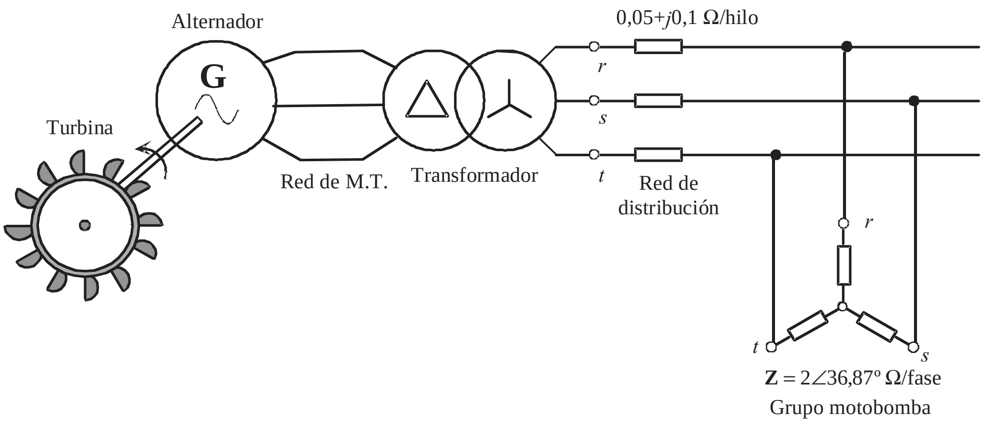


Figura P.3.9.

Las características asignadas del transformador son: S_N = 100 kVA; conexión Dy11; relación de tensiones compuestas, 3.000/380 V; caídas relativas de tensión: ε_{cc} = 10 %, $\varepsilon_{X_{cc}}$ = 8 %. La red de distribución que une el transformador con el grupo de bombeo tiene una impedancia $Z = 0{,}05 + j\,0{,}1$ ohmios por hilo. La estación de bombeo se puede representar por una carga trifásica equilibrada conectada en estrella de impedancia 2 ∠ 36,87° ohmios por fase. Calcular: 1) Parámetros R_{cc}, X_{cc} del circuito equivalente por fase del transformador reducido al primario; 2) tensión compuesta en el primario del transformador (y que debe generar el alternador) para que la tensión en la carga (grupo de bombeo) sea de 380 V de línea. Determinar en esta situación el rendimiento del transformador si las pérdidas en el hierro son de 2 kW; 3) si la tensión en el primario del transformador es de 3.000 V (tensión compuesta), ¿cuál será el valor de la tensión de línea que se tendrá en el grupo de bombeo? Determinar en este caso la caída relativa de tensión (regulación) del transformador.

[Resp.: 1) R_{cc} = 16,2 Ω, X_{cc} = 21,6 Ω; 2) 3.360,6 V, 92 %; 3) 339,3 V, 6,24 %.]

Biografías

BLUME, Louis Frederick (1882-1946). Ingeniero americano. Estudió en la Universidad de Lehigh (1905) y en Cornell (1909). Fue profesor de Cornell varios años. En 1907 ingresó en la *General Electric* en Pittsfield, donde trabajó en el departamento de transformadores, llegando en 1926 a ser subdirector. En 1924 obtuvo el premio Coffin por sus trabajos sobre regulación de tensión en transformadores y por el desarrollo de transformadores no resonantes. Fue autor de muchos artículos técnicos y editor y coautor del famoso libro *Transformer Engineering*, que fue traducido a varios idiomas. Estaba en posesión de más de 20 patentes en el campo de la ingeniería eléctrica.

BOYAGIAN, Aran (1888-?). Ingeniero armenio-americano. Emigró a los Estados Unidos en 1910. Estudió en el Swarthmore College de Philadelphia (1915). En ese mismo año ingresó en la *General Electric* en el departamento de transformadores. Diseñó un transformador de impulsos para ensayos de A.T. de 50 MW, 240 kV. Profesor visitante de ingeniería eléctrica en el MIT. Estaba en posesión de más de 18 patentes en el campo de la electricidad.

FERRANTI, Sebastian Ziani (1864-1930). Ingeniero británico de origen italiano. Estudió en el *University College* de Londres, donde tuvo como profesores a Carey Foster y a Sir Oliver Lodge. Trabajó en todos los campos de la electrotecnia. A los catorce años ya había construido una dinamo. Inventó un alternador (1882), un modelo de contador eléctrico de mercurio por c.c. (1883) y un transformador (1885). En 1886, cuando contaba solamente veintidos años, fue nombrado ingeniero jefe para ocuparse del sistema de distribución de la Grosvernor Gallery; para la ejecución de este proyecto, Ferranti, que era un acérrimo defensor de la c.a. (en Inglaterra defendían la c.a.: Ferranti, Gordon. W. M. Mordey y Silvanus Thomson, mientras que estaban a favor de la c.c.: Lord Kelvin, Crompton, A. W. Kennedy y John Hopkinson; en Estados Unidos estaban a favor de la c.a.: Tesla, Sprague y C. P. Steinmetz, y a favor de la c.c.: Edison), ideó una red de transporte de c.a. a 10.000 V, lo que representaba en aquella época una utopía, por una parte porque se prescindía de la c.c. y por otra porque la tensión de transporte se consideraba inalcanzable. El propio Ferranti diseñó dos alternadores monofásicos de 400 kW cada uno a 10.000 V, sustituyó el esquema serie de Gaulard y Gibbs por un acoplamiento en paralelo y con una reducción a 2.400 V de tensión secundaria, y tuvo que ocuparse también del diseño de cables de A.T., inventando nuevos procedimientos de aislamiento. Cuando se puso en funcionamiento esta instalación se comprobó que se requerían únicamente 8.500 V en la central generadora situada en Deptford para que llegaran 10.000 V a la Grosvernor Gallery; este fenómeno, conocido hoy día como *efecto Ferranti*, se atribuyó a la interacción de los devanados del transformador con la capacidad del cable. Ferranti, a partir de 1900 se dedicó

al desarrollo de turbinas de vapor para centrales térmicas. Fue presidente del IEE en 1910 y 1911 y miembro de la Royal Society en 1927.

GAULARD, Lucien (1850-1888). Físico francés. Se dedicó inicialmente a trabajos químicos en relación con la fabricación de explosivos y luego se ocupó en experimentos eléctricos. En 1881 presentó una pila termoquímica en la Exposición Internacional de Electricidad de París. Se dedicó después a estudiar el problema del transporte y distribución de energía eléctrica, habiendo acertado (en unión con Gibbs) a desarrollar sus *generadores secundarios,* que hoy denominamos transformadores. En 1884, con motivo de la Exposición Internacional de Turín, realizó una red de transporte de 80 km de longitud entre la estación de Lanzo y Turín (la red formaba un bucle que pasaba también por la ciudad de Venaria), en la que utilizaba sus generadores secundarios para optimizar el rendimiento del transporte; por esta demostración Gaulard recibió un premio de 10.000 liras del Gobierno italiano. El Presidente del Jurado era el profesor Galileo Ferraris. Desgraciadamente, el primario de este transformador se colocaba en serie y tenía por ello grandes defectos; un año más tarde, los ingenieros de la casa Ganz de Budapest: Deri, Blathi y Zypernowski; mejoraron el diseño, proponiendo una conexión paralelo, a tensión constante, para el primario, que es el diseño actual. La patente del transformador se adjudicó a los húngaros, y Gaulard, preso de una crisis nerviosa, murió prematuramente en el hospital de Santa Ana de París antes de cumplir los treinta y ocho años.

KAPP, Gisbert (1852-1922). Ingeniero austro-británico. Nació en Viena y obtuvo el título de ingeniero en el Politécnico de Zurich, donde fue alumno de Kohlrausch. En 1875 se trasladó a Inglaterra y pasó la mayor parte de su vida en este país. Sus trabajos en electricidad comenzaron en 1882, cuando ingresó como ingeniero en la empresa del coronel Crompton, una de las industrias pioneras en la construcción de maquinaria eléctrica en Inglaterra. Más tarde, en 1885, se estableció por su cuenta como ingeniero consultor. Se le deben grandes inventos en el campo de la ingeniería eléctrica: fue el primero que ideó el devanado compound en las máquinas de c.c.; introdujo el inductor multipolar en las dinamos; patentó una dinamo autorregulada para iluminación por arco eléctrico. Realizó numerosos proyectos de centrales eléctricas, diseñando él mismo los alternadores y transformadores. Fue un defensor de la c.a. Escribió muchos artículos y libros sobre ingeniería eléctrica: transporte de energía eléctrica, corrientes alternas, dinamos, alternadores y transformadores, transformadores para corrientes monofásicas y polifásicas, diseños electromecánicos, principios de ingeniería eléctrica y sus aplicaciones, etc. Entre 1894 y 1905 actuó como Secretario de la *Verband Deutscher Elektrotechniker* en Berlín. (El objetivo de esta sociedad fue la creación de normas de estandarización, conocidas hoy día por sus iniciales VDE, y que han sido adaptadas a todos los países.) Mientras estuvo en Alemania preparó a estudiantes postgraduados en Charlotenburgo. Fue nombrado Doctor Honoris Causa por las Universidades de Dresden y Karlsruhe. En 1905 volvió a Inglaterra y fue nombrado catedrático de ingeniería eléctrica de la Universidad de Birmingham, a propuesta de Sylvanus Thompson y Sir Oliver Lodge, puesto en el que permaneció el resto de su vida.

KARAPETOFF, Vladimir Nikitich (1876-1948). Ingeniero ruso-americano. Estudió Ingeniería Civil en San Petersburgo, donde se graduó en 1877. Amplió estudios de Ingeniería Eléctrica en Alemania (1899-1900). Profesor de Electrotecnia e Hidráulica en su Universidad natal (1900-1902). En 1902 se trasladó a los Estados Unidos, donde trabajó en la Compañía Westinghouse. Catedrático de Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Cornell desde 1908. Escribió numerosos libros y artículos sobre ingeniería, ciencia, educación, música y poesía. En particular, su libro *Ingeniería Eléctrica Experimental,* traducido a varios idiomas, fue tomado como referencia obligada en muchas Universidades y Centros de Investigación del mundo. Su afición por la música hizo que se graduara en piano en 1934 en la Universidad de New York.

RÜHMKORFF, Heinsrich Daniel (1803-1877). Inventor alemán. Trabajó como aprendiz de mecánico en Hannover; en 1824 trabajó en Inglaterra en el taller de Joseph Brahmah, inventor de la prensa hidráulica, en 1827 se fue a París, trabajando con Charles Chevalier, conocido por su taller de instrumentos ópticos. En 1855 fundó su propia empresa, en la que se dedicó a la construcción de

aparatos eléctricos de precisión. Su principal invención es la bobina de inducción capaz de producir chispas de más de 30 cm de longitud. El carrete de Rühmkorff, que así se conoce esta bobina, se usó ampliamente para el funcionamiento de tubos de Geissler y Crookes y para otras necesidades de A.T. en laboratorios de física de todas las universidades del mundo.

SCOTT, Charles Feldon (1864-1944). Ingeniero americano. Estudió en la Universidad de Ohio, en Columbus, donde se graduó como ingeniero en 1885. Realizó estudios de postgrado en la Universidad Johns Hopkins. Al acabar su carrera trabajó como instalador eléctrico en la *Baldwin Locomotive Works*. En 1888 ingresó en la *Westinghouse Electric and Manufacturing Co.,* trabajando en el laboratorio de ensayos. Más tarde se asoció con Nikola Tesla para desarrollar el motor asíncrono de corriente alterna. En la Westinghouse llegó en 1897 a director del departamento de ingeniería eléctrica y en 1904 pasó a consultor de ingeniería. Durante su trabajo en la Westinghouse fue pionero en el transporte de energía eléctrica en alta tensión y en el diseño y construcción de máquinas eléctricas. Intervino en el diseño de máquinas eléctricas para la central del Niágara, inaugurada en 1896, que disponía de alternadores bifásicos. *Fue en 1894, y trabajando en el proyecto de la central anterior, cuando inventó la denominada conexión en T o conexión Scott de transformadores para convertir la c.a. bifásica en trifásica y viceversa.* Durante la observación de los ensayos de aisladores en 1895, en el laboratorio de la Westinghouse, predijo las pérdidas por efecto corona en las líneas de A.T. En el Congreso de San Luis de 1904 fue el director del capítulo de redes de transporte. En 1911 aceptó una cátedra de ingeniería eléctrica en la *Sheffield Scientific School* de la Universidad de Yale, cargo en el que estaría el resto de su vida y donde realizó grandes esfuerzos para elevar el nivel científico de las enseñanzas técnicas. Publicó muchos artículos sobre ingeniería eléctrica. En 1930 recibió la medalla Edison por sus contribuciones a la ciencia del transporte de energía eléctrica. Presidente n.º 15 en el bienio 1902-1903 del AIEE (*American Institute of Electrical Engineers,* que al unirse en 1962 con el IRE, *Institute of Radio Engineers,* dio lugar al actual IEEE, *Institute of Electrical and Electronic Engineers*).

STANLEY, William (1858-1916). Inventor americano. Al acabar sus estudios de bachillerato, trabajó en una compañía que fabricaba instrumentos telegráficos. En 1880 se incorporó a la empresa del Dr. Edward Weston, que se dedicaba a la construcción de aparatos de medida. Dos años más tarde montó su propio laboratorio, donde realizó experimentos con acumuladores y transporte de energía en A.T. En 1884 se incorporó a la recién creada empresa Westinghouse, en la que diseñó la mayor parte de las máquinas eléctricas de las centrales que construía esta compañía. Inventó el autotransformador, varios tipos de generadores y motores de c.a., un vatímetro de inducción y aparatos para neutralizar la inducción de las líneas telefónicas. En 1890 fundó la Compañía Eléctrica Stanley, que más tarde fue absorbida por la General Electric. Stanley siguió trabajando como ingeniero consultor de la nueva empresa el resto de su vida.

STIGANT, S. Austen (1890-1973). Ingeniero británico. Estudió en el *Aston Technical College*. A los veintidos años ingresó como delineante en la Compañía Westinghouse británica, donde más tarde llegaría a ingeniero encargado del proyecto de transformadores. En 1930 pasó al puesto de asesor técnico y encargado del departamento de formación, donde fue director durante casi treinta años. En 1950 fundó la Tensor Society en el Reino Unido. Stigant escribió más de 150 artículos técnicos y ocho libros sobre ingeniería eléctrica. El que le dio mayor renombre fue el que llevaba por título: *The J&P Transformer Book,* figurando como coautor A. C. Franklin, ingeniero jefe de la empresa inglesa Johnson & Phillips. Este texto, de obligada consulta para los especialistas, comenzó a editarse en 1925 bajo la dirección de Morgan Lacey. En 1973 se publicó la undécima edición.

THOMPSON, Silvanus Phillips (1851-1916). Físico e ingeniero inglés. Estudió en la Royal School of Mines, en Londres. En 1876 se fue a Heidelberg, recibiendo las enseñanzas de Bunsen. A su vuelta a Inglaterra fue nombrado catedrático de Física en el University College de Bristol (1876); más tarde, en 1885, fue nombrado catedrático de Física e Ingeniería Eléctrica en el *City and Guilds Technical College* de Londres, donde enseñó el resto de su vida. Como profesor era un maestro incomparable, pues tenía una facilidad innata para exponer en su cátedra los más arduos problemas

científicos en forma tan clara y amena que provocaba la admiración de sus alumnos. Escribió libros de divulgación sobre electricidad y magnetismo, cálculo diferencial e integral, pero su obra maestra fue un magnífico tratado de máquinas dinamoeléctricas, que alcanzó seis ediciones y que fue traducido a varios idiomas. Este libro fue un texto imprescindible en muchas Universidades del mundo en la primera mitad del siglo XX. Conferenciante infatigable, ayudó a divulgar los progresos de la electricidad, haciéndola asequible al gran público. Aficionado a la música y dotado de un excelente oído, en 1910 leyó una conferencia en la Physical Society sobre lazos de histéresis y figuras de Lissajous, que era una mezcla exquisita de magnetismo, sonido y teoremas matemáticos. Gozó de grandes honores y distinciones. En 1891 fue uno de los vicepresidentes honorarios de la Exposición Eléctrica de Frankfurt y en el mismo año fue elegido Fellow de la Royal Society. Doctor Honoris Causa por la Universidad de Königsberg (1894). Escribió las biografías de Faraday (1898) y de Lord Kelvin (1910). Presidente de la Institución de Ingenieros Eléctricos ingleses en 1899.

Referencias

AEG: *Manual AEG 2. Tratado de Electrotecnia Práctica*. Ed. Elitera-Verlag, Berlín,1972.

BAILEY, B. F.; GAULT, J. S.: *Alternating-Current Machinery*. McGraw-Hill, New York, 1951.

BERROSTEGUIETA, J.: *Introducción a los transformadores de medida*. Electrotécnica Arteche Hermanos S. L., Munguía (Vizcaya), 1992.

BLUME, L. F.; BOYAGIAN, A.; MONTSINGER, V. M.: *Transformer Engineering*. General Electric Co., 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951.

CHAPMAN, S. J.: *Máquinas Eléctricas*. McGraw-Hill Latinoamericana, S. A., Bogotá, Colombia, 1987.

CHATELAIN, J.: *Traité d'électricité*, Vol. X: *Machines électriques*. Editions Georgi, Lausanne, 1983.

DEL TORO, V.: *Electric Machines and Power Systems*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.

DORMONT, M. J.: *Transformadores*. Servicio de Publicaciones de la E.T.S. de Ingenieros Industriales, Madrid, 1971.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, CH.; UMANS, S. D.: *Electric Machinery*, Fourth Edition (S.I.). McGraw-Hill Book C., New York, 1985.

FOUILLE, A.: *Electrotecnia para Ingenieros*, tomo II. Ed. Aguilar, Madrid, 1969.

FRANKLIN, A. C.; FRANKLIN, D. P.: *J & P Transformer Book*. Johnson and Phillips, 11.ª edition, Butterworths, London, 1983.

GIBBS, J. B.: *Transformers: Principles and Practice*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1950.

GONZÁLEZ-LLANOS, J. M.: *Curso de Máquinas Eléctricas. Tomo I*. Editorial Litografía e Imprenta Roel, La Coruña, 1955.

IVANOV-SMOLENSKY, A.: *Electrical Machines*, Vol. 1. Mir Pub., Moscow, 1982.

KOSOW, I. L.: *Electric Machinery and Transformers*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

KOSTENKO, M. P.; PIOTROVSKI, L. M.: *Máquinas eléctricas*. Ed. Mir, Moscú, 1975.

LANGSDORF, A. S.: *Teoría de las máquinas de c.a*. Ed. del Castillo, Madrid, 1967.

MCPHERSON, G.: *An Introduction to Electrical Machines and Transformers*. John Wiley & Sons, New York, 1981.

M.I.T. Staff: *Magnetic Circuit and Transformers*. Massachusetts Institute of Technology, Boston, 1962.

MOELLER, F.; KUBLER, E.; WERR, TH.: *Electrotecnia General y Aplicada*, Tomo II, Parte 1. Ed. Labor, Barcelona, 1962.

NAGRATH, I. J.; KOTHARI, D. P.: *Electric Machines.* Tata McGraw-Hill Pub., New Delhi, 1985.

RAS, E.: *Transformadores de potencia, de medida y de protección.* Ed. Técnicas Marcombo, Ed. Boixerau, Barcelona, 1975.

SAY, M. G.: *Alternating Current Machines.* Pitman Pub. Co., London, 1976.

SISKIND, CH.: *Electrical Machines: Direct and Alternating Current*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1950.

SLEMON, G. R.; STRAUGEN, A.: *Electric Machines: Direct and Alternating Current*. McGraw-Hill Book, New York, 1950.

STEIN, R.; HUNT, W. T.: *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines.* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.

WESTINGHOUSE, Co.: *Electrical Transmission and Distribution Reference Book.* East Pittsburg, 1950.

WILDI, TH.: *Tecnología de los Sistemas Eléctricos de Potencia.* Ed. Hispano Europea S. A., Barcelona, 1983.

CAPÍTULO 4

Máquinas asíncronas

4.1. INTRODUCCIÓN

El principio de funcionamiento de las máquinas asíncronas se basa en el concepto de campo magnético giratorio, ya explicado en el Capítulo 2. El descubrimiento original fue publicado en 1888 por el profesor Galileo Ferraris en Italia y por Nikola Tesla en los Estados Unidos. Ambos diseños de motores asíncronos se basaban en la producción de campos magnéticos giratorios con sistemas bifásicos, es decir, utilizando dos bobinas a 90° alimentadas con corrientes en cuadratura. Desgraciadamente, el motor bifásico de Ferraris tenía un circuito magnético abierto y un rotor en forma de disco de cobre, por lo que desarrollaba una potencia muy baja y no tenía interés comercial. Sin embargo, Tesla, que dio a conocer su motor dos meses más tarde que Ferraris, utilizó devanados concentrados tanto en el estátor como en el rotor, logrando con ello un motor más práctico, y de ahí que se considere a Tesla el inventor de este tipo de máquinas. Las patentes de Tesla fueron adquiridas por G. Westinghouse, quien construyó en sus fábricas motores bifásicos que puso en el mercado alrededor de 1890. En este mismo año el ingeniero de la AEG Dolivo Dobrowolsky inventó el motor asíncrono trifásico, empleando un rotor en forma de jaula de ardilla y utilizando un devanado distribuido en el estátor. En el año 1891 Dobrowolsky presentó en la Exposición de Electricidad de Frankfurt un motor asíncrono con rotor devanado que disponía de un reóstato de arranque a base de resistencias líquidas. En el año 1893 Dobrowolsky había desarrollado también motores asíncronos con doble jaula de ardilla, que poseían mejores cualidades de arranque que el motor en cortocircuito convencional (sin embargo, fue el francés P. Boucherot quien más investigó con este tipo de rotor). A principios del siglo XX se impuso el sistema trifásico europeo frente al bifásico americano, por lo que las máquinas asíncronas empezaron a ser (y son) trifásicas.

La diferencia de la máquina asíncrona con los demás tipos de máquinas se debe a que no existe corriente **conducida** a uno de los arrollamientos. La corriente que circula por uno de los devanados (generalmente el situado en el rotor) se debe a la f.e.m. inducida por la acción del flujo del otro, y por esta razón se denominan **máquinas de inducción**. También reciben el nombre de **máquinas asíncronas** debido a que la velocidad de giro del rotor no es la de sincronismo impuesta por la frecuencia de la red. La importancia de los motores asíncronos se debe a su construcción simple y robusta, sobre todo en el caso del rotor en forma de jaula, que les hace trabajar en las circunstancias más adversas, dando un excelente servicio con pequeño mantenimiento. Hoy en día se puede decir que más del 80 por 100 de los motores eléctricos industriales emplean este tipo de máquina, trabajando con una frecuencia de alimentación constante. Sin embargo, históricamente su inconveniente más grave ha sido la limitación para regular su velocidad, y de ahí que cuando esto era necesario, en diversas aplicaciones como la

tracción eléctrica, trenes de laminación, etc., eran sustituidos por motores de c.c., que eran más idóneos para este servicio. Desde finales del siglo XX y con el desarrollo tan espectacular de la electrónica industrial, con accionamientos electrónicos como inversores u onduladores y cicloconvertidores, que permiten obtener una frecuencia variable a partir de la frecuencia constante de la red, y con la introducción del microprocesador en la electrónica de potencia, se han realizado grandes cambios, y los motores asíncronos se están imponiendo poco a poco en los accionamientos eléctricos de velocidad variable. En el Capítulo 7 se estudian estos convertidores electrónicos y su aplicación en la regulación de velocidad de motores eléctricos tanto de c.c. como de c.a.

Este capítulo comienza explicando los aspectos constructivos de los motores asíncronos, enseñando la forma del estátor y los distintos tipos de rotor; se muestra el detalle de la caja de bornes del motor y sus formas de conexión. Se estudia luego el principio de funcionamiento de los motores asíncronos trifásicos y se calculan las relaciones de f.e.m.s. y corrientes en los devanados del estátor y del rotor y se define el concepto de deslizamiento. Se incluye una sección de comentarios prácticos para explicar por una parte, que la acción de las fuerzas en el rotor se produce en las ranuras, y no en los conductores y por otra parte se enseña a dibujar el esquema eléctrico de un devanado trifásico y se comprueba la forma en que se forman los polos del estátor. A partir de estos estudios iniciales, se establece el circuito equivalente de la máquina, en la que se aprovecha su gran analogía con el transformador. Se hace especial hincapié en el significado de la resistencia de carga, *responsable* de la energía mecánica que se produce en el árbol de la máquina. Se advierte del riesgo de utilizar circuitos equivalentes aproximados para estudiar estas máquinas debido a que la corriente de vacío es comparativamente más alta que en el caso de transformadores. Se establece con ello un circuito equivalente aproximado con ajuste de tensión, que suele dar buenos resultados en la práctica. A continuación se señalan los ensayos necesarios para determinar los parámetros del circuito equivalente, lo que permite más tarde hacer un estudio analítico del balance de potencias en el motor y su distribución en las diversas partes que componen la máquina, obteniendo una serie de relaciones útiles entre ellos. Se incluye una sección de ampliación para explicar cómo se puede medir con precisión la velocidad de estos motores, para reducir al máximo los errores en la determinación del deslizamiento. Se define entonces el concepto de par electromagnético de rotación y se llega a una fórmula analítica que muestra la dependencia con los principales parámetros de la máquina. Se dibuja la curva par-velocidad de la máquina, distinguiendo la característica natural de las artificiales, obteniendo una serie de expresiones que permiten dibujar las características artificiales a partir de la natural, lo que simplifica el trabajo gráfico. Se explican los modos de funcionamiento de la máquina asíncrona, analizando con detalle el trabajo en régimen motor, generador y freno. En cada caso se utilizan figuras que explican con sencillez las transferencias de energía que se producen entre los terminales eléctrico y mecánico. Se introduce a continuación una sección de comentarios prácticos para que el estudiante sepa interpretar con claridad y soltura los datos que el constructor inscribe en la placa de características de estos motores, para no cometer errores en los tipos de conexiones que deben emplearse, según cuál sea el valor de la tensión de alimentación y el procedimiento de cálculo que debe seguirse para deducir los valores de las diversas variables que intervienen en el funcionamiento del motor.

Continúa el capítulo explicando el diagrama del círculo como procedimiento gráfico que permite determinar el comportamiento de la máquina, observando el lugar geométrico de las corrientes del motor, donde puede medirse a escala las diferentes variables que son de interés en el estudio de la máquina. En la actualidad el diagrama del círculo, gracias a los ordenadores y calculadoras existentes en el mercado, ha perdido importancia, pero se ha incluido aquí

por su importancia histórica y didáctica. Se estudian más tarde los métodos de arranque de los motores trifásicos según sean en jaula de ardilla o con rotor devanado. Se incluye además una sección de comentarios prácticos en la que se explican los elementos más importantes que componen los automatismos utilizados para la maniobra de máquinas eléctricas a base de contactores y se aplican después estos conceptos para explicar el arranque estrella-triángulo de un motor trifásico con ayuda de contactores. Se explican los motores de doble jaula de ardilla, deduciendo de un modo intuitivo el circuito equivalente correspondiente y se describen los tipos constructivos de motores asíncronos clasificados en las normas americanas NEMA. A continuación se trata el tema de regulación de velocidad, analizando con detalle el motor de dos velocidades, que corresponde a la conexión Dahlander. Se incorpora una pregunta en la que se estudia la dinámica del motor asíncrono y se determinan los tiempos de aceleración y las pérdidas de energía que se producen en el proceso de arranque y frenado. Continúa el capítulo con el estudio de los motores asíncronos monofásicos, en los que se deduce el circuito equivalente de un modo heurístico y en el que se explican los procedimientos de arranque de estas máquinas. Se incide en esta sección sobre la forma de conectar un motor trifásico para que pueda funcionar en redes monofásicas. El capítulo continúa con un estudio del funcionamiento del motor asíncrono trifásico cuando está alimentado por tensiones trifásicas desequilibradas y también se introduce una sección de ampliación en la que se explica la influencia de los armónicos de f.m.m. en el comportamiento de estos motores, describiendo el fenómeno de Görges, que aparece en un motor trifásico cuando el rotor está desequilibrado. La lección finaliza con la descripción de algunas máquinas asíncronas especiales tales como el regulador de inducción, los *selsyns* o ejes eléctricos y el motor de inducción lineal.

4.2. ASPECTOS CONSTRUCTIVOS

La máquina asíncrona o de inducción al igual que cualquier otro dispositivo de conversión electromecánica de la energía de tipo rotativo, está formada por un estátor y un rotor. En el estátor se coloca normalmente el inductor, alimentado por una red mono o trifásica. El desarrollo de este capítulo se dedica a la máquina trifásica, exceptuando el epígrafe 4.13, donde se estudiará el funcionamiento y arranque de los motores monofásicos. El rotor es el inducido, y las corrientes que circulan por él aparecen como consecuencia de la interacción con el flujo del estátor. Dependiendo del tipo de rotor, estas máquinas se clasifican en: *a*) **rotor en jaula de ardilla o en cortocircuito**, y *b*) **rotor devanado o con anillos**.

El estátor está formado por un apilamiento de chapas de acero al silicio que disponen de unas ranuras en su periferia interior en las que se sitúa un devanado trifásico distribuido,

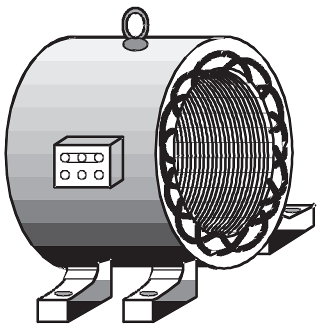


Figura 4.1. Estátor de un motor asíncrono.

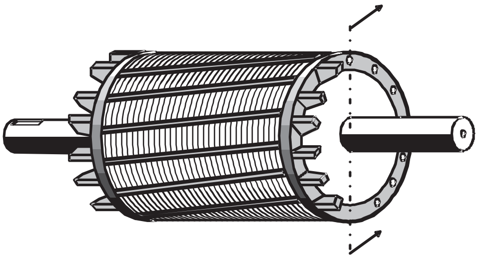


Figura 4.2. Rotor en jaula de ardilla.

alimentado por una corriente del mismo tipo, de tal forma que se obtiene un flujo giratorio de amplitud constante (véase epígrafe 2.8.3) distribuido sinusoidalmente por el entrehierro. El estátor está rodeado por la carcasa, tal como indica la Figura 4.1, disponiéndose en ésta las correspondientes patas de fijación y los anillos o cáncamos de elevación y transporte.

El rotor está constituido por un conjunto de chapas apiladas, formando un cilindro, que tienen unas ranuras en la circunferencia exterior, donde se coloca el devanado. En el tipo en forma de jaula de ardilla se tienen una serie de conductores de cobre o aluminio puestos en cortocircuito por dos anillos laterales (el nombre de jaula proviene del aspecto que tomaría este devanado si se omitiera el apilamiento de hierro); en la actualidad, en las máquinas pequeñas, se aplica un método de fundición de aluminio, con el que se producen al mismo tiempo las barras del rotor y los anillos laterales, resultando un conjunto como el que se muestra en la Figura 4.2. En el caso de rotor devanado o con anillos, se tiene un arrollamiento trifásico similar al situado en el estátor, en el que las tres fases se conectan por un lado en estrella y por el otro se envían a unos anillos aislados entre sí, como muestra la Figura 4.3. Esta disposición hace posible la introducción de resistencias externas por los anillos para limitar las corrientes de arranque, mejorar las características del par y controlar la velocidad.

La máquina asíncrona, además de disponer de un estátor y un rotor, está dotada de otros elementos mecánicos necesarios para su funcionamiento: tapas o cubos, rodamientos, carcasa, etc. En los motores de mediana y gran potencia existe un ventilador en el eje, cuya misión es producir una refrigeración forzada de la máquina. A veces la carcasa tiene forma ondulada para mejorar la evacuación del calor que se produce como consecuencia de las pérdidas que aparecen en el motor.

Un detalle importante a considerar en los motores asíncronos trifásicos es la disposición de los terminales del devanado del estátor en la llamada **caja de bornes** de la máquina. A esta caja o placa se llevan los extremos de los bobinados, en la forma que se muestra en la Figura 4.4*a*. De acuerdo con la Norma UNE-EN 60034-8, los principios de los arrollamientos se designan con las letras U_1, V_1 y W_1 (antiguamente U, V y W) y los extremos finales con U_2, V_2 y W_2 (antiguamente X, Y, Z), respectivamente.

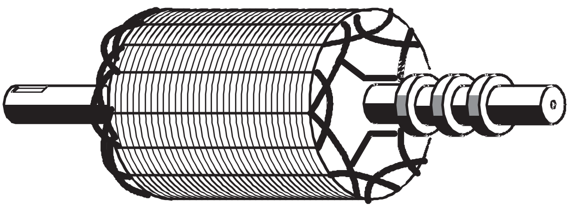


Figura 4.3. Rotor devanado o con anillos.

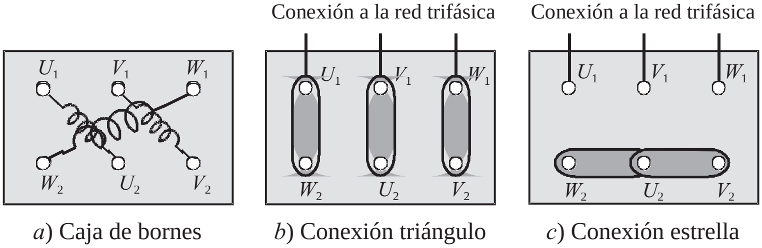


Figura 4.4. Placa de bornes. Conexiones estrella y triángulo.

Debe destacarse que los terminales de la misma fase no están enfrentados en la regleta de bornes, y esto se debe a que esta disposición facilita el conexionado de la máquina, haciendo uso de unas láminas de latón adecuadas, tal como muestran las Figuras 4.4*b* y *c*. Se observa que en la conexión en triángulo se unen los terminales $\mathbf{U_1}$ con $\mathbf{W_2}$, $\mathbf{V_1}$ con $\mathbf{U_2}$ y $\mathbf{W_1}$ con $\mathbf{V_2}$, mientras que en la conexión en estrella se unen entre sí los terminales $\mathbf{W_2}$ con $\mathbf{U_2}$ y $\mathbf{U_2}$ con $\mathbf{V_2}$ (en este caso, solamente serían necesarias dos láminas de latón para hacer los *puentes* correspondientes, pero se utilizan los tres, dos de ellos superpuestos, para poder disponer de las tres láminas cuando se necesite hacer la conexión en triángulo del motor).

Los esquemas desarrollados de ambas conexiones se muestran en la Figura 4.5. **La conexión en estrella se emplea cuando la máquina ha de conectarse a la tensión más elevada indicada en su placa de características, utilizando la conexión en triángulo para la tensión más baja**. Por ejemplo, si se tiene un motor asíncrono en cuya placa aparecen los valores 30 CV, 220/380 V, 69,2/40 A, 1.450 r.p.m., quiere decir que la potencia asignada es de 30 CV, girando a plena carga a 1.450 r.p.m., se puede conectar a una red de 220 V, disponiendo sus terminales en **triángulo** (tensión más baja), y entonces absorbe a plena carga una corriente de línea de 69,2 A, también se puede alimentar por una red de 380 V, pero para ello han de conectarse los devanados en **estrella** (tensión más alta), de tal forma que entonces la máquina consume una corriente (a plena carga) de 40 A. Los cambios en las conexiones anteriores se justifican por la necesidad de que la máquina trabaje en ambos casos con las mismas tensiones en los arrollamientos.

Para invertir el giro del motor es preciso cambiar el sentido de movimiento del campo giratorio, lo cual se logra intercambiando entre sí dos cualesquiera de los cables que se unen a la red de alimentación. En la Figura 4.6 se muestran una serie de conexiones típicas, indicando los sentidos de giro correspondientes.

La posición de trabajo de estos motores puede ser con eje horizontal o vertical. La Norma DIN 42950 da una relación de posibles versiones en función de ello y según que la máquina

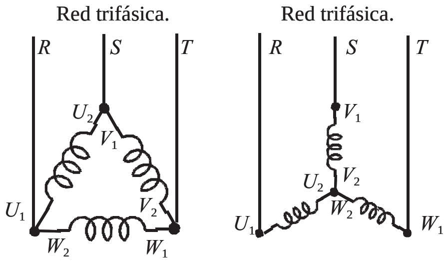


Figura 4.5. Esquemas desarrollados de las conexiones estrella y triángulo.

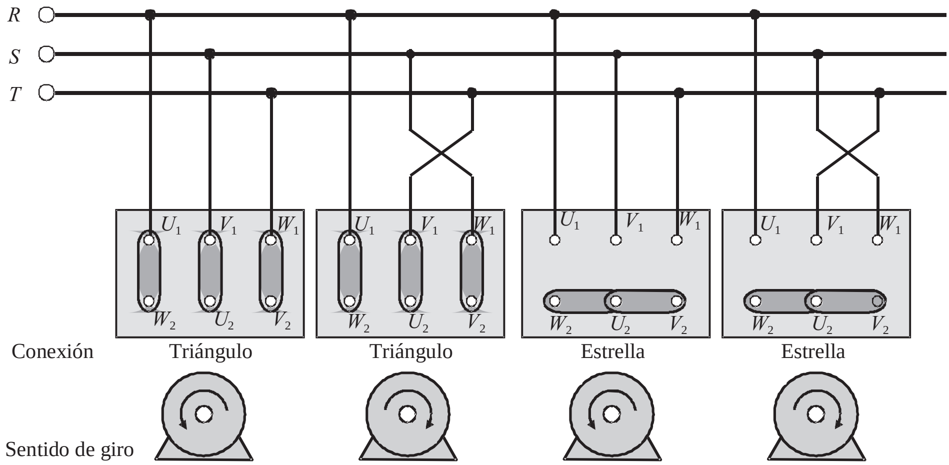


Figura 4.6. Conexiones de la placa de bornes y sentidos de rotación que se obtienen.

posea patas o bridas y que la fijación se haga sobre el suelo, pared o techo. Las Normas americanas NEMA (Publicación MGI-1963) especifican varias clases de diseño, definidas por las letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E* y *F*, dependiendo de las relaciones: par arranque/par asignado, corriente de arranque/corriente asignada. Las potencias asignadas de fabricación varían en un amplio rango. En la Tabla 4.1 se muestra un cuadro de características técnicas de motores asíncronos trifásicos con rotor de jaula de ardilla para una velocidad de sincronismo de 1.500 r.p.m. La potencia asignada mecánica se expresa tanto en CV como en kW (1 CV = 736 W).

Las tensiones de trabajo de los motores de la serie anterior oscilan entre 220, 380 y 500 V. Cuando las potencias necesarias son más elevadas es conveniente emplear máquinas alimentadas por redes de A.T., y es frecuente en grandes motores utilizar tensiones del orden de 3 kV a 6 kV, cubriendo una gama de potencias entre 200 y 20.000 kW.

4.3. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

Generalmente la máquina asíncrona suele funcionar como motor, y a este régimen de funcionamiento nos referiremos en lo sucesivo, mientras no se diga lo contrario. El devanado del estátor está constituido por tres arrollamientos desfasados 120° en el espacio y de $2p$ polos, al introducir por ellos corrientes de una red trifásica de frecuencia f_1, se produce una onda rotativa de f.m.m. distribuida sinusoidalmente por la periferia del entrehierro, que produce un campo magnético giratorio cuya velocidad mecánica en r.p.m. viene expresada, de acuerdo con (2.68), por:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} \qquad [\text{r.p.m}] \tag{4.1}$$

que recibe el nombre de **velocidad de sincronismo**. Para comprender mejor los fenómenos físicos puestos en juego en el funcionamiento de este motor, en la Figura 4.7 se ha sustituido el devanado trifásico real del estátor de la Figura 4.1 por un imán periférico que se mueve a la velocidad de sincronismo n_1. Este imán móvil es equivalente al campo magnético giratorio

Tabla 4.1. Características técnicas de motores asíncronos trifásicos con rotor en jaula de ardilla

CARACTERÍSTICAS DE MOTORES TRIFÁSICOS DE INDUCCIÓN CON ROTOR EN JAULA Y REFRIGERADOS POR SUPERFICIE

Velocidad de sincronismo: 1.500 r.p.m. Tensiones: 220/380 V (para >7,5 CV también a 500 V). Aislamiento clase B (F). Protección IP44

CV	*kW*	*Peso (kg)*	*M.d.i. $J = GD^2/4$ (kg m²)*	*Valores de servicio*					*Relaciones*		
				Velocid. r.p.m.	*Rend. η*	*cos φ*	*I_n a 380 V*	*Par T_n N.m*	*T_a/T_n*	*I_a/I_n*	*$T_{máx}/T_n$*
1/12	0,06	2,5	0,00016	1.300	54	0,73	0,23	0,44	2,0	2,8	—
1/8	0,09	2,8	0,00019	1.315	57	0,71	0,34	0,66	2,0	3,0	—
1/6	0,12	3,5	0,0003	1.315	56	0,75	0,44	0,88	1,9	3,0	—
1/4	0,18	4,1	0,0004	1.320	60	0,75	0,61	1,3	1,9	3,0	—
1/3	0,25	4,8	0,0006	1.345	64	0,76	0.78	1,8	1,9	3,4	—
1/2	0,37	6,0	0,0008	1.375	66	0,76	1,12	2,5	2,0	3,7	—
3/4	0,55	8,0	0,0015	1.400	71	0,80	1,47	3,7	2,3	4,7	—
1	0,75	9,4	0,0018	1.400	74	0,79	1,95	5,1	2,5	5,0	—
1,5	1,1	12	0,0028	1.400	74	0,81	2,8	7,5	2,1	4,9	2,3
2	1,5	15,6	0,0035	1.410	76	0,81	3,7	10	2,4	5,3	2,6
3	2,2	22	0,0048	1.410	78	0,83	5,2	15	2,3	5,9	2,6
4	3	24	0,0058	1.410	79	0,83	7,0	20	2,6	6,0	2,7
5,5	4	42	0,011	1.435	84	0,82	8,8	27	2,8	7,0	3,0
7,5	5,5	50	0,023	1.450	84	0,85	11,7	36	2,2	7,0	2,8
10	7,5	66	0,028	1.450	86	0,85	15,6	49	2,4	7,9	3,3
15	11	92	0,05	1.460	88	0,86	22	72	2,4	8,0	3,0
20	15	110	0,07	1.460	89	0,88	29	98	2,2	8,0	2,9
25	18,5	170	0,16	1.460	89,5	0,84	37	124	2,6	6,0	2,3
30	22	195	0,16	1.460	90,5	0,85	43	147	2,6	6,0	2,3
40	30	265	0,3	1.470	92	0,87	57	199	2,6	6,0	2,2
50	37	320	0,5	1.470	92,5	0,87	70	245	2,6	6,0	2,2
60	45	350	0,55	1.470	93	0,87	85	298	2,6	6,0	2,2
75	55	470	0,67	1.475	93	0,87	103	363	2,6	6,0	2,1
100	75	630	1,5	1.480	94	0,87	139	494	2,6	6,0	2,1
125	90	700	1,75	1.480	94	0,87	165	593	2,6	6,0	2,1
150	110	850	2,75	1.485	94,5	0,87	205	722	2,6	6,0	2,1
180	132	960	3	1.485	95	0,87	245	867	2,6	6,0	2,0
220	160	1.060	3,2	1.485	95	0,87	295	1.050	2,4	6,5	2,4
270	200	1.410	6,4	1.485	95	0,89	360	1.300	2,4	6,8	2,4
340	250	1.630	7,5	1.485	95,5	0,89	445	1.640	2,4	6,8	2,4
430	315	2.020	13	1.490	95,5	0,89	560	2.060	2,2	7,0	2,4
545	400	2.380	16	1.490	96	0,89	715	2.610	2,2	7,0	2,4

que produce el devanado del estátor. Este campo magnético gitatorio inducirá f.e.m.s. en las barras de la jaula de ardilla del rotor, y como éstas forman un circuito cerrado, debido a la existencia de sus anillos de cierre finales, aparecerán corrientes en las mismas que reaccionarán con el flujo del estátor. En la Figura 4.7 se ha dibujado la jaula de ardilla del rotor y se muestran en un determinado instante, la situación de los polos equivalentes del imán giratorio

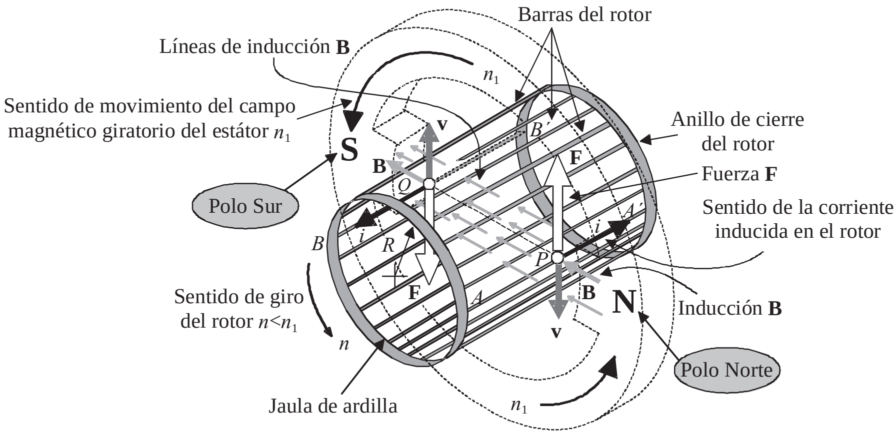


Figura 4.7. Sentido de la corriente inducida en los conductores del rotor.

y los sentidos correspondientes de la inducción **B** en el entrehierro (y cuya distribución en el entrehierro es en realidad de tipo sinusoidal).

De acuerdo con la ley de Faraday, la f.e.m. inducida en un conductor de longitud **L** que se mueve a la velocidad **v** dentro de un campo **B**, tiene un valor:

$$e = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\, d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L} \tag{4.2}$$

Para determinar su sentido en una barra del rotor, debe considerarse que éste gira en sentido contrario al campo magnético para tener en cuenta el movimiento relativo existente entre el campo magnético y la jaula de ardilla. Si se considera por ejemplo la barra del rotor *AA*′, situada enfrente de polo norte de imán giratorio, tal como se muestra en la Figura 4.7, **v** representa la velocidad tangencial relativa de esta barra del rotor respecto al movimiento del imán y es por ello que de acuerdo con (4.2) se obtiene el sentido vectorial de la f.e.m. en esta barra y de la correspondiente corriente inducida, tal como se señala en la Figura 4.7. De forma similar se ha dibujado el sentido vectorial de la corriente en la barra *BB*′ situada al lado opuesto del rotor, enfrente del polo sur. En realidad se producen corrientes en todas las barras de la jaula de ardilla, siguiendo una ley sinusoidal, debido a que la distribución del campo magnético en el entrehierro es de este tipo.

Al circular corriente por los conductores del rotor, aparecerán en éstos las fuerzas de reacción correspondientes y cuyos valores se obtienen aplicando la conocida ley vectorial (ley de Laplace) a cada una de las barras de la jaula de ardilla:

$$\mathbf{F} = \int i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = i(\mathbf{L} \times \mathbf{B}) \tag{4.3}$$

En la Figura 4.7 solamente se han señalado los vectores fuerza **F** para las barras *AA*′ y *BB*′ situadas en las posiciones opuestas consideradas anteriormente, lo que evidentemente da lugar a un momento de este par de fuerzas cuyo sentido es el del movimiento del campo giratorio del estátor, es decir el rotor inicia su marcha siguiendo a los polos móviles. En realidad no existe un único par de fuerzas en el rotor, sino que debido a que aparecen fuerzas de reacción en cada una de las barras del rotor, se deben multiplicar cada una de estas fuerzas por el radio

del rotor R e integrar esta acción sobre el número total de las barras para obtener el par electromagnético total de la máquina. Pero debe tenerse en cuenta que cuanto más se aproxime la velocidad del rotor a la velocidad n_1 del campo magnético giratorio, tanto menor resultarán las f.e.m.s inducidas en los conductores del rotor (porque disminuye la velocidad relativa entre el campo magnético giratorio y el rotor) y en consecuencia, también se reducen las corrientes en el mismo, lo que causa una disminución del **par interno** o par electromagnético del motor. Si como caso límite, el rotor girase a la velocidad de sincronismo n_1, no habría entonces movimiento relativo del campo giratorio respecto del rotor, desapareciendo con ello la f.e.m. inducida (4.2) y como consecuencia de ello se anularían tanto la corriente como el par correspondiente. De este modo la velocidad de sincronismo n_1 constituye el límite teórico al que puede girar el rotor. El motor debe girar por consiguiente a una velocidad inferior a la de sincronismo ($n < n_1$), es decir su velocidad de régimen es **asíncrona** y esta velocidad será tanto menor cuanto mayor sea el par resistente de la carga que mueve el motor.

Como se ha indicado en el epígrafe 2.12.4 se conoce con el nombre de **deslizamiento** al cociente:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{4.4}$$

cuyo valor está comprendido en los motores industriales entre el 3 y el 8 por 100 a plena carga. Al aumentar la carga mecánica del motor, el par resistente se hace mayor que el par interno y el deslizamiento aumenta, esto provoca un aumento en las corrientes del rotor, gracias a lo cual aumenta el par motor y se establece el equilibrio dinámico de los momentos resistente y motor.

De acuerdo con la expresión (2.165), las frecuencias de las corrientes del rotor, están relacionadas con la frecuencia del estátor por medio de la expresión:

$$f_2 = s\, f_1 \tag{4.5}$$

En el caso de que el **rotor esté parado**, se cumple $n = 0$, es decir $s = 1$, lo que indica que en estas circunstancias, las frecuencias del estátor y del rotor coinciden, es decir:

$$f_2 = f_1 \tag{4.6}$$

Si se denomina E_2 el valor eficaz de la f.e.m. por fase del rotor, N_2 al número de espiras por fase, Φ_m al flujo máximo que lo atraviesa y $K_2 = K_{d2}K_{a2}$ al coeficiente del devanado, se cumplirá de acuerdo con (2.113):

$$E_2 = 4{,}44\ K_2\, f_1\, N_2 \Phi_m \tag{4.7}$$

y de una forma similar, si se denomina E_1 al valor eficaz de la f.e.m. inducida por fase en el estátor, se tendrá:

$$E_1 = 4{,}44\ K_1\, f_1\, N_1 \Phi_m \tag{4.8}$$

donde N_1 es el número de espiras por fase y K_1 el factor de devanado correspondiente. Las expresiones (4.7) y (4.8) recuerdan las que se obtienen en un transformador donde el **primario es el estátor y el secundario es el rotor**. En efecto, el lector puede comparar la analogía existente entre las ecuaciones (4.7) y (4.8) con las (3.5) que se obtenían en el estudio de los transformadores. La diferencia estriba en que en los motores aparecen unos coeficientes de devanado K_1 y K_2 que representan factores reductores (cuyos valores son menores, pero muy cercanos a la unidad) para tener en cuenta que las f.e.m.s. de las diversas espiras del devanado, al estar distribuido en ranuras por las periferias del estátor y del rotor, llevan un desfase

entre sí, lo que obliga a realizar una suma geométrica (fasorial) de las f.e.m.s. inducidas en las diferentes bobinas, cosa que no ocurre en el caso de los transformadores, donde las f.e.m.s. de todas las espiras van en fase, por tratarse de un devanado concentrado y la f.e.m. total se obtiene evidentemente como suma aritmética de las f.e.m.s. individuales. Cuando el **rotor gira** a la velocidad n, en el sentido del campo giratorio, el deslizamiento ya no es la unidad y las frecuencias de las corrientes del rotor son iguales a f_2. Denominando E_{2s} a la nueva f.e.m. inducida en este devanado, se cumplirá:

$$E_{2s} = 4{,}44\, K_2\, f_2 N_2 \Phi_m \tag{4.9}$$

y comparando (4.7) y (4.9) se obtiene:

$$E_{2s} = s\, E_2 \tag{4.10}$$

expresión que relaciona las f.e.m.s inducidas en el rotor, según se considere que está en movimiento: E_{2s} o parado: E_2. La f.e.m. anterior E_{2s} producirá unas corrientes en el rotor de frecuencia f_2, de tal forma que éstas a su vez crearán un campo giratorio, cuya velocidad respecto a su propio movimiento será:

$$n_2 = \frac{60 f_2}{p} \tag{4.11}$$

ya que el rotor está devanado con el **mismo número de polos que el estátor**. Como la máquina gira a n r.p.m. , la velocidad del campo giratorio del rotor respecto a un referencial en reposo será $n_2 + n$. Si se tienen en cuenta las expresiones (4.1) y (4.5) resulta:

$$f_2 = s\, f_1 = \frac{n_1 - n}{n_1} \frac{pn_1}{60} = \frac{p(n_1 - n)}{60} \tag{4.12}$$

y al comparar con (4.11) se deduce:

$$n_2 = n_1 - n \tag{4.13}$$

en consecuencia, la velocidad absoluta del campo del rotor será:

$$n_2 + n = (n_1 - n) + n = n_1 \tag{4.14}$$

lo que indica que el campo del rotor gira en sincronismo con el campo del estátor.

Realmente, son las f.m.m.s. de ambos devanados, las que interaccionan para producir el flujo resultante en el entrehierro. Debe hacerse notar que esta interacción sólo es posible si las f.m.m.s. están enclavadas sincrónicamente, es decir si las ondas de f.m.m. de estátor y rotor giran a la misma velocidad n_1, lo que requiere según (4.1), (4.11) y (4.14) que el **número de polos con el que se confeccionan ambos arrollamientos sean iguales**, lo que representa una exigencia constructiva de estas máquinas.

No es necesario sin embargo, que el número de fases del estátor y del rotor deban ser iguales, ya que el campo giratorio dentro del cual se mueve el rotor es independiente del número de fases del estátor. Los motores con rotor devanado o con anillos se construyen normalmente para tres fases, es decir igual que las del estátor, sin embargo el motor en jaula de ardilla está formado por un gran número de barras puestas en cortocircuito, dando lugar a un devanado polifásico, en general de m_2 fases. Lo anterior es fácil de comprender: si se considera por ejemplo un rotor trifásico de dos polos y 6 barras o conductores en total, se habrá formado un devanado trifásico en el que cada fase consiste en una sola espira (dos barras opuestas formarían la espira). Si considerando una máquina bipolar, el rotor tienen 10

barras, podemos decir que se ha logrado un devanado pentafásico con 1 espira por fase. En general se podrá decir que si el rotor tiene B barras y $2p$ polos se tendrán m_2 fases:

$$m_2 = \frac{B}{2p} \tag{4.15}$$

donde cada fase está formada por una única espira.

Debe destacarse que cuando el rotor es de jaula de ardilla, las leyes del bobinado del estátor son las que determinan el número de polos del motor. En el rotor se obtienen corrientes por inducción, por lo que las diferencias de fase que aparecen entre las corrientes de las diversas barras del rotor coinciden con el ángulo eléctrico que forman las mismas. Así si el rotor tiene 36 barras y el estátor tiene 2 polos, se habrán formado 18 fases, pero la misma jaula de ardilla en el interior de un estátor de 4 polos daría lugar a 9 fases, etc. En resumen una jaula de ardilla es equivalente a un devanado rotórico de m_2 fases de 1 espira/fase, donde m_2 viene expresado por la relación (4.15). Cuando el rotor está bobinado (o con anillos) se disponen entonces de m_2 fases (normalmente m_2 = 3) con N_2 espiras por fase. En ambas situaciones, el estátor siempre está formado por m_1 fases (generalmente m_1 = 3) con N_1 espiras por fase.

Como quiera que el sentido de transferencia de la energía en un motor asíncrono se produce de estátor a rotor por inducción electromagnética de un modo similar al que se obtenía entre el primario y el secundario de un transformador, esto hace que la analogía se traslade no solamente a la simbología de las magnitudes implicadas sino incluso también, en algunos autores, a las propias denominaciones. De ahí que al estudiar motores asíncronos se consideren homónimas las expresiones: estátor y primario, rotor y secundario. Ésta es también la causa de que todos los parámetros que aparecen en el estátor lleven el subíndice 1 y los que aparecen en el rotor tengan el subíndice 2. De hecho y como se comprobará en el epígrafe 4.4 el circuito equivalente desarrollado para el transformador será la guía para deducir el circuito equivalente del motor. Si se desean establecer las ecuaciones de comportamiento eléctrico del estátor y del rotor, será preciso tener en cuenta que los arrollamientos tienen unas resistencias R_1 y R_2 ohmios/fase y que además existen flujos de dispersión en los devanados del estátor y rotor que dan lugar a las autoinducciones L_{d1} y L_{d2}. En consecuencia, las reactancias de los arrollamientos en reposo, cuando la pulsación de la red es $\omega_1 = 2\pi f_1$ serán:

$$X_1 = L_{d1}\,\omega_1 = L_{d1}\,2\pi f_1 \quad ; \quad X_2 = L_{d2}\,\omega_1 = L_{d2}\,2\pi f_1 \tag{4.16}$$

Sin embargo, al girar el rotor la frecuencia secundaria cambia al valor f_2, dando lugar a la reactancia X_{2s}, que en función de X_2 vale:

$$X_{2s} = L_{d2}\,\omega_2 = L_{d2}\,2\pi f_2 = s\,X_2 \tag{4.17}$$

En la Figura 4.8 se muestra un esquema simplificado por fase del motor en el que se muestran los parámetros anteriores. Se observa que el primario está alimentado por la red de tensión V_1 y debe vencer las caídas de tensión en la impedancia de este devanado, el flujo común a estátor y rotor induce en los arrollamientos f.e.m.s E_1 y E_{2s} cuyas magnitudes se indican en las expresiones (4.8) y (4.9). Es importante que el lector examine en la Figura 4.8 las polaridades de las f.e.m.s. con la correspondencia de los terminales homólogos de estátor y rotor señalados con un punto y también los sentidos de las corrientes primaria y secundaria, que se han asignado de un modo similar al explicado en los transformadores, *actuando la f.m.m. secundaria en contra (efecto desmagnetizante) respecto de la f.m.m. primaria* (ya que la corriente I_1 *entra* por punto y la corriente I_2 *sale* por punto).

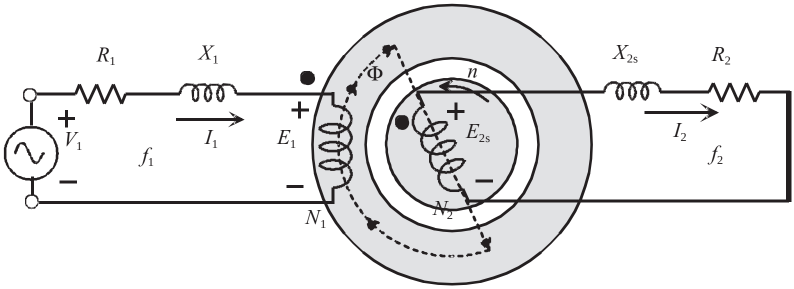


Figura 4.8. Circuito equivalente por fase del motor asíncrono trifásico.

La impedancia del rotor está formada por la resistencia R_2 y la reactancia X_{2s}, estando este devanado cerrado en cortocircuito. Las ecuaciones eléctricas correspondientes, se obtendrán aplicando el 2.º lema de Kirchhoff a las mallas de primario y secundario, resultando:

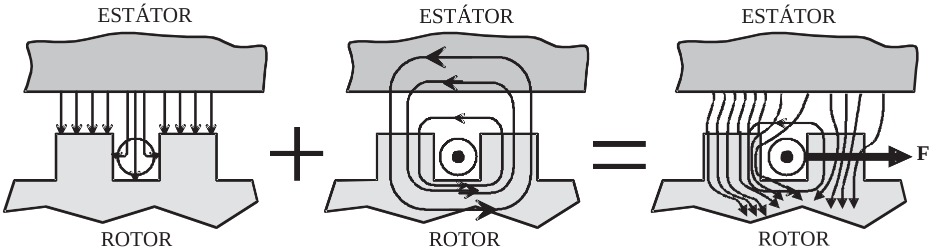
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\mathbf{I}_1 + jX_1\mathbf{I}_1 \quad ; \quad \mathbf{E}_{2s} = R_2\mathbf{I}_2 + jX_{2s}\mathbf{I}_2 \qquad (4.18)$$

debe tenerse en cuenta además, que las frecuencias de ambos circuitos son diferentes y de valores f_1 y f_2 respectivamente.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

1. Paradoja de la Ley de Laplace

El razonamiento seguido en el epígrafe anterior para explicar la generación de corriente en los conductores del rotor al ser atravesados por el campo magnético giratorio del estátor (y utilizando la Ley de Laplace expresada por la ecuación 4.3), solamente sería válido si el rotor fuera liso y en él se apoyaran los conductores del rotor a modo de generatrices del cilindro que forma aquél, ya que de este modo estos conductores son atravesados por las líneas de inducción magnética del estátor. Pero en realidad los conductores del rotor se alojan en ranuras tal como se muestra en la Figura 4.9, de tal forma que el campo magnético no atraviesa realmente al conductor (es decir B = 0 en el conductor) y en consecuencia de acuerdo con la expresión (4.3) la fuerza resultante sería nula. Sin embargo la experiencia demuestra que el resultado obtenido en esta situación real coincide con los teóricos calculados por la aplicación directa de la ecuación (4.3).



a) Líneas de **B** del estátor *b*) Líneas de **B** del conductor *c*) Líneas de **B** resultantes

Figura 4.9. Determinación del sentido de la fuerza en un conductor situado dentro de una ranura.

La explicación a esta paradoja debe buscarse en la deformación de las líneas de inducción al circular corriente por los conductores. En la Figura 4.9a se muestra el reparto de la inducción en la ranura y el diente cuando la intensidad en el conductor del rotor es cero; se observa que debido a la menor reluctancia de los dientes, las líneas de B tienden a concentrarse en ellos sin atravesar apenas al conductor. En la Figura 4.9b se muestran la forma de las líneas de inducción producidas únicamente por el conductor del rotor llevando corriente. En la Figura 4.9c se representa la resultante de ambos campos, se observa que se produce una deformación de las líneas de inducción, que se manifiesta en que en la ranura de la derecha de la Figura 4.9c, se tiene un enrarecimiento de las líneas de inducción magnética, mientras que en la ranura de la izquierda hay una mayor concentración de líneas de inducción, y es por lo que aparece una fuerza resultante en el conductor que tiene el sentido indicado, pero con la diferencia fundamental de que ***esta fuerza actúa realmente en los dientes y no en los conductores****, lo que constituye un hecho afortunado, ya que si la fuerza actuara sobre los conductores comprimiría los aislamientos de éstos sobre los dientes, lo que sería perjudicial para la vida de los aislantes. La demostración analítica de que con esta deformación de las líneas de inducción, el cálculo de la fuerza en los conductores conduce a los mismos resultados que la ley de Laplace se sale de los límites de este texto ya que hace uso del concepto de tensiones mecánicas de Maxwell. Para el lector interesado en profundizar en este tema puede consultar el Capítulo 3 del libro de Denis O'Kelly citado en la bibliografía que se presenta al final del capítulo.*

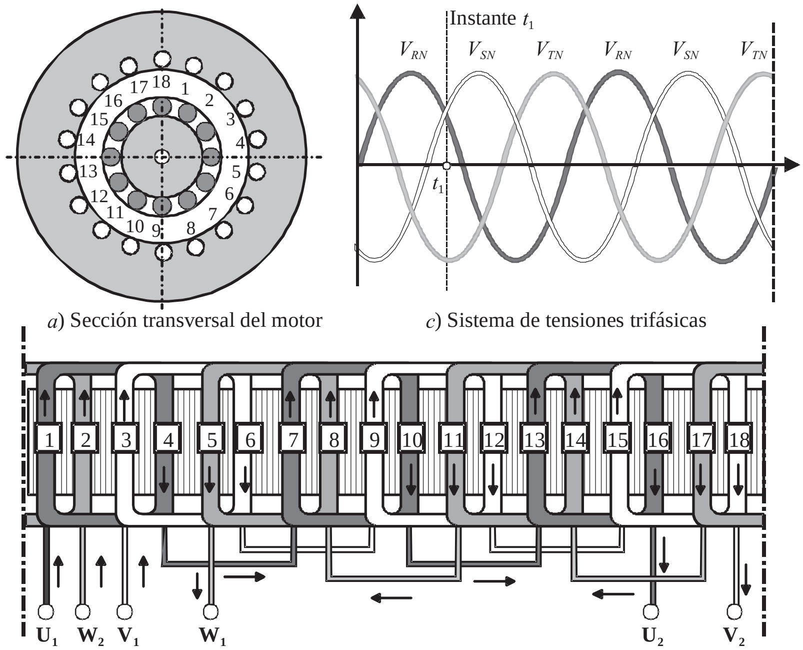
2. Diseño del devanado de un motor asíncrono trifásico

Aunque el estudio de los devanados de una máquina eléctrica y en especial de un motor asíncrono pertenecen a un Curso de Cálculo y Construcción de Máquinas Eléctricas, nos ha parecido interesante para el lector explicar los principios de diseño del devanado del estátor de un motor de inducción trifásico, para que se haga una idea de los principios básicos que deben tenerse en cuenta. Supóngase para ello que se dispone de un estátor de 18 ranuras como se muestra en la Figura 4.10a, y que se desea diseñar el esquema de un devanado trifásico en simple capa de 6 polos (recuérdese del Capítulo 2 que en un devanado de simple capa se tiene una rama de bobina por ranura). En la Figura 4.10a se han numerado las ranuras del estátor y se muestra la jaula de ardilla de los conductores del rotor. En la Figura 4.10b se muestra el esquema desarrollado del estátor, que se obtiene al cortar por una generatriz del cilindro del mismo (comprendida entre las ranuras 1 y 18). El rayado vertical representa el hierro del estátor.

El esquema del devanado comienza determinando el número de ranuras por polo y fase que tiene la máquina. Si se denomina K al número de ranuras del estátor (que es igual a 18), m al número de fases (igual a 3), 2p al número de polos que deseamos que se formen (igual a 6) y q al número de ranuras por polo y fase, se tiene que:

$$q = \frac{K}{2pm} = \frac{18}{6 \cdot 3} = 1$$

conocido este valor, a continuación en la Figura 4.10b hay que ir pintando en diferentes colores las ramas de bobina que están en las ranuras, de tal modo que si $q = 1$ (como es nuestro caso), se dibuja la rama de bobina que existirá en la ranura 1 con el color oscuro, a continuación la ranura siguiente 2 será de color claro y la siguiente 3 de color blanco, y así sucesivamente hasta pintar todas las ranuras o ramas de bobina, tal como se ha señalado en la Figura 4.10b. Si q llega a ser igual a 2, entonces habría que dibujar las dos primeras ranuras de color oscuro, las dos siguientes de color claro y las dos siguientes de color blanco, extendido a todas las ranuras del estator y de forma análoga para cualquier otro valor de q. Una vez realizada esta operación, prácticamente el propio dibujo señala cómo deben ser las bobinas. Por ejemplo, en el caso de la Figura 4.10b tienen el mismo color oscuro las ramas de bobina situadas en las ranuras 1, 4, 7, 10, 13 y 16. Se forman de este modo tres bobinas por fase: la primera irá de la ranura 1 a la 4, la segunda de la ranura 7 a la 10 y la tercera de la ranura 13 a la 16 (de momento dibuje solamente las bobinas de esta fase). Esta primera fase del devanado que tiene



a) Sección transversal del motor

c) Sistema de tensiones trifásicas

b) Esquema del devanado trifásico del motor

Figura 4.10. Desarrollo de un devanado trifásico de 18 ranuras, simple capa y 6 polos.

color oscuro comienza en la ranura 1 de la primera bobina de esta fase y se designa como terminal U_1 y su final que está en la ranura 4 se debe unir con el principio de la segunda bobina de esta fase (que está situada en la ranura 7) y el final de ésta que está en la ranura 10 se debe unir con el principio de la bobina tercera de esta fase y que está en la ranura 13 y su final, que está en la ranura 16, será el terminal de la primera fase y que se designa por U_2 tal como se señala en la Figura 4.10b. Esta forma de conectar las bobinas de una misma fase (es decir el final de la primera bobina con el principio de la segunda, el final de la segunda con el principio de la tercera, etc.) se conoce por el nombre de ***conexión por polos consecuentes****.*

Antes de ver cómo se forman las otras fases del devanado, conviene hacer unos cálculos previos. Obsérvese en la Figura 4.10a que si el estátor tiene 18 ranuras, el ángulo geométrico entre dos ranuras consecutivas es de $\alpha = 360°/18 = 20°$, y como el número de pares de polos de la máquina es de 3, el ángulo eléctrico o magnético equivalente es $\theta = p\alpha = 3.20° = 60°$ eléctricos. Como quiera que todas las bobinas tienen una anchura de 3 ranuras (por ejemplo la primera bobina oscura va desde la ranura 1 a la 4), este valor medido en grados eléctricos es de $3.60° = 180°$ y se comprueba con ello una condición importante que deben cumplir los devanados eléctricos y que ya se comentaba en el capítulo 2 y es que el ***ancho de las bobinas debe ser lo más cercano a un paso polar****, es decir 180° eléctricos. A continuación se debe comenzar a dibujar el devanado de la segunda fase del motor; téngase en cuenta para ello, que este devanado debe estar desfasado 120° respecto de la fase anterior (dibujada en oscuro), lo que equivale a $120°/\theta = 120°/60° = 2$ ranuras, por lo que el principio de la fase segunda correspondiente al terminal V_1 del motor estará separado 2 ranuras del comienzo del devanado de la primera fase, y como este terminal U_1 está situado en la ranura 1, el terminal V_1 estará situado en la ranura 3, como así se ha indicado en la Figura 4.10b. Sabiendo ya donde comienza esta segunda fase, se forman las bobinas que la componen (color blanco): la primera está entre las ranuras 3 y 6, la segunda entre la 9 y la 12 y la tercera entre la 15 y la 18. Las uniones*

entre ellas son: el final de la primera bobina que está situado en la ranura 6 se unirá con el principio de la siguiente situada en la ranura 9 y el final de ésta que está en la ranura 12 con el principio de la siguiente que está en la ranura 15 y su final que está en la ranura 18, indicará el final o terminal de la segunda fase, que se señala con la letra V_2 en la Figura 4.10b.

De modo análogo se dibuja el devanado de la tercera fase del motor que estará separado 120° (es decir dos ranuras) respecto de la fase anterior y como ésta empieza en la ranura 3, la tercera fase debe comenzar en la ranura 5 y se señala como terminal W_1. Sabiendo ya donde comienza esta tercera fase, se forman las bobinas que la componen (color claro): la primera está entre las ranuras 5 y 8, la segunda entre la 11 y la 14 y la tercera entre la 17 y la 2 (es decir esta última bobina queda cortada por la generatriz del cilindro con el que comienza el desarrollo del esquema de la Figura 4.10b). Las uniones entre ellas son: el final de la primera bobina que está situado en la ranura 8 se unirá con el principio de la siguiente situada en la ranura 11 y el final de ésta que está en la ranura 14 con el principio de la siguiente que está en la ranura 17 y su final que está en la ranura 2, indicará el final o terminal de la segunda fase, que se señala con la letra W_2 en la Figura 4.10b. De este modo se ha dibujado el devanado completo del motor formado por tres devanados desfasados en el espacio 120° eléctricos, como así lo requiere el teorema de Ferraris para que se pueda producir un campo magnético giratorio.

A continuación debe comprobarse que este devanado al alimentarse con corrientes trifásicas produce los 6 polos requeridos; para ello en la Figura 4.10c se han dibujado las tres tensiones instantáneas de un sistema trifásico. Obsérvese que en cualquier instante de tiempo, siempre hay dos tensiones del mismo signo y otra contraria. Por ejemplo, en el instante t_1 señalado en la Figura 4.10c, mientras la tensión V_{RN} (fase R más oscura) y V_{SN} (fase S blanca) son positivas, la V_{TN} (fase T clara) es negativa. Esta propiedad se emplea para verificar las conexiones de las bobinas y comprobar que se forman los polos deseados. Para ello se señalan con flechas los sentidos de las corrientes en los distintos lados activos de las bobinas. Para el instante t_1 considerado, al ser las tensiones V_{RN} y V_{SN} positivas (que alimentan a las fases del motor oscura U_1-U_2 y blanca V_1-V_2) y la tensión V_{TN} negativa (que alimenta a la fase clara W_1-W_2), se deberá recorrer la primera fase (oscura) desde su principio U_1 hasta su final U_2; la segunda fase (blanca) desde su principio V_1 hasta su final V_2 y la tercera fase (clara) desde ***su final W_2 hasta su principio W_1.*** *De esta forma se obtienen las flechas o sentidos de las corrientes en los conductores (lados activos de las bobinas) que se indican en la Figura 4.10c y que dan lugar a los 6 polos requeridos (obsérvese que en las tres primeras bobinas, las corrientes van de abajo hacia arriba, en las tres siguientes de arriba a abajo, etc). Es evidente que conforme transcurra el tiempo, los polos anteriores se irán moviendo, debido al cambio de los sentidos de las corrientes, lo que significa que el campo magnético producido por el conjunto de las tres fases del devanado es giratorio. Finalmente los seis terminales del motor se deberán unir a la caja de bornes de acuerdo con los esquemas ya señalados previamente en la Figura 4.4. Se deja como ejercicio al lector el que con este mismo estátor y con un devanado simple capa dibuje el esquema correspondiente de un motor trifásico de dos polos.*

4.4. CIRCUITO EQUIVALENTE DEL MOTOR ASÍNCRONO

El circuito equivalente de un motor asíncrono tiene como objetivo, al igual que en el caso de transformadores, el obtener una red que explique el comportamiento de la máquina, pero en la que no aparezca la acción transformadora entre los circuitos de primario y secundario, lo cual trae consigo el reducir las magnitudes de un devanado al otro, generalmente del rotor al estátor. En el transformador la operación se hacía directamente debido a que las frecuencias de los arrollamientos eran idénticas, pero en el motor aparentemente se tiene una dificultad, ya que las frecuencias de las corrientes del estátor y del rotor son diferentes, como puede

observarse claramente en la Figura 4.8 del epígrafe anterior. En este circuito, la corriente que circula por el rotor, de acuerdo con la 2.ª ecuación (4.18), será:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_{2s}}{R_2 + j\,X_{2s}} \tag{4.19}$$

que teniendo en cuenta las igualdades (4.10) y (4.17) se convierte en:

$$\mathbf{I}_2 = \frac{s\,\mathbf{E}_2}{R_1 + js\,X_2} = \frac{\mathbf{E}_2}{\dfrac{R_2}{s} + j\,X_2} \tag{4.20}$$

La transformación de la ecuación (4.19) en la (4.20) *requiere una meditación profunda*, que es preciso que comprenda el lector, ya que nos va a permitir obtener más tarde el circuito equivalente del motor asíncrono. Obsérvese que en la ecuación (4.19) los parámetros de f.e.m. (E_{2s}) y reactancia (X_{2s}) están referidos, de acuerdo con (4.9) y (4.17), a la frecuencia f_2 del rotor en movimiento. Sin embargo, la última ecuación (4.20), que define la misma intensidad $\mathbf{I}_2$ (módulo y fase) que (4.19), tiene unos parámetros de f.e.m. (E_2) y reactancia (X_2) que están referidos, según (4.7) y (4.16), a la frecuencia f_1 del estátor. Ahora bien, de acuerdo con (4.5) y (4.6), la frecuencia del rotor coincide con la del estátor cuando la máquina está parada. Por este motivo la ecuación (4.20) describe en definitiva el comportamiento de un **rotor pseudoestacionario** con unos parámetros E_2 y X_2 referidos a rotor parado (independientes del deslizamiento), pero en el que la nueva resistencia del rotor para tener en cuenta estos cambios es ahora R_2/s en vez de R_2.

Para visualizar mejor estos cambios se han preparado los circuitos de la Figura 4.11. El caso *a*) es una repetición del esquema de la Figura 4.8, en el que para mayor claridad se ha omitido la figura de la máquina. La ecuación de la corriente en el rotor responde a la ecuación (4.19). En la Figura 4.11*b* se ha modificado el circuito del rotor para adaptarlo a la ecuación (4.20); nótese en este nuevo secundario que E_2 y X_2 son, respectivamente, la f.e.m. y la reactancia del rotor en reposo, independientes del movimiento; el efecto de éste se incluye en R_2/s, de tal modo que la frecuencia de este **rotor estacionario ficticio** es f_1. Para ver el cambio que se ha producido en la resistencia del rotor se puede hacer una transformación de la ecuación (4.20):

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{E}_2}{R_2 + j\,X_2 + R_2\left(\dfrac{1}{s} - 1\right)} \tag{4.21}$$

En la Figura 4.11*c* se muestra el circuito correspondiente a la expresión anterior, que consta de la resistencia propia del rotor R_2 más otra resistencia R_c de valor:

$$R_c = R_2\left(\frac{1}{s} - 1\right) \tag{4.22}$$

que depende del movimiento (del valor del deslizamiento). La resistencia R_c se denomina **resistencia de carga** y representará el **efecto equivalente** a la carga mecánica que lleve el motor, o de otro modo la potencia eléctrica disipada en R_c (multiplicada por el número de fases) representará la potencia desarrollada por el motor en su movimiento de rotación, es decir, la potencia mecánica en el eje.

El circuito final obtenido de la Figura 4.11*c* no reúne todavía las ventajas analíticas de un circuito eléctrico, ya que existen acoplamientos magnéticos. Es preciso, al igual que se hacía

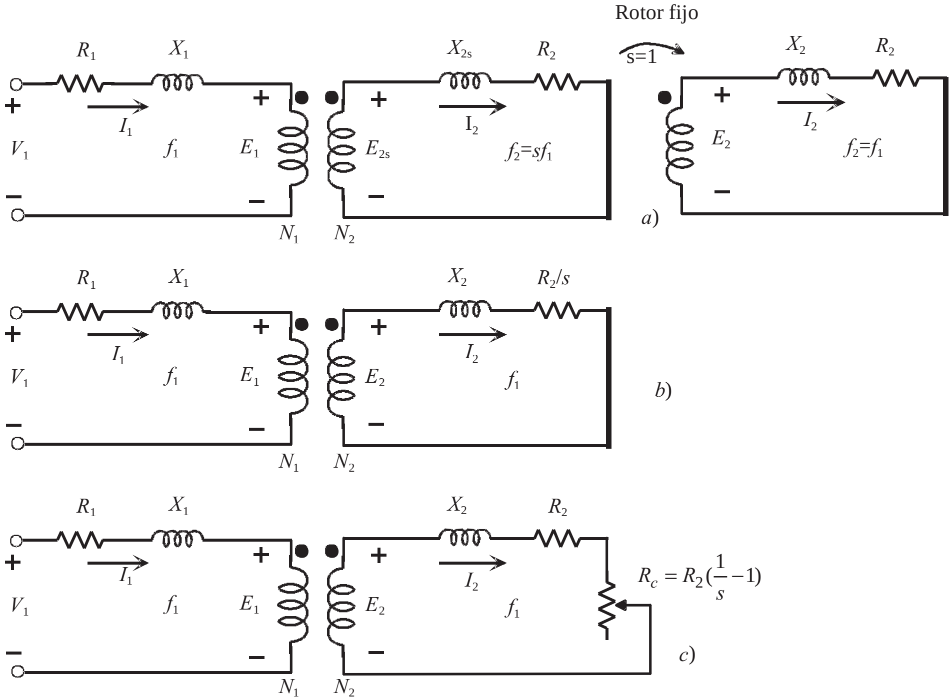


Figura 4.11. Desarrollo del circuito equivalente de un motor asíncrono.

en transformadores, reducir el secundario al primario (en nuestro, caso reducir o trasladar el rotor al estátor).

Recuérdese que en el caso de transformadores para hacer este cambio se requería considerar un nuevo secundario en el que se elegía un número de espiras $N_2' = N_1$ y de este modo se modificaban las magnitudes secundarias a los nuevos valores:

$$E_2' = mE_2 \quad ; \quad I_2' = \frac{I_2}{m} \quad ; \quad R_2' = m^2 R_2 \quad ; \quad X_2' = m^2 X_2 \tag{4.23}$$

En la situación del motor el proceso es más complejo debido a la influencia de los factores de devanado y a que en general los números de fases de estátor y rotor no coinciden.

En la Figura 4.12*a* se ha repetido el esquema de la Figura 4.11*c* y en la Figura 4.12*b* se ha utilizado un secundario equivalente en el que las magnitudes correspondientes se han señalado con tilde. En cada caso se han indicado en los circuitos el número de fases y factores de devanado tanto del estátor como del rotor.

Para centrar el tema y a modo de recapitulación: sabemos que disponemos de un motor asíncrono cuyo circuito inicial equivalente por fase es el mostrado en la Figura 4.12*a*, con los siguientes parámetros:

$$\text{ESTÁTOR (primario):} \begin{Bmatrix} m_1, K_1, N_1 \\ E_1, V_1, I_1, R_1, X_1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{ROTOR (secundario):} \begin{Bmatrix} m_2, K_2, N_2 \\ E_2, V_2, I_2, R_2, X_2 \end{Bmatrix} \tag{4.24}$$

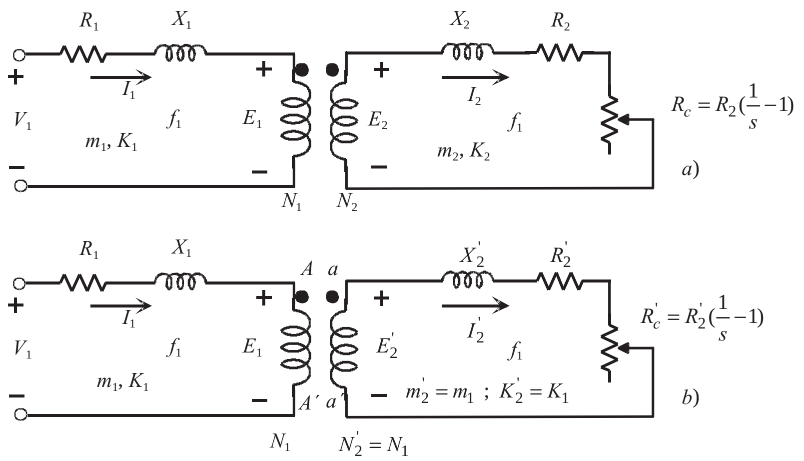


Figura 4.12. Circuito equivalente reducido al estátor.

En la Figura 4.12*b* se ha mostrado un circuito equivalente, en el que se conserva intacto el primario pero en el que las magnitudes del secundario son:

$$\text{ROTOR EQUIVALENTE:} \begin{Bmatrix} m_2', K_2', N_2' \\ E_2', V_2', I_2', R_2', X_2' \end{Bmatrix} \tag{4.25}$$

Si este nuevo rotor se quiere reducir al estátor, para conseguir una simplificación posterior, se tendrán que adaptar sus parámetros a los del primario, lo que significa proceder a las igualdades siguientes:

$$m_2' = m_1 \quad ; \quad K_2' = K_1 \quad ; \quad N_2' = N_1 \tag{4.26}$$

Como consecuencia de ello, los nuevos parámetros del rotor serán:

a) Fuerza electromotriz E_2'

De acuerdo con (4.7), (4.8) y (4.26) se podrá escribir:

$$E_2' = 4{,}44\ K_2' f_1 N_2' \Phi_m = 4{,}44\ K_1 f_1 N_1 \Phi_m = E_1 \tag{4.27}$$

es decir, el nuevo rotor tiene una f.e.m. E_2' igual a E_1, lo que permitirá luego unir el primario con el secundario, que es lo que se trata de conseguir.

Por otro lado, si se divide (4.8) entre (4.7) resulta:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{K_1 N_1}{K_2 N_2} = m_v \tag{4.28}$$

que se denomina **relación de transformación de tensiones.** Por consiguiente, de acuerdo con (4.27) y (4.28) se tiene:

$$E_2' = m_v E_2 \tag{4.29}$$

que determina la f.e.m. del nuevo rotor E_2' frente a la real E_2.

b) Corriente I'_2

Si los dos secundarios de la Figura 4.12 son equivalentes, deberán suministrar la misma potencia rotórica, es decir:

$$m_2 E_2 I_2 = m'_2 E'_2 I'_2 = m_1 E'_2 I'_2 \tag{4.30}$$

y teniendo en cuenta (4.29) da lugar a:

$$I'_2 = \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{m_v} I_2 = \frac{m_2 K_2 N_2}{m_1 K_1 N_1} I_2 = \frac{I_2}{m_i} \tag{4.31}$$

donde m_i es igual a:

$$m_i = \frac{m_1 K_1 N_1}{m_2 K_2 N_2} = \frac{m_1}{m_2} m_v \tag{4.32}$$

que se denomina **relación de transformación de corrientes.**

c) Impedancias R'_2, X'_2, R'_c

Para ver la regla de transformación de impedancias deberá aplicarse el principio de igualdad energética. Si se consideran, por ejemplo, las pérdidas en el cobre en los circuitos de la Figura 4.12 se podrá escribir:

$$m_2 R_2 I_2^2 = m'_2 R'_2 I_2'^2 = m_1 R'_2 I_2'^2 \tag{4.33}$$

y teniendo en cuenta (4.31) y (4.32) resultará:

$$R'_2 = m_v m_i R_2 \tag{4.34}$$

y de un modo análogo:

$$X'_2 = m_v m_i X_2 \quad ; \quad R'_c = m_v m_i R_c \tag{4.35}$$

donde el producto $m_v m_i$ constituye la **denominada relación de transformación de impedancias**.

El lector notará que las reglas de transformación aquí demostradas representan una generalización de las empleadas en el estudio de transformadores. Puede comprobar que si coinciden las fases del estátor y del rotor, coinciden entonces las relaciones de transformación de tensiones y corrientes ($m_v = m_i$), dando lugar a unas magnitudes transformadas similares a las (4.23) que se obtenían en transformadores.

Teniendo en cuenta los valores transformados del nuevo rotor, y de acuerdo con la igualdad (4.27), se podrán unir los terminales *A-A′* del primario con los correspondientes *a-a′* del secundario (rotor) en la Figura 4.12*b*. El esquema correspondiente se muestra en la Figura 4.13*a*, donde se ha dibujado la rama paralelo por la que se derivará la corriente de vacío del motor de un modo análogo a lo que ocurría en el caso de un transformador. La ecuación que relaciona las corrientes de estátor y rotor se obtienen del esquema de la Figura 4.13*a*, aplicando el primer lema de Kirchhoff en el nudo *A*, lo que da lugar a:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}'_2 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m_i} \tag{4.36*}$$

* En el ejemplo de aplicación 4.1 se demuestra esta igualdad de un modo más riguroso. Aquí se ha preferido seguir un método más didáctico e intuitivo utilizando la analogía con el transformador.

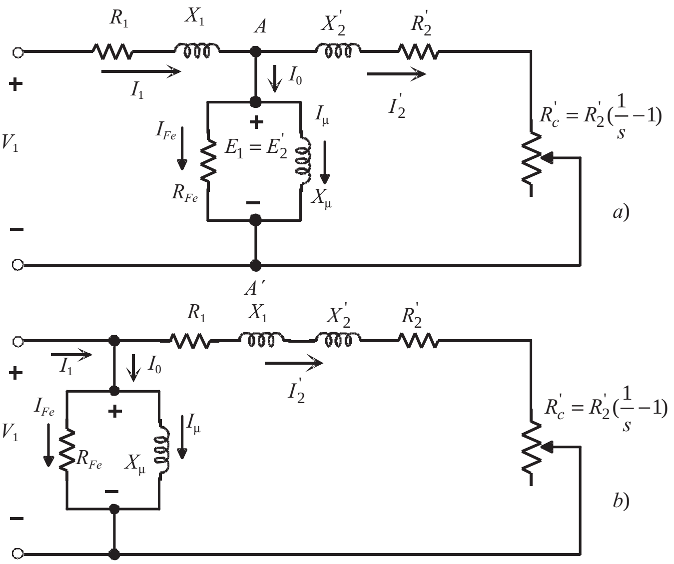


Figura 4.13. Circuitos equivalentes: *a*) exacto; *b*) aproximado.

y las ecuaciones eléctricas de primario y secundario correspondiente serán:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\mathbf{I}_1 + jX_1\mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{E}_2' = R_2'\mathbf{I}_2' + R_c'\mathbf{I}_2' + jX_2'\mathbf{I}_2' \qquad (4.37)$$

Al igual que sucedía con los transformadores, se obtiene una gran ventaja analítica si se traslada la rama de vacío a los terminales de entrada, lo que da lugar al circuito equivalente aproximado de la Figura 4.13*b*. Los errores que ahora se obtienen con esta aproximación son superiores a los que resultaban en el transformador; esto se debe a la presencia del entrehierro en los motores, que hace que la corriente de vacío sea ahora del 35 al 40 por 100 de la asignada, mientras que en el caso del transformador era del orden del 3 al 8 por 100 de la asignada. Con el circuito equivalente aproximado se obtienen corrientes en el rotor que son apreciablemente más altas que los valores reales. De todos modos, la aproximación realizada es normalmente aceptable (al menos en cálculos preliminares) para motores de más de 10 kW, y es el que se seguirá en este texto.

* CIRCUITO EQUIVALENTE APROXIMADO CON AJUSTE DE TENSIÓN*

Se puede conseguir un circuito equivalente aproximado más preciso que el de la Figura 4.13*b* reduciendo el valor de la tensión de alimentación, tal como se demuestra a continuación. Si se parte del circuito equivalente exacto de la Figura 4.13*a* y se tiene en cuenta la 1.ª ecuación (4.37), se puede escribir:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + (R_1 + jX_1)\,\mathbf{I}_1 \qquad (4.38)$$

y dado que se cumple (4.36):

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2' \qquad (4.39)$$

---

* Algunos autores utilizan un circuito equivalente simplificado a base de obtener el circuito equivalente de Thévenin entre *A* y *A′* en la Figura 4.13*a*.

donde el valor de $\mathbf{I}_0$ según el circuito equivalente exacto es igual a:

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{E}_1 \left[\frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_\mu} \right] \approx \frac{\mathbf{E}_1}{jX_\mu} \tag{4.40}$$

lo que representa que se desprecia la corriente I_{Fe} frente a la corriente de imanación I_μ. Sustituyendo (4.39) y (4.40) en (4.38) resulta:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + (R_1 + jX_1) \left[\frac{\mathbf{E}_1}{jX_\mu} + \mathbf{I}'_2 \right] \tag{4.41}$$

y de acuerdo con la 2.ª ecuación (4.37), que es simplemente la aplicación del 2.º lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 4.13*a*, se tiene:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}'_2 = \left(\frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right) \mathbf{I}'_2 \tag{4.42}$$

que al llevar a (4.41) nos da:

$$\mathbf{V}_1 = \left[R_1 + jX_1 + \frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right] \mathbf{I}'_2 + \frac{R_1 + jX_1}{jX_\mu} \mathbf{E}_1 \tag{4.43}$$

y dado que normalmente $X_\mu >> R_1$ y admitiendo que $\mathbf{E}_1$ es un poco menor pero con un valor cercano a $\mathbf{V}_1$ en el rango de funcionamiento normal, la ecuación anterior se transforma en:

$$\mathbf{V}'_1 = \mathbf{V}_1 \left(1 - \frac{X_1}{X_\mu} \right) = \left[R_1 + jX_1 + \frac{R'_2}{s} + jX'_2 \right] \mathbf{I}'_2 \tag{4.44}$$

que responde al circuito de la Figura 4.14, que es análogo al de la Figura 4.13*b* pero en el que se ha corregido la tensión primaria para obtener valores más reales de las corrientes I_1 e I'_2. Hay que hacer constar que este circuito aproximado sirve para determinar magnitudes como: corrientes, potencias perdidas, potencias mecánicas, etc., pero si se desea calcular la potencia absorbida por el motor de la red se deberá utilizar la tensión real V_1 aplicada al motor y no V'_1.

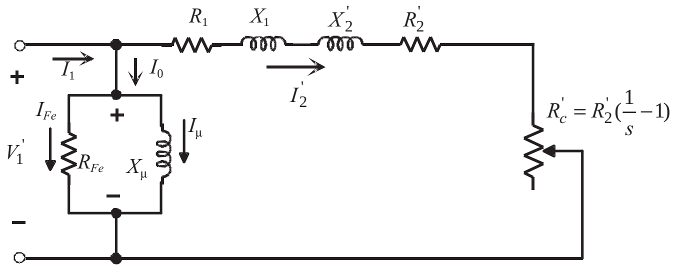


Figura 4.14. Circuito equivalente aproximado corregido.

Ejemplo de aplicación 4.1

Demostrar la ecuación (4.36) partiendo de la igualdad de f.m.m.s. en vacío y en carga de un motor asíncrono polifásico.

Solución

En el Capítulo 2 se demostró que el valor máximo de la f.m.m. resultante producida por un devanado de m fases (expresión 2.75) era:

$$\mathscr{F} = \frac{m}{2} F_m \tag{4.45}$$

donde F_m representa la f.m.m. máxima producida por el devanado de una fase, que según (2.55) vale:

$$F_m = \frac{4}{\pi} K \frac{N_f \sqrt{2}\, I}{2p} \tag{4.46}$$

ya que $i(t) = \sqrt{2}\, I \cos \omega t$. Por consiguiente, la f.m.m. máxima resultante producida por un devanado de m fases es:

$$\mathscr{F} = \frac{m}{2} \frac{4}{\pi} K \frac{N_f \sqrt{2}\, I}{2p} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} m \frac{N_f KI}{p} \tag{4.47}$$

Si se considera que el motor trabaja en vacío, la corriente que absorberá el motor de la red será I_0, y por el rotor circulará una corriente despreciable. En consecuencia, la f.m.m. (giratoria) que producirá el flujo del motor será:

$$\mathscr{F} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} m_1 \frac{N_1 K_1 \mathbf{I}_0}{p} \tag{4.48}$$

Cuando el motor trabaja en carga, las corrientes que circulan por ambos devanados son I_1 e I_2, respectivamente, y teniendo en cuenta la diferencia entre el número de fases, espiras y factores de devanado del rotor y el estátor y además el carácter desmagnetizante del rotor, se tendrá una f.m.m. total:

$$\mathscr{F} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} m_1 \frac{N_1 K_1 \mathbf{I}_1}{p} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} m_2 \frac{N_2 K_2 \mathbf{I}_2}{p} \tag{4.49}$$

que al igualar con (4.48) y simplificando nos da:

$$m_1 N_1 K_1 \mathbf{I}_0 = m_1 N_1 K_1 \mathbf{I}_1 - m_2 N_2 K_2 \mathbf{I}_2 \tag{4.50}$$

de donde se deduce:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 + \frac{m_2 K_2 N_2}{m_1 K_1 N_1} \mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_0 + \frac{\mathbf{I}_2}{m_i} \quad ; \quad m_i = \frac{m_1 K_1 N_1}{m_2 K_2 N_2} \tag{4.51}$$

que es la expresión (4.36) que se deseaba demostrar.

4.5. ENSAYOS DEL MOTOR ASÍNCRONO*

Los ensayos del motor asíncrono permiten determinar los parámetros del circuito equivalente de la máquina. De forma similar al transformador, existen dos tipos de pruebas, denominadas: *a*) **ensayo de vacío** y *b*) **ensayo de cortocircuito**.

4.5.1. Ensayo de vacío o de rotor libre

Consiste en hacer funcionar el motor sin ninguna carga mecánica en el eje, es decir, la máquina trabaja a rotor libre. Se debe aplicar la tensión asignada al primario V_{1n}, midiendo la potencia absorbida P_0 y la corriente de vacío I_0. Existe una gran diferencia entre este ensayo en el motor asíncrono y el correspondiente del transformador. Obsérvese que si la máquina

---

* Para una discusión más completa de estos ensayos consultar: *IEEE Standard Test Procedure for Polyphase Induction Motors and Generators* n.º 112 (2004).

pudiera funcionar en esta prueba a la velocidad de sincronismo $n = n_1$, el deslizamiento sería igual a cero, lo que indicaría, en el circuito equivalente exacto de la Figura 4.13*a*, que la resistencia de carga R'_c se hace infinita y, en consecuencia, I'_2 sería nula, y resultaría un esquema similar al indicado en la Figura 3.21*a* para el transformador (despreciando las pérdidas en el cobre del primario). Sin embargo, y como ya se ha explicado anteriormente, el motor asíncrono no puede girar a la velocidad de sincronismo, ya que I'_2 sería nula y no existiría ningún par electromagnético en el eje. En estas circunstancias lo que sucede realmente es que el motor en vacío gira a una velocidad muy cercana a la del campo giratorio, lo que indica, desde el punto de vista del circuito de la Figura 4.13*a*, que la resistencia de carga R'_c tiene un valor muy elevado pero no infinito; como no se ejerce ningún par de carga en el eje, la potencia disipada en esta resistencia representa la perdida en rozamiento y ventilación del motor. Como quiera además que I'_2 es de pequeño valor debido a la alta impedancia de R'_c, se podrán despreciar las pérdidas en el cobre del devanado del rotor. Denominando P_{cu1} las pérdidas en el cobre del estátor en este ensayo, P_{Fe} a las pérdidas en el hierro y P_m a las pérdidas mecánicas se cumplirá:

$$P_0 = P_{Fe} + P_m + P_{cu1} \tag{4.52}$$

Para determinar cada una de las pérdidas anteriores es preciso completar el ensayo de vacío con medidas adicionales; las pérdidas en el cobre P_{cu1} pueden calcularse si se mide previamente la resistencia R_1 de cada una de las fases del estátor (esta operación se realiza introduciendo c.c. en una fase del primario, midiendo tensión y corriente, la ley de Ohm da el valor de R_1. En la práctica, para tener en cuenta el *efecto pelicular* o *skin* en los conductores, se suele aumentar el valor anterior entre un 10 y un 20 por 100). Para determinar P_{Fe} y P_m es preciso alimentar el motor por una tensión variable, comenzando con el valor nominal o asignado V_{1n} o algo superior y reduciendo hasta un valor que puede tomarse entre el 30 y el 50 por 100 de V_{1n}; en cada escalón de tensión se deben medir los valores de P_0, I_0 y V_1, y a partir de ellos se deducen las pérdidas $P_{Fe} + P_m$ en cada etapa, de acuerdo con la ecuación:

$$P_{Fe} + P_m = P_0 - P_{cu1} = P_0 - m_1 R_1 I_0^2 \tag{4.53}$$

Al representar $P_m + P_{Fe}$ en función de V_1 se obtiene una curva de tipo parabólico, como se indica en la Figura 4.15*a*. Extrapolando esta curva, hasta que corte el eje de ordenadas, se obtiene para $V_1 = 0$, el valor de las pérdidas mecánicas P_m , ya que entonces las pérdidas en el

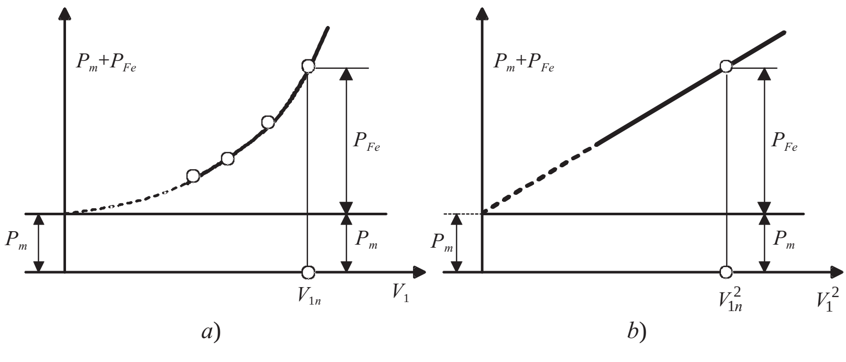


Figura 4.15. Reparto de las pérdidas en vacío en función de la tensión.

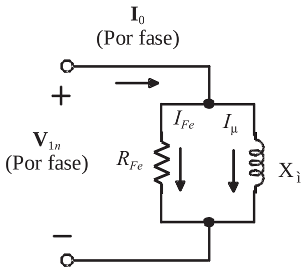


Figura 4.16. Circuito equivalente en vacío.

hierro son nulas al no existir flujo. El valor de las pérdidas en el hierro a la tensión asignada vendrá dado por la ordenada existente entre la curva $P_m + P_{Fe}$ y la horizontal P_m a esa tensión, como muestra la figura anterior. Para reducir errores en la extrapolación de la curva parabólica de la Figura 4.15*a*, es más práctico representar $P_m + P_{Fe}$ en función del cuadrado de la tensión V_1, tal como se muestra en la Figura 4.15*b*. En este caso la curva se transforma en una línea recta, cuya ordenada en el origen representa la pérdida mecánica del motor P_m.

Conocidas las pérdidas P_{Fe} (separada de P_m) se podrá calcular la rama paralelo del circuito equivalente, como muestra la Figura 4.16, que absorberá la potencia P_{Fe}, de acuerdo con las siguientes expresiones aproximadas:

$$\cos\varphi_0 = \frac{P_{Fe}}{m_1 V_{1n} I_0} \quad ; \quad I_{Fe} = I_0 \cos\varphi_0 \quad ; \quad I_\mu = I_0 \operatorname{sen}\varphi_0 \tag{4.54a}$$

de donde se deduce:

$$R_{Fe} = \frac{V_{1n}}{I_{Fe}} \quad ; \quad X_\mu = \frac{V_{1n}}{I_\mu} \tag{4.54b}$$

4.5.2. Ensayo de cortocircuito o de rotor bloqueado

Este ensayo se realiza bloqueando el rotor impidiéndole que gire, es decir, $n = 0$, por lo que se tendrá: $s = 1$, $R'_c = 0$, lo que indica que el motor se comporta como un transformador con el secundario en cortocircuito. Al estátor se le aplica una tensión creciente, partiendo de cero, hasta que la corriente absorbida sea la asignada, $I_{1cc} = I_{1n}$ (*por fase*), midiendo a la vez la tensión aplicada V_{1cc} (*fase*) y la potencia absorbida P_{cc} (*total*). La corriente de vacío I_0 es entonces despreciable frente a I_{1n} debido a la pequeña tensión necesaria, resultando el circuito equivalente de la Figura 4.17, que se obtiene al despreciar la rama paralelo del esquema de la Figura 4.13 y hacer $R'_c = 0$, debido a que en estas condiciones el deslizamiento es la unidad. De las medidas efectuadas puede obtenerse el f.d.p. en cortocircuito:

$$\cos\varphi_{cc} = \frac{P_{cc}}{m_1 V_{1cc} I_{1n}} \tag{4.55}$$

y de aquí resultan los valores:

$$R_{cc} = R_1 + R'_2 = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \cos\varphi_{cc} \quad ; \quad X_{cc} = X_1 + X'_2 = \frac{V_{1cc}}{I_{1n}} \operatorname{sen}\varphi_{cc} \tag{4.56}$$

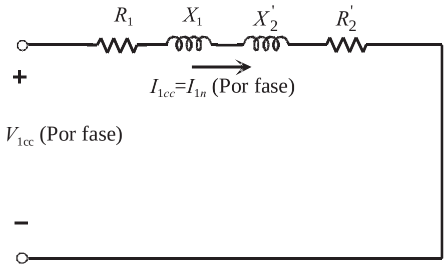


Figura 4.17. Circuito equivalente en cortocircuito.

En consecuencia, el ensayo de cortocircuito permite obtener los parámetros de la rama serie del motor. Como quiera además que R_1 se ha determinado con un ensayo en c.c., la primera ecuación (4.56) permitirá calcular R_2', valor que es necesario conocer, ya que está incluido en R_c'. Si se desea utilizar en el estudio del motor el circuito equivalente exacto (Fig. 4.13*a*), habrá que repartir la cantidad X_{cc} entre X_1 y X_2'. A falta de información se elegirá $X_1 = X_2'$.

Debe destacarse que en el ensayo de cortocircuito, al estar bloqueado el rotor, la frecuencia en éste coincide con la de la red, (es decir $f_1 = 50$ Hz en Europa); sin embargo cuando el motor funciona a plena carga, el deslizamiento es muy pequeño, por lo que la frecuencia del rotor es muy reducida, del orden de 2 a 3 Hz. Teniendo en cuenta que en este ensayo se determinan a la vez los parámetros del estátor y los del rotor, la frecuencia a emplear en esta prueba es un compromiso entre las frecuencias que tendrá el estátor y las que tendrá el rotor en funcionamiento. Es por ello que la Norma 112 del IEEE, recomienda que este ensayo se realice con una frecuencia del 25 por 100 de la asignada al motor, es decir de unos 12 a 15 Hz. En esta situación, el valor de la reactancia obtenida aplicando la segunda ecuación (4.56) y medida a la frecuencia del ensayo, debe corregirse para ser utilizada en el circuito equivalente del motor, lo que se consigue en la práctica multiplicando la reactancia del motor obtenida a frecuencia reducida, por el cociente entre la frecuencia nominal y la frecuencia utilizada en el ensayo.

En cuanto a los valores que suelen tener los parámetros del motor obtenidos en estos ensayos, se puede decir que para máquinas con potencias superiores a 10kW, las magnitudes de las impedancias (expresadas en valores por unidad), suelen oscilar entre los rangos siguientes:

$$R_1 = 0{,}01 \text{ a } 0{,}03;\; X_1 = 0{,}08 \text{ a } 0{,}12;\; R_2' = 0{,}01 \text{ a } 0{,}03;$$

$$X_2' = 0{,}08 \text{ a } 0{,}10;\; R_{Fe} = 7 \text{ a } 12;\; X_\mu = 2{,}5 \text{ a } 4$$

Si se considera la rama de vacío de estos motores, al tener R_{Fe} un valor muy elevado frente a X_μ, no suele incluirse esta resistencia en el circuito equivalente, por lo que la corriente de vacío es simplemente el cociente $I_0 = V_{1n}/X_\mu = 0{,}25$ a 0,4 p.u, es decir del 25 al 40 por 100 de la corriente nominal (que es muy superior a la corriente de vacío que tienen los transformadores que no suele superar el 10 por 100, lo que se debe a la existencia del entrehierro en los motores asíncronos). Por otra parte, la impedancia de la rama serie, que es en definitiva la impedancia de cortocircuito de la máquina, varía entre 0,16 y 0,22 p.u, por lo que la corriente de cortocircuito (corriente de arranque) a la tensión nominal es $I_a = V_{1n}/Z_{cc} = 4{,}5$ a 6,2 p.u, es decir de 4,5 a 6,2 veces la corriente nominal asignada a estas máquinas.

Amplíe sus conocimientos

Medida del deslizamiento de un motor asíncrono

El deslizamiento de un motor asíncrono viene expresado según (4.4) por el cociente:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \tag{1}$$

la velocidad de sincronismo es función de la frecuencia de alimentación de la red f_1 y del número de pares de polos p ($n_1 = 60f_1/p$ en r.p.m.) y la velocidad n es la que tiene el rotor en r.p.m. que se puede medir con un tacómetro. Teniendo en cuenta sin embargo, que la diferencia $n_1 - n$ es muy pequeña, cualquier error de lectura con el tacómetro tiene como consecuencia un error importante en la determinación del deslizamiento. Para que el lector se haga una idea de la situación; supóngase un motor trifásico de 4 polos y 50 Hz; la velocidad de sincronismo correspondiente será de 1.500 r.p.m. y si el rotor gira a una *velocidad real* de 1.440 r.p.m., el deslizamiento real será según (1) del 4 por 100. Ahora bien si se mide la velocidad con un tacómetro mecánico u óptico que tenga un error del 1 por 100, el valor resultante sería de 1.440 + 1 %. 1.440 = 1.454,4 r.p.m, dando lugar a un deslizamiento de 3,04 por 100, que supone un error cercano al 25 por 100 respecto al valor verdadero, lo cual resulta inadmisible. Es por ello que cuando se ensayan motores asíncronos no se deben emplear tacómetros para la determinación del deslizamiento. Existen diversos métodos prácticos para determinar el deslizamiento de un motor asíncrono en el Laboratorio y que se van a comentar a continuación:

a) Método estroboscópico

Este procedimiento es muy exacto y consiste en fijar en el extremo del eje del motor un disco de cartón dividido en sectores idénticos negros y blancos alternados y con un número de cada color igual al de polos de la máquina; es decir hay $2p$ sectores negros y otros $2p$ sectores blancos (ver Figura 4.18 en la que se ha supuesto que la máquina tiene cuatro polos). Este disco se ilumina con una lámpara de descarga tipo neón, alimentada por una de las fases de la red a la que se conecta el motor. El brillo de esta lámpara pasará por dos máximos de tensión en cada período o ciclo de la red, y si se supone que la frecuencia es de 50Hz, dará lugar a una iluminación que provocará 100 destellos por segundo.

Si se supone que el rotor gira a la velocidad de sincronismo, y se denomina ω_1 a la pulsación de la tensión de la red, la velocidad angular mecánica de giro del rotor Ω_1 en rad/s, tendrá un valor:

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{p} = \frac{2\pi f_1}{p} = \frac{2\pi}{pT} \tag{2}$$

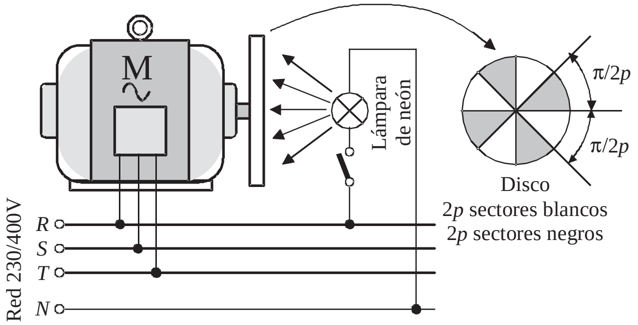


Figura 4.18. Medida de la velocidad por el método estroboscópico.

donde se ha llamado $T=1/f_1$ al período de la tensión de la red, es por ello que el ángulo geométrico descrito por el rotor en un semiperíodo $T/2$ será:

$$\alpha = \Omega_1 \cdot \frac{T}{2} = \frac{\pi}{p} \tag{3}$$

que de acuerdo con la Figura 4.18 coincide con el ángulo geométrico entre dos sectores negros (o blancos) consecutivos. Lo cual indica que si el rotor girase a la velocidad de sincronismo, el disco parecería inmóvil, pues en el transcurso de un destello de la lámpara al siguiente, cada sector negro pasaría a ocupar exactamente la posición del anterior. Pero como quiera que el motor gira a una velocidad inferior a la de sincronismo, el disco parecerá girar en sentido inverso al de rotación del motor y a una velocidad que es la diferencia entre la de sincronismo y la real del rotor, es decir a la velocidad de deslizamiento $\Omega_1 - \Omega$ y cuyo valor se obtiene de la definición de deslizamiento:

$$s = \frac{\Omega_1 - \Omega}{\Omega_1} \tag{4}$$

Por consiguiente será suficiente medir la velocidad anterior, para determinar el deslizamiento del motor. Para ello se debe tomar un punto de referencia en la carcasa de la máquina, señalándolo por ejemplo con un trozo de tiza, y contando el número de sectores negros x que aparentemente pasan por él, en un tiempo determinado t. Con ello se obtiene una velocidad de x/t sectores negros por segundo, y teniendo en cuenta que el ángulo de paso de un sector negro al siguiente es de π/p radianes, se tendrá el valor de la velocidad mecánica en rad/s:

$$\Omega_1 - \Omega = \frac{x}{t}\frac{\pi}{p} \tag{5}$$

y al sustituir las expresiones (2) y (5) en (4) se obtiene finalmente:

$$s = \frac{\frac{x}{t}\frac{\pi}{p}}{\frac{2\pi f_1}{p}} = \frac{x}{2tf_1} \tag{6}$$

por ejemplo, si pasan por la marca de tiza del estátor 20 sectores negros en 10 segundos, el deslizamiento resultante de acuerdo con la expresión anterior es:

$$s = \frac{x}{2tf_1} = \frac{20}{2 \cdot 10 \cdot 50} = 0{,}02 = 2\,\% \tag{7}$$

que corresponde a una velocidad real de rotor en r.p.m.: $n = n_1(1 - s) = 1.500(1 - 0{,}02) = 1.470$ r.p.m. Debe destacarse que este método es difícil de aplicar cuando los deslizamientos son superiores al 5 por 100 ya que resulta prácticamente imposible contar los sectores que pasan por la marca del estátor.

b) Método del milivoltímetro (o medida directa de la frecuencia del rotor)

Este método solamente es aplicable a los motores con el rotor devanado o con anillos. Consiste en medir la frecuencia de las corrientes del rotor con un milivoltímetro de cuadro móvil con el cero central y conectado entre dos anillos del rotor después de poner en cortocircuito el reóstato de arranque, es decir y tal como señala la Figura 4.19*a* una vez que se ha arrancado el motor, o sea cuando la manivela del reóstato está en la posición 4 en la que quedan cortocircuitados los anillos. *¡Para evitar averías en el aparato de medida es importante no conectar el milivoltímetro hasta no haberse asegurado de que los anillos del rotor están en la posición de cortocircuito!*

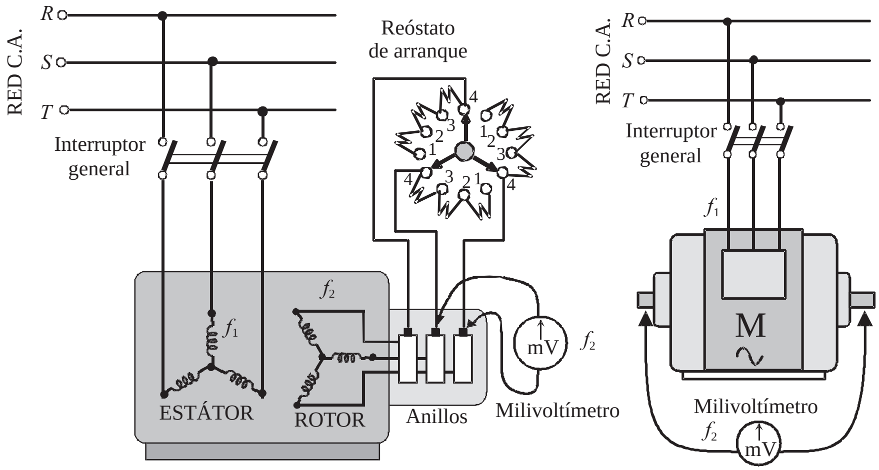


Figura 4.19. Medida de la frecuencia del rotor con un milivoltímetro.

La frecuencia f_2 de las corrientes del rotor es muy pequeña y según (4.5) es el producto del deslizamiento del motor *s* por la frecuencia del estátor f_1, por lo que si se considera un deslizamiento clásico del 4 por 100, la frecuencia del rotor es de solamente 2 Hz. La pequeña caída de tensión originada por la corriente del rotor entre los puntos de contacto basta para hacer oscilar el milivoltímetro con la misma frecuencia que la corriente del rotor. Para apreciar mejor estas variaciones conviene elegir el momento en que la desviación cambia de sentido y no cuando pasa por cero. El deslizamiento del motor será el cociente entre esta frecuencia y la frecuencia de la red que alimenta al estátor. Al igual que con el método estroboscópico este método es excelente para determinar el deslizamiento del motor siempre que su valor no supere el 5 o el 6 por 100, porque para valores superiores se tienen más de 3 oscilaciones por segundo que son difíciles de contar.

Este método también puede aplicarse a los motores en jaula de ardilla, es suficiente para ello apoyar las escobillas de los terminales del milivoltímetro sobre los extremos del eje del rotor, tal como se muestra en la Figura 4.19*b*. Hay que tener en cuenta que por el eje pasan líneas de campo magnético que giran con relación a dicho eje a la velocidad relativa del deslizamiento, por lo que el flujo magnético correspondiente induce una f.e.m. entre los extremos del circuito del milivoltímetro, cuya aguja oscila a la frecuencia de la corriente del rotor.

Ejemplo de aplicación 4.2

Un motor trifásico conectado en estrella, de 15 CV, 380 V, 50 Hz, 4 polos, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: VACÍO: 380 V, 3 A, 700 W. CORTOCIRCUITO: 100 V, 20 A, 1.200 W. Si la resistencia de cada fase del devanado primario es igual a 0,5 Ω y las pérdidas mecánicas son de 250 W, calcular los parámetros del circuito equivalente del motor.

Solución

a) Las pérdidas en el cobre del primario en vacío son:

$$P_{cu1} = 3 \cdot 0{,}5 \cdot 3^2 = 13{,}5 \text{ W}$$

Como quiera que las pérdidas mecánicas son de 250 W, el valor de P_{Fe}, de acuerdo con (4.52), será:

$$P_{Fe} = P_0 - P_{cu1} - P_m = 700 - 13{,}5 - 250 = 436{,}50 \text{ W}$$

El f.d.p. de la rama paralelo del circuito equivalente del motor, de acuerdo con (4.54), vale:

$$\cos\varphi_0 = \frac{436{,}5}{3 \cdot 220 \cdot 3} = 0{,}22 \quad ; \quad \text{sen}\ \varphi_0 = 0{,}98$$

ya que la tensión simple aplicada en el ensayo ha sido:

$$\frac{380}{\sqrt{3}} \approx 220 \text{ V}$$

Los valores de I_{Fe} e I_μ, teniendo en cuenta (4.54), serán:

$$I_{Fe} = 3 \cdot 0{,}22 = 0{,}66 \text{ A} \quad ; \quad I_\mu = 3 \cdot 0{,}98 = 2{,}94 \text{ A}$$

y en consecuencia de las ecuaciones (4.55) se deduce:

$$R_{Fe} = \frac{220}{0{,}66} = 333{,}33\ \Omega \quad ; \quad X_\mu = \frac{220}{2{,}94} = 74{,}83\ \Omega$$

b) La tensión de cortocircuito por fase es igual a: $V_{1cc} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57{,}74$ V, y el f.d.p. en ese estado será:

$$\cos\varphi_{cc} = \frac{1.200}{3 \cdot 57{,}54 \cdot 20} = 0{,}35 \quad ; \quad \varphi_{cc} = 0{,}94$$

Por tanto, los parámetros de la rama serie del circuito equivalente del motor, de acuerdo con (4.56), serán:

$$R_1 + R_2' = \frac{57{,}74}{20} \cdot 0{,}35 = 1{,}01\ \Omega \quad ; \quad X_1 + X_2' = \frac{57{,}74}{20} \cdot 0{,}94 = 2{,}71\ \Omega$$

4.6. BALANCE DE POTENCIAS

En un motor asíncrono existe una transformación de energía eléctrica en mecánica, que se transmite desde el estátor al rotor, a través del entrehierro, y el proceso de conversión está inevitablemente ligado con las pérdidas en los diferentes órganos de la máquina. Vamos a analizar el balance de energía que se produce en el funcionamiento del motor.

La potencia que la máquina absorbe de la red, si V_1 es la tensión aplicada por fase, I_1 la corriente por fase y φ_1 el desfase entre ambas magnitudes, será:

$$P_1 = m_1 V_1 I_1 \cos\varphi_1 \tag{4.57}$$

Esta potencia llega al estátor, y una parte se transforma en calor por efecto Joule en sus devanados, cuyo valor es:

$$P_{cu1} = m_1 R_1 I_1^2 \tag{4.58}$$

y la otra parte se pierde en el hierro: P_{Fe1}. La suma de ambas pérdidas representa la disipación total en el estátor P_{p1}:

$$P_{p1} = P_{cu1} + P_{Fe1} \tag{4.59}$$

Como quiera que las frecuencias de las corrientes en el rotor son muy reducidas, debido a que los deslizamientos en la máquina suelen ser pequeños (por ejemplo, para s = 5 por 100 con f_1 = 50 Hz, resulta una f_2 = 2,5 Hz << f_1), se considera entonces que prácticamente es el hierro del estátor el único origen de las pérdidas ferromagnéticas. De acuerdo con el circuito equivalente del motor de la Figura 4.13*a*, se podrá escribir:

$$P_{Fe} = P_{Fe1} = m_1 E_1 I_{Fe} \approx m_1 V_1 I_{Fe} \tag{4.60}$$

La potencia electromagnética que llegará al rotor a través del entrehierro, y que denominaremos P_a (potencia en el entrehierro), tendrá una magnitud:

$$P_a = P_1 - P_{p1} = P_1 - P_{cu1} - P_{Fe} \tag{4.61}$$

En el rotor aparecen unas pérdidas adicionales debidas al efecto Joule, P_{cu2}, y de valor:

$$P_{cu2} = m_2 R_2 I_2^2 = m_1 R_2' I_2'^2 \tag{4.62}$$

Las pérdidas en el hierro del rotor son despreciables debido al pequeño valor de f_2. La potencia que llegará al árbol de la máquina, denominada potencia mecánica interna, P_{mi}, será:

$$P_{mi} = P_a - P_{cu2} \tag{4.63}$$

que teniendo en cuenta el significado de la resistencia de carga R_c' del circuito equivalente, se podrá poner:

$$P_{mi} = m_1 R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_2'^2 \tag{4.64}$$

La potencia útil en el eje será algo menor, debido a las pérdidas mecánicas por rozamiento y ventilación; denominando P_m a estas pérdidas y P_u a la potencia útil, resultará:

$$P_u = P_{mi} - P_m \tag{4.65}$$

En la Figura 4.20 se muestra, en la parte superior, el circuito equivalente exacto del motor y en la parte inferior un dibujo simplificado de la máquina. En cada caso se muestran, con flechas, las pérdidas que se producen en las diversas partes del motor. Es instructivo que el lector determine las potencias con el circuito equivalente y verifique claramente la situación de las mismas en la *figura real*. Obsérvese en ambos casos que se obtiene una potencia útil de salida a partir de una potencia de entrada P_1. El rendimiento del motor vendrá expresado por el cociente:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{P_u}{P_u + P_m + P_{cu2} + P_{Fe} + P_{cu1}} \tag{4.66}$$

Existen algunas relaciones útiles entre las potencias anteriores; por ejemplo, el cociente entre P_{cu2} y P_{mi}, teniendo en cuenta (4.62) y (4.64), resulta ser:

$$\frac{P_{cu2}}{P_{mi}} = \frac{s}{1 - s} \tag{4.67}$$

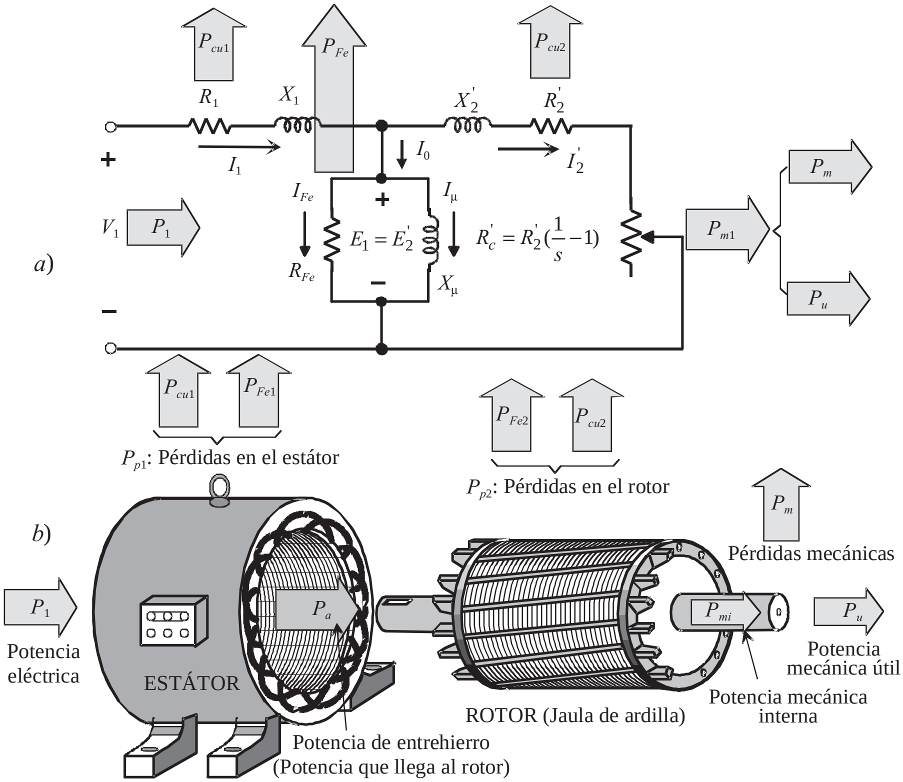


Figura 4.20. Circuito equivalente exacto y distribución de las potencias en el motor.

Por otra parte, la potencia que atraviesa el entrehierro P_a se puede poner:

$$P_a = P_{mi} + P_{cu2} = m_1 \frac{R'_2}{s} I'^2_2 = \frac{P_{cu2}}{s} = \frac{P_{mi}}{1 - s} \tag{4.68}$$

que relaciona P_a con P_{cu2}. Estas relaciones facilitan al estudio analítico de la máquina y la realización de ejercicios prácticos.

Ejemplo de aplicación 4.3

Un motor de inducción trifásico de 6 polos, 50 Hz, absorbe una potencia de 20 kW, cuando gira a 960 r.p.m. Las pérdidas totales del estátor son 0,5 kW y las de rozamiento y ventilación son de 1 kW. Calcular: a) El deslizamiento; b) pérdidas en el cobre del rotor; c) rendimiento.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor es:

$$n_1 = \frac{60\, f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1.000 \text{ r.p.m.}$$

En consecuencia, el deslizamiento valdrá:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1.000 - 960}{1.000} = 4\,\%$$

b) La potencia que llega al rotor será:

$$P_a = P_1 - P_{p1} = 20 - 0{,}5 = 19{,}5 \text{ kW}$$

resultando un valor de P_{cu2}, de acuerdo con (4.68):

$$P_{cu2} = sP_a = 0{,}04 \cdot 19{,}5 = 0{,}78 \text{ kW}.$$

c) La potencia útil en el árbol de la máquina tendrá una magnitud:

$$P_u = P_a - P_{cu2} - P_m = 19{,}5 - 0{,}78 - 1 = 17{,}72 \text{ kW}$$

En consecuencia, el rendimiento de la máquina será:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{17{,}72}{20} = 88{,}6\,\%$$

Ejemplo de aplicación 4.4

Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado, 2p = 4 polos, se conecta a una red trifásica de 380 V de tensión compuesta. El estátor y el rotor están conectados en estrella. La relación de transformación de tensiones coincide con la de corrientes y es igual a 2,5. Los parámetros del circuito equivalente del motor por fase son: $R_1 = 0{,}5\ \Omega$; $X_1 = 1{,}5\ \Omega$; $R_2 = 0{,}1\ \Omega$; $X_2 = 0{,}2\ \Omega$; $R_{Fe} = 360\ \Omega$; $X_\mu = 40\ \Omega$. Las pérdidas mecánicas son de 250 W. Si el deslizamiento a plena carga es del 5 por 100:

a) *Calcular, utilizando el circuito equivalente exacto del motor: 1) Corriente del estátor; 2) Corriente del rotor; 3) Corriente I_0; 4) Pérdidas en el hierro; 5) Potencia activa y reactiva absorbida por el motor de la red; 6) Potencia mecánica interna; 7) Potencia mecánica útil; 8) Rendimiento del motor; 9) Corriente de arranque y su f.d.p.*

b) *Repetir el problema utilizando el circuito equivalente aproximado del motor.*

Solución

a) Circuito equivalente exacto:

1. El circuito equivalente exacto del motor por fase es el mostrado en la Figura 4.21, en el que la rama paralelo del circuito se sitúa entre el estátor y el rotor. Los cálculos eléctricos en esta situación son más laboriosos que con el circuito equivalente aproximado, como se va a apreciar en el desarrollo del problema.

   La impedancia del rotor reducida al estátor, teniendo en cuenta que $m_v = m_i = 2{,}5$, es:

$$R'_2 = m^2 R_2 = 2{,}5^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}625\ \Omega \quad ; \quad X'_2 = 2{,}5^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}25\ \Omega$$

   El valor de la impedancia de carga, teniendo en cuenta que el deslizamiento es igual a 0,05, será:

$$R'_c = R'_2\left(\frac{1}{s} - 1\right) = 0{,}625\left(\frac{1}{0{,}05} - 1\right) = 11{,}875\ \Omega$$

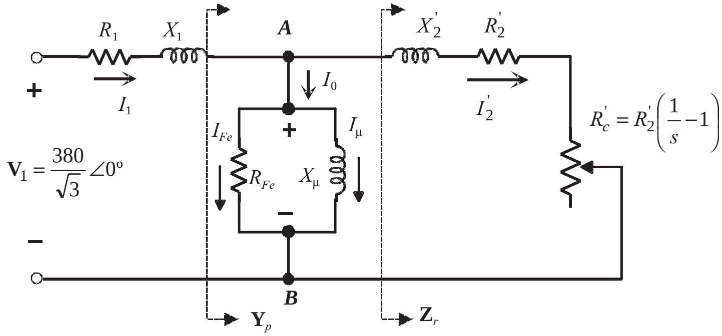


Figura 4.21.

Conviene comenzar el problema calculando el valor de la impedancia total del rotor $\mathbf{Z}_r$ mostrada en la Figura 4.21:

$$\mathbf{Z}_r = (R_2' + jX_2') + R_c' = (0{,}625 + j\,1{,}25) + 11{,}875 = 12{,}5 + j\,1{,}25 = 12{,}56 \angle 5{,}71° \ \Omega$$

que corresponde a un admitancia $\mathbf{Y}_r$:

$$\mathbf{Y}_r = \frac{1}{\mathbf{Z}_r} = \frac{1}{12{,}56 \angle 5{,}71°} = 0{,}0796 \angle 5{,}71° = 0{,}0792 - j\,0{,}0079 \text{ siemens}$$

La admitancia total del paralelo $\mathbf{Y}_p$ mostrada en la Figura 4.21 vale:

$$\mathbf{Y}_p = \frac{1}{R_{Fe}} + \frac{1}{jX_\mu} + \mathbf{Y}_r = \frac{1}{360} + \frac{1}{j\,40} + (0{,}0792 - j\,0{,}0079) =$$
$$= 0{,}082 - j\,0{,}033 = 0{,}088 \angle -21{,}9° \text{ siemens}$$

que corresponde a una impedancia $\mathbf{Z}_p = 1/\mathbf{Y}_p = 11{,}36 \angle 21{,}9° \ \Omega$. De este modo la impedancia total del motor que se observa desde los terminales de entrada es:

$$\mathbf{Z}_{total} = (R_1 + jX_1) + \mathbf{Z}_p = (0{,}5 + j\,1{,}5) + 11{,}36 \angle 21{,}9° = (0{,}5 + j\,1{,}5) +$$
$$+ (10{,}54 + j\,4{,}24) = 11{,}04 + j\,5{,}74 = 12{,}44 \angle 27{,}47° \ \Omega$$

Si se toma como referencia la tensión de alimentación:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0° = 219{,}39 \angle 0° \text{ V}$$

la corriente del estátor será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_{total}} = \frac{219{,}39 \angle 0°}{12{,}44 \angle 27{,}47°} = 17{,}63 \angle -27{,}47° \text{ A}$$

2. Para determinar la corriente $\mathbf{I}_2'$ del rotor debe calcularse previamente la d.d.p. entre los nudos A y B del circuito equivalente de la Figura 4.21, y cuyo valor es:

$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{Z}_p\mathbf{I}_1 = 11{,}36 \angle 21{,}9° \cdot 17{,}63 \angle -27{,}47° = 200{,}28 \angle -5{,}57°$$

De este modo la corriente del rotor reducida al estátor vale:

$$\mathbf{I}_2' = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_r} = \frac{200{,}28 \angle -5{,}57°}{12{,}56 \angle 5{,}71°} = 15{,}95 \angle -11{,}28° \text{ A}$$

por lo que la corriente real del rotor será:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_2' m = 15{,}95 \angle -11{,}28° \cdot 2{,}5 = 39{,}875 \angle -11{,}28° \text{ A}$$

3. Las corrientes por las ramas en paralelo son:

$$\mathbf{I}_{Fe} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{R_{Fe}} = \frac{200{,}28 \angle -5{,}57°}{360} = 0{,}556 \angle -5{,}57° \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{\mu} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{jX_{\mu}} = \frac{200{,}28 \angle -5{,}57°}{j40} \approx 5 \angle -95{,}57° \text{ A;}$$

por lo que la corriente $\mathbf{I}_0$ valdrá:

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{Fe} + \mathbf{I}_{\mu} = 0{,}556 \angle -5{,}57° + 5 \angle -95{,}57° = 5{,}03 \angle -89{,}23° \text{ A}$$

4. De acuerdo con el apartado anterior, las pérdidas en el hierro serán:

$$P_{Fe} = 3 \cdot V_{AB} \cdot I_{Fe} = 3 \cdot 200{,}28 \cdot 0{,}556 = 334{,}1 \text{ W}$$

que también se puede obtener del siguiente modo:

$$P_{Fe} = 3R_{Fe}I_{Fe}^2 = 3 \cdot 360 \cdot 0{,}556^2 \approx 334{,}9 \text{ W} \approx 334{,}1 \text{ W (errores de redondeo)}$$

5. La potencia compleja absorbida por el motor de la red es:

$$\mathbf{S}_1 = 3\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = 3 \cdot 219{,}39 \angle 0° \cdot 17{,}63 \angle +27{,}47° = 11.603{,}7 \angle 27{,}47° =$$
$$= 10.295{,}4 + j\,5.352{,}6$$

lo que significa que el motor absorbe una potencia activa $P_1 = 10.295{,}4$ W y una potencia reactiva $Q_1 = 5.352{,}6$ Var, siendo el f.d.p. del motor igual a cos 27,47° = 0,887.

6. La potencia mecánica interna del motor se calcula a partir de la expresión:

$$P_{mi} = 3R_c'I_2'^2 = 3 \cdot 11{,}875 \cdot 15{,}95^2 \approx 9.063{,}1 \text{ W}$$

7. Como quiera que las pérdidas mecánicas son de 250 W, la potencia útil en el eje del motor es:

$$P_u = P_{mi} - P_m = 9.063{,}1 - 250 = 8.813{,}1 \text{ W}$$

8. El rendimiento del motor es el cociente entre la potencia útil en el eje y la potencia activa absorbida de la red, que de acuerdo con los resultados anteriores será igual a:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{8.813{,}1}{10.295{,}4} = 85{,}6\,\%$$

9. La corriente de arranque se obtendrá del circuito de la Figura 4.21 haciendo $s = 1$. La impedancia del rotor vale en este caso:

$$\mathbf{Z}_r = R_2' + jX_2' = 0{,}625 + j\,1{,}25 = 1{,}398 \angle 63{,}43° \ \Omega$$

que corresponde a una admitancia: $\mathbf{Y}_r = 1/\mathbf{Z}_r = 0{,}716 \angle -63{,}43°$ siemens. La admitancia del paralelo $\mathbf{Y}_p$ es igual a:

$$\mathbf{Y}_p = \frac{1}{360} + \frac{1}{j40} + 0{,}716 \angle -63{,}43° = 0{,}739 \angle -64{,}09° \text{ siemens}$$

que representa una impedancia de $\mathbf{Z}_p = 1/\mathbf{Y}_p = 1{,}353 \angle 64{,}09° = 0{,}591 + j\,1{,}217\ \Omega$. Por consiguiente, la impedancia total del motor será:

$$\mathbf{Z}_{total} = (R_1 + jX_1) + \mathbf{Z}_p = (0{,}5 + j\,1{,}5) + 0{,}591 + j\,1{,}217 = 2{,}93 \angle 68{,}12° \ \Omega$$

y, por tanto, la corriente absorbida por el motor en el arranque será:

$$\mathbf{I}_{1arranque} = \frac{219{,}39 \angle 0°}{2{,}93 \angle 68{,}12°} = 74{,}93 \angle -68{,}12° \text{ A}$$

Es decir, la corriente de arranque es de 74,93 A y tiene un f.d.p.: $\cos \varphi = \cos 68{,}12° = 0{,}373$.

Obsérvese que la corriente de arranque es varias veces la asignada. En nuestro caso, teniendo en cuenta los resultados de los apartados 1) y 9), resulta ser:

$$\frac{I_{1arranque}}{I_1} = \frac{74{,}93}{17{,}63} = 4{,}25$$

b) Circuito equivalente aproximado:

En este caso la rama paralelo del circuito equivalente de la Figura 4.21 se debe trasladar a la entrada del motor, lo que simplificará enormemente los cálculos correspondientes. Debe hacerse constar que el uso de este circuito equivalente aproximado da resultados algo superiores a los reales. Conviene que el lector compare los resultados obtenidos con ambos procedimientos.

1. *Corriente del estátor*: El procedimiento de cálculo es directo y requiere determinar las corrientes $\mathbf{I}'_2$, $\mathbf{I}_{Fe}$ e $\mathbf{I}_\mu$, cuyos valores son:

$$\mathbf{I}'_2 = \frac{219{,}39 \angle 0°}{(0{,}5 + j\,1{,}5) + (0{,}625 + j\,1{,}25) + 11{,}875} = 16{,}5 \angle -11{,}94° \text{ A}$$

$$\mathbf{I}_{Fe} = \frac{219{,}39 \angle 0°}{360} = 0{,}61 \angle 0° \quad ; \quad \mathbf{I}_\mu = \frac{219{,}39 \angle 0°}{j\,40} = 5{,}48 \angle -90° \text{ A}$$

lo que da lugar a una corriente primaria (estátor):

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{Fe} + \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}'_2 = 18{,}96 \angle -27{,}96°$$

2. La corriente del rotor será:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}'_2 m = 16{,}5 \angle -11{,}94° \cdot 2{,}5 = 41{,}25 \angle -11{,}94° \text{ A}$$

3. De acuerdo con el resultado de las corrientes del apartado 1) se tenía:

$$\mathbf{I}_{Fe} = 0{,}61 \angle 0° \quad ; \quad \mathbf{I}_\mu = 5{,}48 \angle -90° \text{ A}$$

por lo que la corriente de vacío será:

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_{Fe} + \mathbf{I}_\mu = 0{,}61 \angle 0° + 5{,}48 \angle -90° = 5{,}51 \angle -83{,}65° \text{ A}$$

4. Las pérdidas en el hierro serán:

$$P_{Fe} = 3V_1 I_{Fe} = 3 \cdot 219{,}39 \cdot 0{,}61 = 401{,}5 \text{ W}$$

5. La potencia compleja absorbida por el motor de la red será:

$$\mathbf{S}_1 = 3\mathbf{V}_1\mathbf{I}_1^* = 3 \cdot 219{,}39 \angle 0 \cdot 18{,}96 \angle +27{,}96° =$$
$$= 12.478{,}9 \angle 27{,}96° \approx 11.022 + j\,5.851$$

lo que significa que el motor absorbe una potencia activa $P_1 = 11.022$ W, una potencia reactiva $Q_1 = 5.851$ VAr, siendo el f.d.p. del motor igual a cos 27,96° = 0,883.

6. La potencia mecánica interna es, según (4.64):

$$P_{mi} = 3 \cdot 11{,}875 \cdot 16{,}5^2 \approx 9.700 \text{ W}$$

7. La potencia mecánica útil valdrá:

$$P_u = 9.700 - 250 = 9.450 \text{ W}$$

Téngase en cuenta que las pérdidas mecánicas eran de 250 W.

8. El rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{9.450}{11.022} = 85{,}76\,\%$$

9. La corriente de arranque se obtiene del circuito equivalente aproximado haciendo $s = 1$, resultando ser:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{Fe} + \mathbf{I}_\mu + \mathbf{I}_2'$$

$$\mathbf{I}_1 = (0{,}61 - j\,5{,}48) + \frac{219{,}39 \angle 0°}{0{,}5 + j\,1{,}5 + 0{,}625 + j\,1{,}25} = 79{,}16 \angle -68{,}84°$$

que corresponde a un f.d.p.: $\cos \varphi = \cos 68{,}84° = 0{,}36$.

Si el lector compara los resultados obtenidos por ambos procedimientos, observará que son bastante parecidos. Con el circuito equivalente aproximado se obtienen valores algo más elevados que los reales. El método aproximado es mucho más rápido de resolver y de ahí sus ventajas prácticas en la resolución de problemas. Sin embargo, si la corriente de la rama paralelo I_0 fuera más elevada, se observarían mayores diferencias, por lo que en ese caso debería utilizarse forzosamente el circuito equivalente exacto del motor asíncrono para no cometer graves errores.

4.7. PAR DE ROTACIÓN

4.7.1. Generalidades

Si es P_u la potencia mecánica útil desarrollada por el motor y n la velocidad en r.p.m. a la que gira el rotor, el par útil T (*torque* en inglés) en N.m en el árbol de la máquina será el cociente entre P_u y la velocidad angular de giro $\Omega = 2\pi n/60$, (en radianes mecánicos por segundo), y donde n se expresa en r.p.m.:

$$T = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{P_u}{2\pi \dfrac{n}{60}} \tag{4.69}$$

Si se desprecian las pérdidas mecánicas del motor, la potencia útil coincide con la mecánica interna y el par anterior se puede poner también:

$$T = \frac{P_{mi}}{2\pi \dfrac{n}{60}} \tag{4.70}$$

De la definición de deslizamiento se deduce:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad \Rightarrow \quad n = n_1\,(1 - s) \tag{4.71}$$

y la expresión del par se convierte en:

$$T = \frac{P_{mi}}{2\pi \frac{n_1}{60}(1-s)} \qquad (4.72)$$

y teniendo en cuenta (4.68) resulta:

$$T = \frac{P_a}{2\pi \frac{n_1}{60}} \qquad (4.73)$$

Las dos ecuaciones (4.70) y (4.73) expresan el par de rotación del motor, en función de la potencia mecánica interna P_{mi} o de la potencia que atraviesa el entrehierro P_a. La última expresión es muy útil, ya que en el denominador figura la velocidad del campo giratorio, que para un determinado motor es constante si permanece invariable la frecuencia de alimentación, y en consecuencia puede tomarse como medida del par el producto $T\,2\pi n_1/60$, es decir, la potencia que desarrollaría el par si la máquina girase a la velocidad de sincronismo. Por este motivo, se dice entonces que el par está expresado en **vatios síncronos**, y según (4.73), el par así evaluado es precisamente igual a la potencia en vatios que el campo giratorio transmite al rotor. Este concepto es importante en el estudio del diagrama circular de la máquina asíncrona, como se verá en el epígrafe 4.8 de este capítulo.

Teniendo en cuenta (4.62) y (4.68), la expresión del par (4.73) se puede poner:

$$T = \frac{m_1 \frac{R_2'}{s} I_2'^2}{2\pi \frac{n_1}{60}} \qquad (4.74)$$

pero de acuerdo con el circuito equivalente aproximado de la Figura 4.13*b*, el módulo de la corriente I_2' vale:

$$I_2' = \frac{V_1}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \qquad (4.75)$$

donde se ha llamado X_{cc} a la reactancia $X_1 + X_2'$. Sustituyendo (4.75) en (4.74) se obtiene:

$$T = \frac{m_1 \frac{R_2'}{s} V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}\left[\left(R_1 + \frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2\right]} \qquad (4.76)$$

que expresa el valor del par electromagnético producido por la máquina en función de los parámetros del motor.

Se observa en la expresión (4.76) que el par se hace cero cuando $s = 0$ y $s = \pm\infty$; por otra parte, la característica $T = f(s)$ presenta unos máximos en los que debe cumplirse:

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_m = \pm \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \qquad (4.77)$$

El signo negativo significa un funcionamiento como generador, ya que entonces la velocidad de rotación es superior a la del campo giratorio. Sustituyendo (4.77) en (4.76) se obtiene el valor del par máximo de la máquina:

$$T_{\text{máx}} = \pm \frac{m_1 V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60} 2\left[\pm R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}\right]} \tag{4.78}$$

El signo «+» expresa el valor del par máximo como motor y el signo «−» indica la magnitud del par máximo como generador. Observamos en la expresión anterior que el par máximo no varía cuando cambia la resistencia del rotor; sin embargo, y de acuerdo con (4.77), el deslizamiento al cual se obtiene el par máximo es proporcional a la resistencia del rotor, y de aquí se deriva una cuestión técnica de gran importancia práctica, ya que variando la resistencia del rotor por introducción de resistencias adicionales (caso aplicable únicamente a máquinas con rotor devanado o de anillos) se puede conseguir que el par máximo se obtenga a una velocidad deseada; en particular, si se logra hacer $s_m = 1$, se obtiene el par máximo en el arranque. En la Figura 4.22 se ha dibujado el diagrama $T = f(s)$, denominado par-deslizamiento o par-velocidad de la máquina asíncrona. Se han representado dos curvas diferentes *a* y *b* según sea el valor de la resistencia del rotor. Se observa, como se acaba de indicar, que el par máximo no se altera por la variación de la resistencia del rotor; sin embargo, sí que cambian los valores del deslizamiento a los cuales se obtienen los pares máximos.

La curva par-velocidad que se obtiene con la resistencia propia del rotor constituye la **característica natural** del par, mientras que las curvas par-velocidad que resultan con la

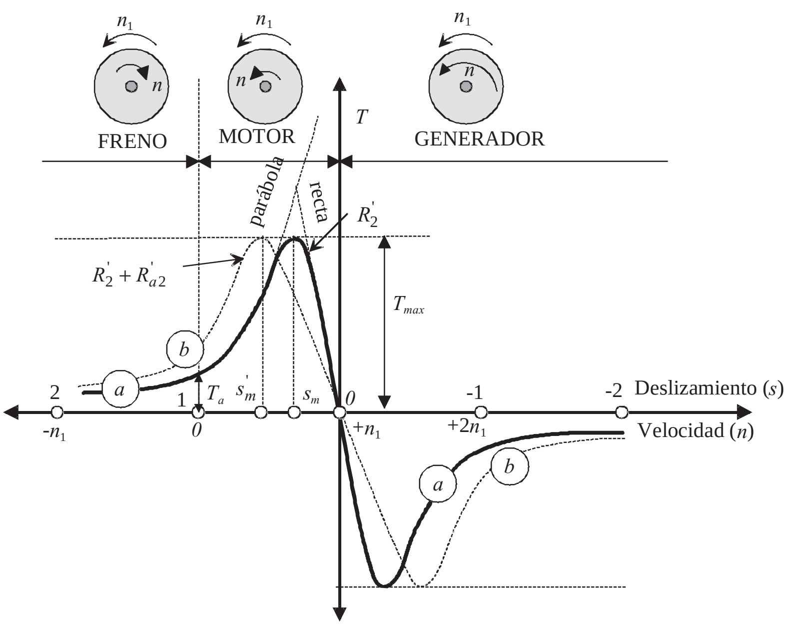


Figura 4.22. Curvas par-velocidad de una máquina asíncrona. Zonas de funcionamiento.

introducción de resistencias adicionales se denominan **características artificiales**. Si para la característica natural se tiene, según (4.77), un deslizamiento para par máximo:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{4.79}$$

para las características artificiales, si se denomina R'_{T2} la resistencia total reducida del rotor, que incluye la propia del rotor más la adicional por fase que se introduce por los anillos, se tendrá:

$$s'_m = \frac{R'_{T2}}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{4.80}$$

Dividiendo (4.80) por (4.79) resulta:

$$\frac{s'_m}{s_m} = \frac{R'_{T2}}{R'_2} \tag{4.81}$$

Es decir, el cociente entre el deslizamiento para par máximo (denominado también crítico) de la característica artificial y el de la característica natural es igual a la razón de las resistencia totales del rotor para cada caso.

A veces es interesante referir el par de un motor al par máximo y al deslizamiento crítico s_m. Así, si dividimos (4.76) entre (4.78), después de algunas simplificaciones se obtiene la *fórmula de Kloss*:

$$\frac{T}{T_{\text{máx}}} = \frac{2(1 + a\,s_m)}{\dfrac{s}{s_m} + 2\,a\,s_m + \dfrac{s_m}{s}} \tag{4.82}$$

donde s es el deslizamiento del motor para el cual se obtiene el par T; el parámetro a es igual a:

$$a = \frac{R_1}{R'_2} \tag{4.83}$$

Si se ha construido la curva de par natural (con la resistencia interna del rotor R'_2), se puede construir, con más sencillez, una artificial para cualquier resistencia total del rotor R'_{T2} sin tener que realizar nuevamente los cálculos mediante la fórmula general del par (4.76). Téngase en cuenta que si se denomina T' al par con la curva artificial, s'_m el deslizamiento máximo correspondiente y s' el deslizamiento que se tiene para el par T', resultará una ecuación similar a (4.82):

$$\frac{T'}{T_{\text{máx}}} = \frac{2(1 + a's'_m)}{\dfrac{s'}{s'_m} + 2\,a's'_m + \dfrac{s'_m}{s'}} \quad ; \quad a' = \frac{R_1}{R'_{T2}} \tag{4.84}$$

ya que los pares máximos de la curva natural y artificial son idénticos porque según (4.78) no dependen de la resistencia del rotor. Los pares del motor coincidirán para las características natural y artificial cuando (4.82) sea igual a (4.84), es decir:

$$\frac{2(1 + as_m)}{\dfrac{s}{s_m} + 2\,as_m + \dfrac{s_m}{s}} = \frac{2(1 + a's'_m)}{\dfrac{s'}{s'_m} + 2\,a's'_m + \dfrac{s'_m}{s'}} \tag{4.85}$$

y teniendo en cuenta que según (4.81), (4.83) y (4.84) se cumplirá:

$$as_m = a's'_m \tag{4.86}$$

la ecuación (4.85) se transforma de este modo en:

$$\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s} = \frac{s'}{s'_m} + \frac{s'_m}{s'} \tag{4.87}$$

y después de algunas simplificaciones resulta:

$$\frac{s}{s_m} = \frac{s'}{s'_m} \tag{4.88}$$

y teniendo en cuenta (4.81) y (4.88) se cumplirá la igualdad:

$$\frac{s'}{s} = \frac{R'_{T2}}{R'_2} \tag{4.89}$$

Es decir, **a igualdad de pares en las curvas características artificiales y natural de un motor asíncrono, el deslizamiento en la característica artificial respecto a la natural coincide con el cociente de resistencias totales en el rotor correspondientes a cada curva**.

A veces es interesante, para realizar cálculos previos, tener expresiones **aproximadas** del par. Si en la fórmula de Kloss (4.82) se desprecia la resistencia del estátor*, se transforma en:

$$\frac{T}{T_{\text{máx}}} = \frac{2}{\dfrac{s}{s_m} + \dfrac{s_m}{s}} \tag{4.90}$$

Para deslizamientos pequeños ($s << s_m$) la expresión anterior se convierte en:

$$\frac{T}{T_{\text{máx}}} = \frac{2s}{s_m} \tag{4.91}$$

que es la ecuación de una **recta** (véase Fig. 4.22). Para deslizamientos grandes ($s >> s_m$), la fórmula (4.90) se transforma en:

$$\frac{T}{T_{\text{máx}}} = \frac{2s_m}{s} \tag{4.92}$$

que es la ecuación de una **hipérbola**. En la práctica, la adaptación a esta curva sólo se cumple en la zona de arranque y de frenado del motor.

4.7.2. Tipos de funcionamiento de la máquina asíncrona

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de la máquina asíncrona ya han sido expuestas en los epígrafes 4.6 y 4.7.1; vamos a destacar aquí tres de ellas: (4.64), (4.68) y (4.73), que

---

* En los motores de potencias medias y pequeñas se cumple de forma aproximada: $R_1 = R'_2$, mientras que para motores de gran potencia se pueden despreciar R_1 frente a R'_2.

nos serán de utilidad para comprender los sentidos de transferencia de energía entre la red (terminal eléctrico) y la carga (terminal mecánico) y también el signo del par electromagnético generado. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
&\text{Potencia mecánica interna:} && P_{mi} = m_1 R_2' \left(\frac{1}{s} - 1\right) I_2'^2 \\
&\text{Potencia de entrehierro:} && P_a = \frac{P_{mi}}{1 - s} \\
&\text{Par electromagnético:} && T = \frac{P_a}{2\pi \frac{n_1}{60}}
\end{aligned} \tag{4.93}$$

En la Figura 4.22 se han señalado la forma de las curvas par-velocidad de una máquina asíncrona o de inducción. Dependiendo del valor del deslizamiento, se distinguen tres zonas distintas que caracterizan tres modos de funcionamiento, a saber: **motor**, **generador** y **freno**.

a) Régimen motor

Representa el modo de funcionamiento más característico y corresponde al rango de deslizamientos comprendidos entre 0 y 1. De acuerdo con la expresión (4.71), que nos da la velocidad del rotor en función de *s*:

$$n = n_1 (1 - s) \tag{4.94}$$

el rango anterior corresponde a velocidades comprendidas entre n_1 (velocidad de sincronismo) y 0 (parada).

Si se tiene en cuenta el campo de variación de *s* en el régimen motor, las ecuaciones (4.93) nos indican que cuando la máquina trabaja como motor se tiene:

a) *La potencia mecánica interna es positiva. Es decir, se transmite energía mecánica al eje.*
b) *La potencia en el entrehierro es positiva, lo que indica un par electromagnético positivo.*
c) *Si la potencia de entrehierro es positiva, quiere decir que se transfiere energía en el sentido estátor-rotor. Como quiera además que la energía en el estátor procede de la red, la potencia eléctrica absorbida tendrá el sentido de P_a. En definitiva, la potencia eléctrica que absorbe la máquina de la red es positiva.*

De acuerdo con las conclusiones anteriores, en la Figura 4.23 se ha representado simbólicamente una máquina asíncrona, en la que para mayor claridad se ha separado el estátor del rotor. Se han señalado con flechas los sentidos de las potencias puestas en juego. Se observa que en este comportamiento de la máquina de inducción como motor, la transferencia de energía se produce en el sentido terminal eléctrico-terminal mecánico. La máquina convierte la energía eléctrica en mecánica.

En la Figura 4.24 se muestra la curva par-velocidad correspondiente a este régimen de trabajo, que es una ampliación de la curva de la Figura 4.22 correspondiente a la zona de deslizamientos comprendida entre 0 y 1. Obsérvese la doble escala utilizada en el eje de abscisas calibrada en deslizamientos o en velocidades del rotor. Los puntos más característicos son:

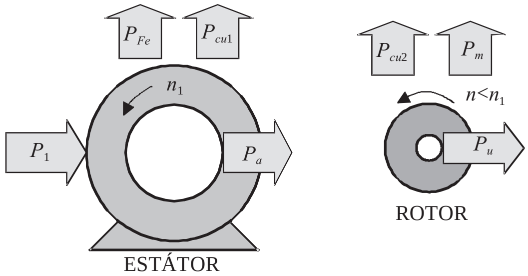


Figura 4.23. Reparto de potencias en el funcionamiento como motor.

1. **Punto O. Funcionamiento en sincronismo**: $s = 0$; $T = 0$, en este caso la velocidad de rotación del motor es la de sincronismo, lo que como se demostró en el epígrafe 4.3 constituye una imposibilidad física. De hecho, el que el par electromagnético producido resulte igual a cero está corroborando tal afirmación, porque la máquina a esta velocidad no podría ni tan siquiera vencer los pares resistentes de rozamiento.
2. **Punto A. Régimen asignado o nominal**: $s = s_n$; $T = T_n$, que corresponde a la velocidad asignada y al par nominal o asignado o de plena carga, se produce generalmente para deslizamientos comprendidos entre el 3 y el 8 por 100, que representan velocidades cercanas a la de sincronismo que se sitúan en la parte derecha de la curva de la Figura 4.24.
3. **Punto C. Funcionamiento con par máximo**: $s = s_m$; $T = T_m$, representa el par máximo o crítico del motor y se produce para deslizamientos comprendidos entre el 15 y el 30 por 100.
4. **Punto D. Régimen de arranque**: $s = 1$; $T = T_a$, en este caso la velocidad es cero y corresponde al par de arranque.

Se observa en la Figura 4.24 que el par máximo divide a la curva en dos partes, una estable $0 < s < s_m$ y otra inestable $s_m < s < 1$; la zona estable corresponde a la parte de la curva en la que se obtiene un aumento del par conforme el motor disminuye su velocidad, lo que implica una *dT/ds* positiva (debe tenerse en cuenta, para evitar confusiones, que en la curva de la Figura 4.24, la escala de deslizamientos es decreciente y por ello la zona estable corres-

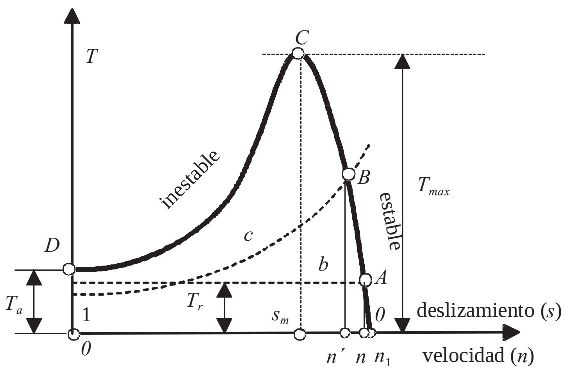


Figura 4.24. Curvas par-velocidad de un motor asíncrono.

ponde a la parte derecha de la curva). El motor en su zona estable presenta una característica **dura** o **rígida**, lo que significa que la velocidad disminuye muy poco con el par y es por ello que se puede decir que estas máquinas giran a una velocidad asíncrona prácticamente constante. (De ahí que no se hayan empleado este tipo de motores en accionamientos que requerían regulación de velocidad. Modernamente, debido a los avances de la electrónica de potencia, y tal como se explica en el Capítulo 7, se ha logrado regular la velocidad de estos motores variando la frecuencia de alimentación con convertidores electrónicos.)

Para examinar el comportamiento de un motor asíncrono cuando pone en movimiento una carga mecánica en el eje, es preciso conocer la dependencia de velocidad de rotación con el par resistente ofrecido por la carga. A estos efectos los diferentes mecanismos de producción se pueden clasificar a grandes rasgos en los dos tipos siguientes:

a) **Cargas con par resistente constante**, **independiente de la velocidad**. La curva par-velocidad de estos mecanismos está representada por la horizontal *b* en la Figura 4.24. Este tipo de par resistente lo poseen las grúas, ascensores, montacargas, mecanismos de avance de máquinas, cintas transportadoras en las que permanezca constante el material que se desplaza y otros tipos de mecanismos en los que el par resistente principal sea el de rozamiento.

b) **Cargas con par resistente creciente con la velocidad**. Generalmente son mecanismos en los que el par resistente es función del cuadrado de la velocidad y por ello presentan una curva de tipo parabólico (curva **c** en la Fig. 4.24). Este tipo de par se presenta en las bombas centrífugas, ventiladores, hélices, etc., es decir, en el movimiento de fluidos. Se conocen también como cargas con par resistente tipo ventilador.

Bajo la existencia de los pares motor o electromagnético T y resistente o de carga T_r se producirá el comportamiento dinámico del motor, que responderá a la ecuación clásica de la mecánica:

$$T - T_r = J \frac{d\Omega}{dt} \tag{4.95}$$

donde J es el momento de inercia de las partes giratorias, que incluye la del rotor del motor más el mecanismo de accionamiento, y Ω la velocidad angular de giro del rotor (en rad/s). En el epígrafe 4.12 se hará un estudio detallado de la dinámica del motor asíncrono. Ahora es suficiente darse cuenta, según la ecuación (4.95), que si el par motor T es superior al par resistente T_r, se producirá un momento resultante $T\text{-}T_r > 0$ que hará que el motor se acelere ($d\Omega/dt > 0$); la aceleración continuará hasta que ambos pares se hagan iguales y en este momento la máquina habrá adquirido su velocidad de régimen. En la Figura 4.24 se observa que si el motor mueve un par resistente constante T_r, el estado de equilibrio se conseguirá cuando se alcance el punto A, punto de intersección de las curvas del par motor con la del par resistente, donde ambos pares se hacen iguales. Si la carga tiene un par resistente tipo ventilador (curva **c** de la Fig. 4.24), el estado de equilibrio final se consigue en el punto B. Es evidente, en cualquier caso, que para que la máquina inicie su marcha el par de arranque desarrollado por el motor debe ser superior al par resistente que en este momento ofrece la carga.

Supóngase ahora que el sistema motor-carga ha alcanzado un equilibrio (por ejemplo, estamos situados en el punto B de la Fig. 4.24). Si en esta situación aumenta el par resistente, el término de la izquierda de (4.95) se hará negativo, lo que se traduce en una deceleración del rotor. El nuevo equilibrio se restablecerá para una velocidad menor a la cual se vuelva a cumplir la igualdad de pares motor y resistente. Ahora bien, si el par resistente aumentara

hasta alcanzar el punto *C*, correspondiente al par máximo que puede desarrollar el motor, un posterior aumento de la carga tendería a reducir la velocidad, pero al no estar compensado por un aumento del par electromagnético desarrollado por el motor (zona inestable de la Figura 4.24), la máquina acabará parándose.

El cociente entre el par máximo y nominal o asignado $T_{máx}/T_n$ define la **capacidad de sobrecarga** del motor y es un dato suministrado por el fabricante junto con el cociente del par de arranque y nominal T_a/T_n. En motores normales la capacidad de sobrecarga oscila entre 1,8 y 2,7; en motores sometidos a fuertes sobrecargas instantáneas, por ejemplo, en las grúas, se suelen exigir valores superiores a 3. La relación T_a/T_n oscila entre 1,2 y 2.

b) Régimen generador

Como se observa en la Figura 4.22, corresponde a velocidades superiores a la de sincronismo, lo que comporta deslizamientos negativos. En este caso, el sentido de rotación del flujo respecto al secundario de la máquina se invierte con relación al régimen motor, lo que lleva consigo una inversión en el sentido de la f.e.m. del rotor, que provoca a su vez una inversión en la corriente y en el par. En consecuencia, el par desarrollado por la máquina asíncrona se convierte en par de frenado respecto al momento de rotación del motor primario. La máquina asíncrona funciona como generador, recibiendo energía mecánica de un motor externo que gira a una velocidad superior a la de sincronismo, y entregando energía eléctrica a la red por el estátor.

En efecto, si observamos (4.93), en el régimen generador, al ser el deslizamiento negativo, se tiene:

a) *La potencia mecánica interna se hace negativa. La máquina* ***absorbe*** *potencia mecánica por el eje, que es suministrada por el motor primario que la mueve a una velocidad superior a la de sincronismo.*
b) *La potencia en el entrehierro se hace negativa, por lo que el par electromagnético cambia de signo respecto al comportamiento como motor.*
c) *Si la potencia en el entrehierro es negativa, la transferencia de energía se hace de rotor a estátor. La máquina entrega energía a la red por el estátor.*

En la Figura 4.25 se resumen las conclusiones anteriores, señalando con flechas los sentidos de transferencia real de la energía. La máquina convierte energía mecánica en eléctrica.

Se puede disponer de un generador asíncrono conectando un motor normal de jaula de ardilla a una red trifásica y acoplándolo, por ejemplo, a un motor de combustión interna (motor de gasolina o diesel), tal como se muestra en la Figura 4.26*a*. Inicialmente la máquina arrancará como motor asíncrono arrastrando el motor primario de combustión interna, llegan-

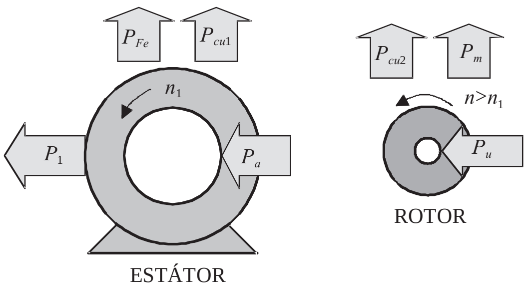


Figura 4.25. Reparto de potencias en el funcionamiento como generador.

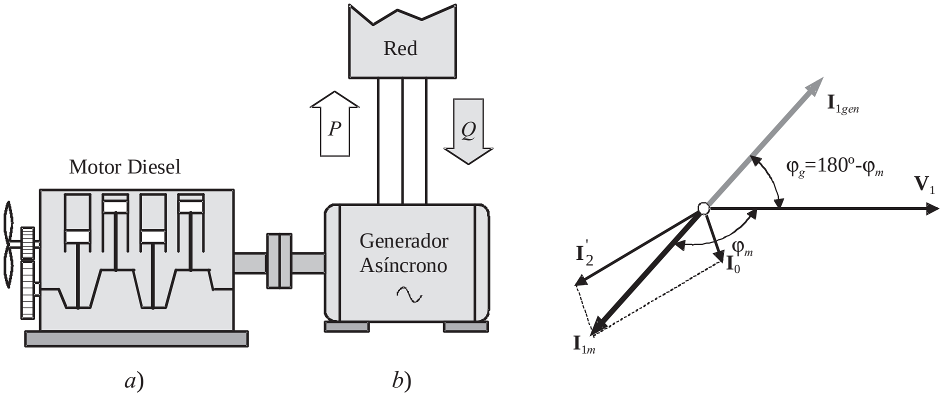


Figura 4.26. Grupo diesel-generador asíncrono. Diagrama fasorial del generador.

do a una velocidad de régimen como motor cercana a la de sincronismo. A continuación se arrancará el motor primario, que debe girar en el sentido establecido por el motor asíncrono. Tan pronto como el motor primario supere la velocidad de sincronismo, la máquina asíncrona se convertirá en generador, cediendo potencia activa al sistema eléctrico al que esté conectada.

Ahora bien, si se tiene en cuenta el circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona señalado en la Figura 4.20*a*, al ser el deslizamiento negativo, la impedancia de la rama secundaria tendrá la parte real negativa (debido a que se hace negativa la resistencia de carga R'_c, cuyo valor es muy superior a la suma de $R'_1 + R'_2$); como consecuencia de ello, la corriente secundaria reducida I'_2 absorbida se retrasará más de 90° de la tensión aplicada, tal como se muestra en la Figura 4.26*b*, dando lugar a una corriente total **absorbida** de la red I_{1m}, cuya fase φ_m es superior a 90°, y es por ello por lo que la potencia absorbida de la red: $m_1 V_1 I_{1m} \cos \varphi_m$ es negativa. O de otro modo, si se invierte el sentido de la corriente absorbida I_{1m} para tener en cuenta el convenio generador, se observa que la potencia activa producida o **suministrada** a la red es:

$$P_1 = m_1 V_1 I_{1g} \cos \varphi_g \quad ; \quad |I_{1g}| = |I_{1m}| \tag{4.96}$$

Se observa en la Figura 4.26*b* que la corriente I_{1g} se adelanta a la tensión de la red, lo que indica que la máquina asíncrona **suministra** a la red una potencia *reactiva capacitiva*, o de otro modo, que la máquina asíncrona funcionando como generador necesita **recibir** de la red a la cual se conecta una *potencia reactiva inductiva*, como así se señala en la Figura 4.26*a*. Físicamente esta potencia reactiva que necesita recibir el generador asíncrono se requiere para mantener el campo magnético de su estátor, ya que esta máquina no posee un circuito independiente de excitación, como es el caso de los alternadores. Ésta es la principal limitación del generador asíncrono, ya que al necesitar una red que le suministre la potencia reactiva que requiere, no puede funcionar (en principio) como un generador aislado como sucede con los alternadores.

La única ventaja, sin embargo, del generador asíncrono es su sencillez: no necesita un circuito independiente para su excitación y no tiene que girar continuamente a una velocidad fija. Siempre que su velocidad sea ligeramente mayor que la de sincronismo, funcionará como un generador con respecto al sistema de potencia al que se encuentre conectado. En la medida en la que el par aplicado a su eje sea mayor, tanto mayor será la potencia de salida resultante. Generalmente, la salida asignada se alcanza con poco deslizamiento, normalmente

inferior al 3 por 100. El hecho de que no necesite regulación de tensión, porque ésta viene impuesta por la red externa, hace que este generador sea una buena alternativa en **centrales eólicas**, donde las velocidades del viento son muy dispares.

Es posible hacer que una máquina asíncrona trabaje como generador aislado, independientemente de una red externa, siempre que haya condensadores disponibles para suministrar la potencia reactiva que necesita (o de otro modo, condensadores que absorban la energía reactiva que produce el generador). Para ello se conecta una batería de condensadores a los bornes del motor, que también se unen a la carga eléctrica receptora externa. Se dice entonces que el generador trabaja en régimen de **autoexcitación**. La frecuencia generada es algo menor de la que corresponde a la velocidad de rotación. La tensión en bornes aumenta con la capacidad, que está limitada por la saturación del circuito magnético de hierro. Si la capacidad es insuficiente no aparecerá tensión en el generador. De ahí que la elección de la capacidad necesaria sea un problema difícil y más aún si se tiene en cuenta que los condensadores deben también suministrar la potencia reactiva que requieren las cargas conectadas a la máquina.

c) Régimen de freno

De acuerdo con la Figura 4.22, el régimen de frenado de una máquina asíncrona se produce para deslizamientos superiores a la unidad, lo que corresponde a velocidades negativas. En esta situación el rotor gira en sentido contrario al campo giratorio, de tal forma que la máquina recibe energía de la red y energía mecánica por el eje. En efecto, si consideramos las ecuaciones (4.93) para $s > 1$ (normalmente s está comprendido entre 1 y 2), resulta:

a) *La resistencia de carga R'_c se hace negativa y, por tanto, también es negativa la potencia mecánica interna. La máquina recibe energía mecánica por el eje.*

b) *La potencia de entrehierro es, según la 2.ª ecuación (4.93), el cociente de dos cantidades negativas; por consiguiente, P_a es positiva y el par electromagnético es positivo.*

c) *Si la potencia de entrehierro es positiva, quiere decir que se transfiere la energía en el sentido estátor-rotor. Por ello la potencia que se absorbe de la red es positiva.*

En la Figura 4.27 se muestran estas conclusiones. Durante el período de frenado la máquina recibe energía mecánica por el eje y también energía eléctrica de la red; esto origina grandes corrientes rotóricas, con las consiguientes pérdidas por efecto Joule tanto en el estátor como en el rotor, que es donde se disipan las potencias que recibe la máquina en esta situación.

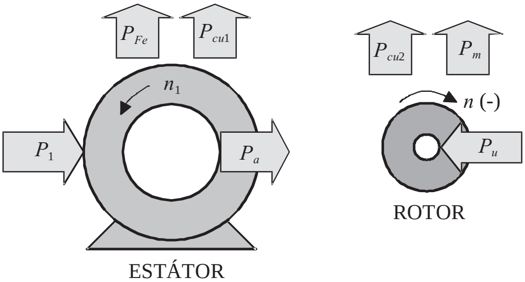


Figura 4.27. Reparto de potencias en el funcionamiento como freno.

Este régimen de frenado se utiliza en la práctica cuando se desea parar rápidamente un motor. La maniobra se realiza invirtiendo dos fases de la alimentación, de forma que el campo giratorio pase súbitamente a girar en sentido contrario al del rotor. Por ejemplo, si se considera que un motor estaba girando en sentido directo a la velocidad *n*, el deslizamiento en esta fase sería:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \tag{4.97}$$

Al invertir dos fases, el deslizamiento respecto al nuevo campo giratorio sería:

$$s' = \frac{n_1 - (-n)}{n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \tag{4.98}$$

ya que la velocidad a la que giraba el motor se hace negativa respecto al nuevo campo rotativo. Como s suele tener un valor reducido (3 a 8 por 100) en el momento de la inversión, el nuevo deslizamiento s' tiene un valor cercano a 2.

Este método de frenado en el que se procede a invertir el campo giratorio del motor recibe el nombre de **frenado a contracorriente**. El rotor, al estar girando en sentido opuesto al campo, va gradualmente disminuyendo su velocidad, y cuando ésta llega a cero, el motor debe ser desconectado de la red, ya que en caso de no hacerlo la máquina pasaría de nuevo a régimen motor pero girando ahora en sentido contrario al original.

En el frenado a contracorriente se pueden producir corrientes incluso muy superiores a las de arranque, y por ello no debe emplearse este sistema de frenado con demasiada frecuencia porque la elevación de temperatura puede llegar a fundir las barras del rotor y sobrecalentar el devanado del estátor. Los motores preparados para realizar este frenado son generalmente de rotor devanado, de tal modo que al realizar esta maniobra se introducen resistencias adicionales en el rotor para limitar las corrientes a magnitudes admisibles y deseables. Para que el lector tome conciencia de lo delicado de esta operación, sirvan estos datos, que se demuestran más tarde en el epígrafe 4.12.3:

1. El calor disipado en el rotor durante el período de puesta en marcha (arranque), desde cero a la velocidad asignada, es igual a la energía cinética final almacenada en todas las partes rotativas.
2. Sin embargo, el calor disipado en el rotor durante el frenado a contracorriente, desde la velocidad asignada hasta cero, es igual a **tres veces** la energía cinética original de todas las partes rotativas.

En la técnica de los accionamientos eléctricos existen también otros tipos de frenado. Así, se tiene el frenado **por recuperación de energía** (que algunos autores denominan frenado regenerativo) y que aparece en la máquina asíncrona cuando trabaja como generador, por tanto, a una velocidad superior a la de sincronismo. Se puede producir este frenado en las máquinas de elevación y transporte cuando se bajan cargas pesadas. Este régimen de frenado aparece con frecuencia en los motores de c.c. (Capítulo 6) utilizados en la tracción eléctrica, al bajar un tren por pendientes elevadas (si el tren tiende a embalarse, aparecerá un par de frenado que tiende a evitar un posible descarrilamiento).

Existe también otro tipo de frenado denominado **dinámico**, que consiste en desconectar el estátor de la red y aplicar una c.c. al mismo por medio de una fuente auxiliar; de esta forma se produce un campo de amplitud constante que es fijo en el espacio y que al reaccionar con el campo giratorio del rotor provoca un frenado de la máquina. Este tipo de frenado se utiliza en

los trenes de laminación de plantas siderúrgicas y se emplea para conseguir una parada rápida y exacta de muchos mecanismos, reduciendo el tiempo de paro de los accionamientos principales.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Interpretación de la placa de características de un motor asíncrono trifásico

Un aspecto importante para el usuario de un motor eléctrico es saber interpretar con claridad y soltura los valores que el fabricante inscribe en la placa de características de la máquina. Considérese por ejemplo la placa de características que se mostraba en la Figura 2.18 del Capítulo 2; allí ya se explicaron los significados de la potencia asignada, la clase de aislamiento empleado y del índice de protección. Vamos ahora a ocuparnos de los temas más eléctricos. Recuérdese que los datos que se señalaban en la placa de características eran: 15 kW; 400/230 V; 29/50 A; f.d.p. 0,9; 1.440 r.p.m; 50 Hz.

Estos datos significan que la ***potencia mecánica*** *del motor es de 15 kW. Este valor es una potencia asignada por el fabricante y no significa que el motor produzca 15kW en todas las circunstancias, ya que este valor dependerá de la demanda que en cada momento requiera la carga mecánica que esté moviendo el motor. En cierto modo el valor anterior define la máxima potencia mecánica que puede producir el motor sin que se superen los límites de temperatura que soportan los aislamientos, lo cual puede incluso variar según sea la altitud geográfica del lugar en el que trabaje el motor, de la temperatura ambiente, del sistema de refrigeración e incluso del régimen de trabajo: continuo, temporal, intermitente, etc.; por ejemplo este motor puede funcionar suministrando una potencia mecánica superior a la asignada de 15 kW, siempre que no sea durante mucho tiempo, para evitar que se produzcan calentamientos inadmisibles en los devanados de la máquina, o en el caso límite de que tenga que funcionar durante mucho tiempo sobrecargado deberá mejorarse su refrigeración. Por otra parte los valores 400/230 V, determinan las* ***tensiones de línea*** *a las que se puede conectar el motor, teniendo en cuenta que si la red eléctrica tiene una tensión compuesta de 400 V el motor se deberá conectar en estrella y si la red es de 230 V, el motor se deberá conectar en triángulo.*

Los siguientes valores de la placa de características se refieren a la corriente que consumirá el motor a plena carga (es decir cuando la potencia mecánica desarrollada por el motor sea de 15 kW) y se indican dos valores según que la tensión de la red a la que se conecte el motor sea de 400 V o de 230 V. En el ejemplo que se está analizando el motor consumirá a plena carga una corriente en el estátor de 29 A si la red es de 400 V, pero será de 50 A si la red es de 230 V. Otro valor que se inscribe en la placa es el el f.d.p. con el que trabaja el motor a plena carga, y que en este caso es 0,9. A partir de los valores anteriores se puede calcular la potencia eléctrica que absorberá el motor de la red a plena carga y que es:

$$P_1 = \sqrt{3}\, VI \cos\varphi = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 29 \cdot 0{,}9 \approx 18.083 \text{ W}$$

y a partir de este valor se puede determinar también el rendimiento del motor a plena carga:

$$\eta = \frac{P_u}{P_1} = \frac{15.000}{18.083} \approx 83\,\%$$

Por otra parte la frecuencia asignada al motor y que figura en la placa de características es de 50 Hz, y se señala que la velocidad de giro a plena carga es de 1.440 r.p.m. Es por ello que teniendo en cuenta que los motores asíncronos trabajan ligeramente por debajo de la velocidad de sincronismo, ésta debe ser de 1.500 r.p.m. y el número de polos 4, ya que se cumple:

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1.500$$

y por consiguiente el deslizamiento a plena carga será:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1.500 - 1.440}{1.500} = 4\,\%$$

evidentemente si el motor se mueve en vacío, la velocidad de giro será aproximadamente la de sincronismo de 1.500 r.p.m.

Otra magnitud que puede calcularse de una forma indirecta a partir de las anteriores, es el valor del par de plena carga. Téngase en cuenta que al ser el par motor igual a la potencia mecánica dividida por la velocidad angular de giro se tiene:

$$T_{pc} = \frac{P_u}{\Omega} = \frac{15.000}{2\pi \dfrac{1.440}{60}} \approx 99{,}5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

que corresponde al valor del par de plena carga, es decir cuando el motor suministra una potencia mecánica de 15 kW. Debe destacarse que es imposible conocer cuál será el par real de funcionamiento en cualquier otra situación, aunque en la práctica si se dispone en el cuadro de alimentación de un analizador de redes que tenga lectura de la potencia activa consumida por la máquina (o un vatímetro trifásico), al dividir este valor por la velocidad angular de sincronismo nos puede proporcionar de acuerdo con la expresión (4.73) un valor aproximado del par con el que trabaja la máquina en estas condiciones. De cualquier modo y como se demuestra en el párrafo siguiente, si se mide con exactitud la velocidad del motor para cualquier régimen de carga, se puede calcular el par real con el que trabaja el motor y la potencia mecánica desarrollada.

Se puede estimar el par con el que trabaja el motor para una velocidad distinta de la correspondiente a plena carga; para ello debe tenerse en cuenta que en la zona normal estable de funcionamiento del motor, el par sigue una ley lineal con la velocidad (o con el deslizamiento). Para que el lector lo comprenda mejor, en la Figura 4.28 se muestra en trazo grueso la zona lineal MN en la que suele trabajar el motor y en trazo fino su extrapolación a un rango completo de velocidades. Si se denomina respectivamente T_{pc} y n_{pc} al par de plena carga y su velocidad correspondiente (punto A de la Figura 4.28), la ecuación de la recta que relaciona el par con

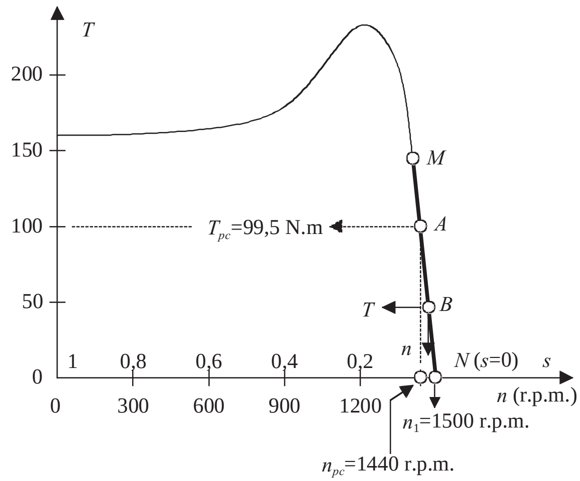


Figura 4.28.

la velocidad para un punto genérico B, en el que el par es T y la velocidad n puede demostrar el lector que viene expresada por:

$$T = \frac{T_{pc}}{(n_1 - n_{pc})} \cdot (n_1 - n) = \frac{99,5}{(1500 - 1440)} \cdot (1500 - n)$$

por ejemplo si el motor gira en el punto B a 1.480 r.p.m. el par correspondiente de acuerdo con la ecuación anterior sería:

$$T = \frac{99,5}{(1.500 - 1.440} \cdot (1.500 - 1.480) \approx 33,2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

por lo que la potencia mecánica desarrollada correspondiente es:

$$P_u = T\Omega = 33,2 \cdot 2\pi \frac{1.480}{60} \approx 5.146 \text{ W}$$

y si la velocidad del motor fuera de 1.420 r.p.m. el resultado sería:

$$T = \frac{99,5}{(1500 - 1.440)} \cdot (1.500 - 1.420) \approx 132,7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y la potencia mecánica desarrollada tendría un valor:

$$P_u = T\Omega = 132,7 \cdot 2\pi \frac{1.420}{60} \approx 19.733 \text{ W}$$

que es superior a la potencia asignada de 15 kW, por lo que el motor trabajará sobrecargado, lo que era previsible al darse cuenta que el motor funciona con una velocidad inferior a la nominal.

Ejemplo de aplicación 4.5

Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V, 50 Hz, 10 polos, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = 0,5\ \Omega$; $X_1 = 3\ \Omega$; $R_2' = 0,8\ \Omega$; $X_2' = 3,5\ \Omega$. *Se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y las pérdidas mecánicas. Si la máquina se conecta a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz, veamos: 1) ¿Cómo se conectará el estátor de la máquina?; 2) calcular la corriente de arranque del motor; 3) si el deslizamiento a plena carga es del 4 por 100, calcular la corriente absorbida, potencia mecánica desarrollada, par electromagnético, potencia activa absorbida de la red y rendimiento en estas condiciones; 4) velocidad (en régimen motor) a la cual se obtiene el par máximo y valor del par máximo correspondiente.*

Solución

1. Como el motor es de 220/380 V, se deberá conectar en estrella a una red de 380 V (véase epígrafe 4.2).
2. En el arranque el deslizamiento es igual a 1, por tanto la impedancia del circuito equivalente aproximado (Fig. 4.13*b*) será:

$$\mathbf{Z}_T = (R_1 + R_2') + j(X_1 + X_2') \Rightarrow \mathbf{Z}_T = 1,3 + j\,6,5\ \Omega$$

y tomando la tensión como referencia, se obtiene una corriente de arranque:

$$\mathbf{I}_{1a} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0°}{1,3 + j\,6,5} = 33,1 \angle -78,65°\ \text{A}$$

3. *a*) Cuando el deslizamiento es del 4 por 100, la impedancia equivalente total será:

$$\mathbf{Z}_T = \left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right) + j\,(X_1 + X'_2)$$

que al sustituir valores nos da:

$$\mathbf{Z}_T = \left(0{,}5 + \frac{0{,}8}{0{,}04}\right) + j\,6{,}5 = 20{,}5 + j\,6{,}5\ \Omega$$

que corresponde a una corriente de plena carga o asignada:

$$\mathbf{I}_1 \approx \mathbf{I}'_2 = \frac{\dfrac{380}{\sqrt{3}}\angle\,0°}{20{,}5 + j\,6{,}5} = 10{,}2\angle -17{,}6°\ \text{A}$$

b) La potencia mecánica desarrollada será, según (4.64):

$$P_{mi} = P_u = 3 \cdot 0{,}8 \left(\frac{1}{0{,}04} - 1\right) \cdot 10{,}2^2 = 5.992{,}7\ W$$

c) La velocidad de sincronismo vale, según (4.1)

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{5} = 600 \text{ r.p.m.}$$

ya que el número de pares de polos es igual a 5. De donde se deduce, de acuerdo con (4.71), una velocidad del rotor:

$$n = n_1\,(1 - s) = 600\,(1 - 0{,}04) = 576 \text{ r.p.m.}$$

y teniendo en cuenta (4.72) resulta un par:

$$T = \frac{5.992{,}7}{2\pi\,\dfrac{576}{60}} = 99{,}35 \text{ N.m}$$

d) La potencia eléctrica absorbida de la red será, según (4.57):

$$P_1 = 3 \cdot \frac{380}{\sqrt{3}} \cdot 10{,}2 \cdot \cos 17{,}6° = 6.399{,}2\ \text{W}$$

e) Y teniendo en cuenta (4.56) se obtiene un rendimiento:

$$\eta = \frac{5.992{,}7}{6.399{,}2} = 93{,}65\,\%$$

4. *a*) El deslizamiento para par máximo viene expresado en (4.77), que al sustituir valores nos da:

$$s_m = \frac{0{,}8}{\sqrt{0{,}5^2 + 6{,}5^2}} = 0{,}1227$$

que corresponde a una velocidad, según (4.71):

$$n = 600\,(1 - 0{,}1227) = 526{,}37 \text{ r.p.m.}$$

b) Y de acuerdo con (4.78) corresponde a un par máximo:

$$T_m = \frac{3\left(\frac{380}{\sqrt{3}}\right)^2}{2\pi\frac{600}{60}\cdot 2[0,5 + \sqrt{0,5^2 + 6,5^2}]} = 163,7 \text{ N.m}$$

Ejemplo de aplicación 4.6

La máquina del problema anterior, conectada a la misma red, se hace girar por un motor primario auxiliar a una velocidad de 615 r.p.m. Tomando la tensión simple de la red como referencia de fases (por ejemplo, para la fase R), calcular: 1) expresión fasorial de la corriente ***absorbida*** *por la máquina y corriente* ***entregada*** *por la misma; 2) potencia mecánica absorbida del motor primario; 3) potencias activas y reactivas* ***suministradas*** *a la red; 4) ¿cuál es el rendimiento del generador?*

Solución

1. El deslizamiento de la máquina, según (4.71), vale

$$s = \frac{600 - 615}{600} = -0,025$$

por consiguiente, la impedancia equivalente de la máquina será:

$$\mathbf{Z}_T = \left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right) + j\,(X_1 + X'_2)$$

es decir:

$$\mathbf{Z}_T = \left(0,5 - \frac{0,8}{0,025}\right) + j\,6,5 = -3,15 + j\,6,5\ \Omega$$

que da lugar a una corriente **absorbida**:

$$\mathbf{I}_{1m} = \frac{\frac{380}{\sqrt{3}}\angle\, 0°}{-31,5 + j\,6,5} = 6,82 \angle -168,34°\text{ A}$$

que corresponde a una corriente generada igual y de sentido contrario:

$$\mathbf{I}_{1g} = 6,82 \angle\, 11,66°\text{ A}$$

2. La potencia mecánica **desarrollada** por la máquina es, según (4.64):

$$P_u = P_{mi} = 3 \cdot 0,8\left(\frac{1}{-0,025} - 1\right)\cdot 6,82^2 = -4.576,8\text{ W}$$

es decir, la máquina asíncrona **recibe** 4.576,8 W de potencia mecánica del motor primario.

3. La potencia eléctrica activa entregada a la red se obtendrá aplicando (4.57) pero utilizando la corriente generada, es decir:

$$P_1 = 3\,\frac{380}{\sqrt{3}}\cdot 6,82\cdot \cos 11,66 = 4.396,1\text{ W}$$

y de modo análogo la potencia reactiva suministrada a la red será:

$$Q_1 = -3\,\frac{380}{\sqrt{3}}\cdot 6,82\cdot \text{sen } 11,66 = -907,2\text{ VAR}$$

que es de tipo capacitivo. O recíprocamente, la red deberá entregar una potencia reactiva inductiva al generador asíncrono de 907,2 VAR.

Ambas potencias se podrían haber obtenido simultáneamente empleando el concepto de potencia compleja utilizado en los circuitos eléctricos, es decir:

$$\mathbf{S}_1 = 3\mathbf{V}_1\mathbf{I}_{1g}^* = 3\,\frac{380}{\sqrt{3}}\angle\,0° \cdot 6{,}82\angle -11{,}66° = 4.396{,}1 - j\,907{,}2 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad P = 4.396{,}1\ \text{W} \quad ; \quad Q = -907{,}2\ \text{VAR}$$

que coincide con los valores anteriores.

4. El rendimiento del generador se entenderá ahora como cociente entre la potencia eléctrica que representa la salida y potencia mecánica que representa la entrada. Teniendo en cuenta los resultados del problema resulta ser:

$$\eta = \frac{P_1}{P_u} = \frac{4.396{,}1}{4.576{,}8} = 96{,}05\,\%$$

Ejemplo de aplicación 4.7

El motor del problema 4.5 está girando a plena carga con un deslizamiento del 4 por 100, es decir, a 576 r.p.m. De repente se cambian dos fases de la red. Calcular en ese instante: 1) expresión fasorial de la corriente absorbida por la máquina, tomando como referencia la tensión simple de la red; 2) potencia mecánica absorbida del motor primario; 3) par desarrollado como freno; 4) potencia activa absorbida de la red.

Solución

1. En el momento de la conmutación, el deslizamiento de la máquina es, según (4.71):

$$s = \frac{600 - (-576)}{600} = 1{,}96$$

lo que da lugar a una impedancia compleja equivalente:

$$\mathbf{Z}_T = \left(0{,}5 + \frac{0{,}8}{1{,}96}\right) + j\,6{,}5 = 0{,}908 + j\,6{,}5 = 6{,}56\angle\,82{,}05°\ \Omega$$

y por consiguiente la corriente absorbida será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\dfrac{380}{\sqrt{3}}\angle\,0°}{6{,}56\angle -82{,}05°} = 33{,}43\angle -82{,}05°\ \text{A}$$

que si se compara con el resultado del primer apartado del problema 4.5 se deduce que es un valor similar a la corriente de arranque.

2. La potencia mecánica desarrollada será, según (4.64):

$$P_{mi} = P_u = 3 \cdot 0{,}8\left(\frac{1}{1{,}96} - 1\right) \cdot 33{,}43^2 = -1.313{,}6\ \text{W}$$

lo que significa que absorbe una potencia mecánica de 1.313,6 W.

3. El par desarrollado será, según (4.72):

$$T = \frac{-1.313{,}6}{2\pi\,\dfrac{576}{60}} = -21{,}78\ \text{N.m}$$

Es decir, el motor produce un par electromagnético de 21,78 N.m en el sentido del nuevo campo giratorio, esto es, en oposición al giro que llevaba la máquina trabajando como motor. Como quiera que el par resistente que llevaba la máquina es, de acuerdo con el resultado 3*c* del problema 4.5, de 99,38 N.m, que es superior al par motor producido en el momento de la inversión (21,78 N.m), la máquina, por consiguiente, acabará parándose.

4. La potencia eléctrica absorbida de la red será, según (4.57):

$$P_1 = 3 \cdot \frac{380}{\sqrt{3}} \cdot 33{,}43 \cdot \cos 82{,}05° = 3.043{,}2 \text{ W}$$

Observará el lector que la máquina trabajando como freno recibe potencia tanto por la red como por el eje, es decir, absorbe un potencia total:

$$P_1 + P_u = 3.043{,}2 + 1.313{,}6 = 4.356{,}8 \text{ W}$$

Toda la potencia anterior se disipará en calor en los devanados de la máquina. Comprobémoslo:

$$P_p = P_{cu1} + P_{cu2} = 3(R_1 + R_2') \cdot I_1^2$$

que al sustituir valores nos da:

$$P_p = 3(0{,}5 + 0{,}8) \cdot 33{,}43^2 = 4.358{,}5 \text{ W} \approx 4.356{,}8 \text{ W}$$

que coincide con la anteriormente calculada, salvo errores de redondeo.

Ejemplo de aplicación 4.8

Un motor de inducción trifásico de anillos rozantes tiene un estátor conectado en estrella, de 4 polos. El motor funciona con una alimentación de 50 Hz y 380 V de tensión compuesta. Los parámetros del circuito equivalente son: $R_1 = 0{,}5\ \Omega$; $R_2' = 0{,}51\ \Omega$; $X_{cc} = 2{,}7\ \Omega$. En el supuesto de despreciar la rama paralelo del circuito equivalente y suponiendo despreciables las pérdidas mecánicas, calcular: a) Par motor desarrollado para un deslizamiento del 4 por 100; b) par de arranque; c) velocidad para par máximo; d) par máximo; e) resistencia que debe conectarse por fase, en serie con el rotor para obtener el par máximo en el arranque. NOTA: La relación de espiras de primario a secundario es igual a 2 y los factores del devanado se consideran iguales a la unidad.

Solución

a) De acuerdo con la expresión general del par (4.76) se tiene:

$$T = \frac{m_1 \dfrac{R_2'}{s} V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}\left[\left(R_1 + \dfrac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2\right]}$$

La tensión aplicada por fase es igual a $\dfrac{380}{\sqrt{3}} \approx 220$ V, y la velocidad de sincronismo vale:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1.500 \text{ r.p.m.}$$

En consecuencia, el par resultante para un deslizamiento del 4 por 100 resulta ser:

$$T_{\text{máx}} = \frac{3\,\dfrac{0{,}51}{0{,}04}\,220^2}{2\pi\,\dfrac{1.500}{60}\left[\left(0{,}5 + \dfrac{0{,}51}{0{,}04}\right)^2 + 2{,}7^2\right]} = 64{,}45 \text{ N.m}$$

b) El par de arranque se obtiene haciendo $s = 1$, resultando:

$$T_{\text{máx}} = \frac{3\,\dfrac{0{,}51}{1}\,220^2}{2\pi\,\dfrac{1.500}{60}\left[\left(0{,}5 + \dfrac{0{,}51}{1}\right)^2 + 2{,}7^2\right]} = 56{,}73 \text{ N.m}$$

c) El deslizamiento para par máximo, de acuerdo con 4.77, es:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{0{,}51}{\sqrt{0{,}5^2 + 2{,}7^2}} = 0{,}186$$

que teniendo en cuenta (4.76) corresponde a una velocidad:

$$n = n_1\,(1 - s) = 1.500\,(1 - 0{,}186) = 1.221 \text{ r.p.m.}$$

d) Para encontrar la magnitud de par máximo, se llevará el valor de $s_m = 0{,}186$ a la expresión general del par, resultando:

$$T_{\text{máx}} = \frac{3\,\dfrac{0{,}51}{0{,}186}\,220^2}{2\pi\,\dfrac{1.500}{60}\left[\left(0{,}5 + \dfrac{0{,}51}{0{,}186}\right)^2 + 2{,}7^2\right]} = 142{,}4 \text{ N.m}$$

e) Para obtener el par máximo en el arranque es preciso que se cumpla:

$$s = s_m = 1 = \frac{R_2' + R_{a2}'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}}$$

donde se ha denominado R_{a2}' la resistencia adicional conectada por fase al circuito del rotor, y al operar se obtiene:

$$R_{a2}' = 2{,}24\ \Omega$$

para calcular la resistencia adicional real debe tenerse en cuenta que:

$$R_{a2}' = m_v m_i R_{a2}$$

al ser los factores de devanado iguales y tener la máquina igual número de fases en primario y secundario, se cumplirá:

$$m_v = m_i = \frac{N_1}{N_2} = 2$$

y en consecuencia:

$$R_{a2} = \frac{R_{a2}'}{4} = 0{,}56\ \Omega$$

Ejemplo de aplicación 4.9

En un motor asíncrono trifásico el par de arranque es igual al nominal o de plena carga, y se sabe también que el par máximo es doble que el nominal. Calcular: 1) deslizamiento para par máximo; 2) deslizamiento a plena carga; 3) cociente corriente de arranque/corriente de plena carga. NOTA: Despreciar la impedancia del estátor y la rama paralelo del circuito equivalente.

Solución

1. Si se desprecia la impedancia del estátor, la ecuación (4.90) nos relaciona cualquier par producido a un determinado deslizamiento s, respecto al par máximo, es decir:

$$\frac{T}{T_m} = \frac{2}{\dfrac{s}{s_m} + \dfrac{s_m}{s}}$$

y así se tiene para el par nominal:

$$\frac{T}{T_m} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\dfrac{s}{s_m} + \dfrac{s_m}{s}} \qquad (a)$$

y para el par de arranque ($s = 1$) resultará:

$$\frac{T}{T_m} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\dfrac{1}{s_m} + \dfrac{s_m}{1}} = \frac{2s_m}{1 + s_m^2} \qquad (b)$$

ya que T_a es, según el enunciado, igual a T_n. De esta última ecuación se obtiene:

$$s_m^2 - 4s_m + 1 = 0$$

que conduce a los valores

$$s_m = 3{,}73 \quad ; \quad s_m = 0{,}268$$

La primera solución, aparte de representar un deslizamiento en la zona de trabajo como freno, daría lugar a una resistencia del rotor excesivamente elevada, lo que conduciría a un rendimiento bajo (motor mal proyectado). Tiene sentido la otra solución, $s_m = 0{,}268$.

2. Sustituyendo el resultado anterior en la ecuación *a*) resulta:

$$4 = \frac{s}{0{,}268} + \frac{0{,}268}{s}$$

que da lugar a los siguientes resultados:

$$s = 1 \quad ; \quad s = 0{,}072$$

Será válida la 2.ª solución, que da un deslizamiento más reducido. El otro valor correspondería a la otra situación anulada anteriormente, con una resistencia del rotor anormalmente alta.

3. La ecuación (4.75) nos da el módulo de la corriente absorbida por el motor ($I_1 = I_2'$), y teniendo en cuenta que se desprecia la impedancia del estátor se puede escribir:

$$I_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\left(\dfrac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}}$$

ahora bien, como quiera además que según (4.77) el deslizamiento para par máximo, si se desprecia la impedancia del estátor, es igual a:

$$s_m = \frac{R_2'}{X_2'} \quad \Rightarrow \quad R_2' = s_m X_2'$$

que llevando a la expresión de la corriente, da lugar a:

$$I_1 = \frac{V_1}{X_2' \sqrt{1 + \left(\dfrac{s_m}{s}\right)^2}}$$

que corresponde a unas corrientes de arranque y de plena carga:

$$I_{1a} = \frac{V_1}{X_2' \sqrt{1 + \left(\dfrac{s_m}{1}\right)^2}} \quad ; \quad I_{1n} = \frac{V_1}{X_2' \sqrt{1 + \left(\dfrac{s_m}{0{,}072}\right)^2}}$$

y conduce a un cociente de intensidades:

$$\frac{I_{1a}}{I_{1n}} = \frac{\sqrt{1 + 192{,}9 s_m^2}}{\sqrt{1 + s_m^2}} = \frac{3{,}854}{1{,}035} = 3{,}72$$

donde se ha tenido en cuenta que según el apartado 1 el valor de s_m era igual a 0,268.

Ejemplo de aplicación 4.10

*Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V, 6 polos, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 220 V, 50 Hz y está protegido con un relé térmico calibrado a 110 A. La corriente de **línea** a plena carga es de 100 A y se observa que en el arranque la corriente absorbida es 6 veces la de plena carga, desarrollando un par que es 1,8 veces el nominal. La resistencia por fase del estátor R_1 es igual a la reducida del rotor R_2'. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío (quiere decir que no hace falta considerar la rama paralelo del circuito equivalente del motor). Se pide: 1) Conexión del estátor del motor; 2) velocidad del rotor a plena carga y valores de los parámetros: R_1, R_2' y X_{cc} del circuito equivalente del motor; 3) potencia, par y rendimiento del motor a plena carga; 4) estando el motor girando en condiciones nominales o asignadas, se produce de repente una caída de tensión en la red de un 15 por 100. ¿Cuál será la nueva velocidad que adquirirá el motor y la corriente absorbida de la red, si el par de carga es constante? ¿Disparará el relé térmico?*

Solución

1. De acuerdo con la placa de características, el motor es de 220/380 V; como la tensión de la red es de 220 V, el motor se deberá conectar en triángulo (véase epígrafe 4.2).
2. De acuerdo con el circuito equivalente aproximado del motor, los módulos de las corrientes de **fase** del motor a plena carga y en el arranque cumplirán las ecuaciones:

$$\frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{\left(R_1 + \dfrac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2}} \quad ; \quad \frac{600}{\sqrt{3}} = \frac{220}{\sqrt{(R_1 + R_2')^2 + X_{cc}^2}} \qquad (a)$$

Ahora bien, según (4.74), el valor del par es:

$$T = \frac{m_1 R_2' I_2'^2}{s \cdot 2\pi \frac{n_1}{60}} = \frac{A R_2' I_2'^2}{s} \quad ; \quad A = \frac{m_1}{2\pi \frac{n_1}{60}} = \text{constante}$$

De este modo, y de acuerdo con el enunciado, el cociente del par de arranque asignado o nominal será:

$$\frac{T_a}{T_n} = 1{,}8 = \frac{600^2 \cdot s}{100^2} \quad \Rightarrow \quad s = 0{,}05$$

Como quiera que la velocidad de sincronismo es según (4.1):

$$n_1 = \frac{60 \cdot 50}{3} = 1.000 \text{ r.p.m.}$$

la velocidad del motor a plena carga, de acuerdo con (4.71), será:

$$n = 1.000\,(1 - 0{,}05) = 950 \text{ r.p.m.}$$

Llevando el valor de $s = 0{,}05$ a las ecuaciones (a) y teniendo en cuenta que según el enunciado se cumple $R_1 = R_2'$, se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas, que dan lugar a los siguientes valores:

$$R_1 = R_2' = 0{,}18\ \Omega \quad ; \quad X_{cc} = 0{,}523\ \Omega$$

3. La potencia desarrollada por el motor a plena carga ($I_2' = 100/\sqrt{3}$) es, según (4.64):

$$P_{mi} = P_n = 3R_2'\left(\frac{1}{s} - 1\right) I_2'^2 = 3 \cdot 0{,}18 \left(\frac{1}{0{,}05} - 1\right)\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)^2 = 34.200 \text{ W}$$

y el par asignado de acuerdo con (4.70), teniendo en cuenta que $n = 950$ r.p.m., será:

$$T = \frac{34.200}{2\pi \frac{950}{60}} = 343{,}8 \text{ N.m}$$

Las pérdidas en la máquina son únicamente las del cobre:

$$P_p = P_{cu1} + P_{cu2} = 3 \cdot 2 \cdot 0{,}18 \cdot \left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3.600 \text{ W}$$

y por tanto, el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{34.200}{34.200 + 3.600} = 90{,}48\,\%$$

4. La nueva tensión de la red será:

$$220 - 15\,\%\ 220 = 187 \text{ V}$$

y teniendo en cuenta la ecuación general del par (4.76) se podrá escribir:

$$T = 343{,}8 = \frac{3 \cdot 0{,}18 \cdot 187^2}{2\pi \frac{1.000}{60} s \left[\left(0{,}18 + \frac{0{,}18}{s}\right)^2 + 0{,}523^2\right]}$$

que da lugar a la ecuación de 2.º grado:

$$0{,}306s^2 - 0{,}46s + 0{,}0324 = 0$$

cuyas soluciones son: $s_1 = 0{,}0735$; $s_2 = 1{,}43$. La solución válida es la primera, porque la otra corresponde a la zona de trabajo como freno. De acuerdo con (4.71), la velocidad a la que girará el rotor será:

$$n = 1.000\ (1 - 0{,}0735) = 926{,}5 \text{ r.p.m.}$$

Con el deslizamiento $s_1 = 0{,}0735$, calcularemos el módulo de la corriente por fase que absorbe el motor, teniendo en cuenta el circuito equivalente o bien directamente aplicando (4.75):

$$I_1 = I'_2 = \frac{187}{\sqrt{\left(0{,}18 + \dfrac{0{,}18}{0{,}0735}\right)^2 + 0{,}523^2}} = 69{,}76 \text{ A}$$

que corresponde a una corriente de línea, por estar el motor en triángulo:

$$I_{1\,línea} = 69{,}76\sqrt{3} = 120{,}83 \text{ A}$$

que al ser superior a 110 A, hará disparar el relé térmico.

*4.8. DIAGRAMA DEL CÍRCULO

4.8.1. Introducción

Las características de funcionamiento y otras propiedades del motor asíncrono se pueden obtener construyendo el lugar geométrico de las corrientes del estátor. Como se demostrará en el epígrafe 4.8.2, la figura resultante es un círculo y para su determinación completa es necesario realizar los dos ensayos clásicos: **vacío o rotor libre** y **cortocircuito o rotor bloqueado**. El diagrama circular permite de una forma gráfica analizar el comportamiento de las máquinas asíncronas de una manera muy simple, ya que no se necesita realizar ningún cálculo analítico. Han sido varios los investigadores que han tratado este tema: Behrend, Heyland, Blondel, Ossanna, Sartori, etc.*

En el estudio que se seguirá aquí se partirá del circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona, al cual se aplicará la teoría de la inversión matemática. Debe recordarse que dos figuras son inversas respecto de un punto, denominado centro de inversión o polo, cuando sus puntos homólogos están alineados con ese centro, y el producto de las distancias del polo a cada par de puntos homólogos es una constante denominada potencia de inversión y cuyo valor se acostumbra tomar igual a 1. Se puede demostrar fácilmente que la figura inversa de una recta que no pase por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por el polo, y cuyo centro se halla sobre la perpendicular a la recta trazada por el centro de la inversión.

4.8.2. Deducción del diagrama circular

Considérese el circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona indicada en la Figura 4.29. La impedancia de la rama serie es igual a:

$$\mathbf{Z}_s = \left(R_1 + \frac{R'_2}{s}\right) + j\,(X_1 + X'_2) \tag{4.99}$$

y denominando $\mathbf{Y}_s = 1/\mathbf{Z}_s$ a la admitancia correspondiente, se cumplirá:

$$\mathbf{I}'_2 = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{Y}_s \tag{4.100}$$

* A. Heyland: *Elektrotechnische Zeitschrift,* 11 octubre 1894, tomo XV, pág. 563; 3 octubre 1895, tomo XVI, pág. 649. *L'Éclairage Électrique,* 7 y 14 de julio de 1900, tomo XXIV, 14-26 y 49-59. G. Ossanna: *Elektrotechnische Zeitschrift,* 23 agosto 1900, tomo XXI, págs. 712-713.

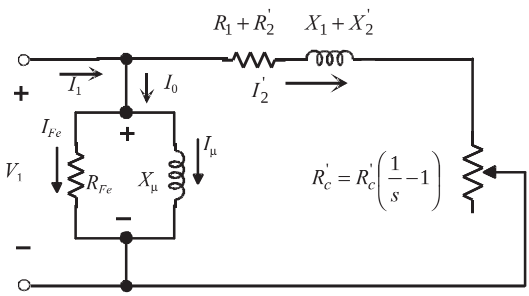


Figura 4.29. Circuito equivalente aproximado de la máquina asíncrona.

Si es $\mathbf{Y}_0$ la admitancia de la rama de vacío, resultará una corriente primaria $\mathbf{I}_1$ igual a:

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{V}_1\,(\mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_s) = \mathbf{V}_1\mathbf{Y}_0 + \mathbf{V}_1\mathbf{Y}_s = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_2' \tag{4.101}$$

Para construir el lugar geométrico de $\mathbf{I}_1$ debe conocerse previamente el de $\mathbf{I}_0$ e $\mathbf{I}_2'$. El vector que representa $\mathbf{I}_0$ tiene una orientación completamente definida debido a la constancia de $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{Y}_0$; sin embargo, el vector $\mathbf{I}_2'$ es variable en magnitud y sentido, ya que depende de $\mathbf{Y}_s$, que a su vez varía con el deslizamiento de la máquina. Para deducir el diagrama circular se debe comenzar representando el lugar geométrico de $\mathbf{Z}_s$ para los diferentes valores de s, tomando seguidamente su figura inversa para determinar $\mathbf{Y}_s$ y con ello $\mathbf{I}_2'$; al aplicar entonces la igualdad (4.101) podrá obtenerse la forma de variación de $\mathbf{I}_1$. Para representar $\mathbf{Z}_s$ se han tomado en la Figura 4.30 las resistencias en ordenadas y las reactancias en abscisas, de tal forma que al ir variando s, el afijo del vector $\mathbf{Z}_s$ va recorriendo la recta MN paralela al eje de ordenadas, debido a que la reactancia $X_1 + X_2'$ es una magnitud constante. Se han señalado en esta recta diversos puntos importantes que se obtienen al dar valores específicos al deslizamiento s, y así resulta:

a) **PUNTO P_s'**: Se obtiene al hacer $s = 0$, resultando, de acuerdo con (4.99), una componente resistiva infinita; por ello este punto se encuentra en el infinito de la recta MN.
b) **PUNTO P_{cc}'**: Se obtiene al hacer $s = 1$, resultando un valor de la resistencia igual a $R_1 + R_2'$.
c) **PUNTO P_∞'**: Se obtiene al hacer $s = \infty$, lo que da lugar a una resistencia total R_1.

En el punto geométrico P' $(0 < s < 1)$ la resistencia tiene una magnitud $R_1 + R_2'/s$. Para el punto particular T', la resistencia total se ha hecho cero, lo que indica, de acuerdo con (4.99), que:

$$R_1 + \frac{R_2'}{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{R_2'}{R_1} \tag{4.102}$$

Para obtener la figura inversa que corresponde a la admitancia $\mathbf{Y}_s$ habrá que trazar una circunferencia cuyo centro se encuentra sobre una recta perpendicular a MN que pase por el polo 0. Para determinar el diámetro de la circunferencia se observa que si T es el homólogo de T', se debe cumplir:

$$|OT| \cdot |OT'| = 1 \quad \Rightarrow \quad |OT| = \frac{1}{|OT'|} = \frac{1}{X_1 + X_2'} \tag{4.103}$$

Como la circunferencia debe pasar además por el polo, se podrá ya construir el lugar geométrico de $\mathbf{Y}_s$. En la Figura 4.30 se han representado los puntos homólogos de P_s', P_{cc}' y P_∞', que estarán situados sobre la circunferencia y alineados con el polo. Se observa que al punto P_s', situado en el infinito, le corresponde el punto P_s, situado en el centro de la inversión. Se han destacado las zonas que comportan un régimen de funcionamiento específico de la máquina como: motor, generador y freno, que corresponde a deslizamientos: $0 < s < 1$; $s < 0$; $1 < s < \infty$, respectivamente.

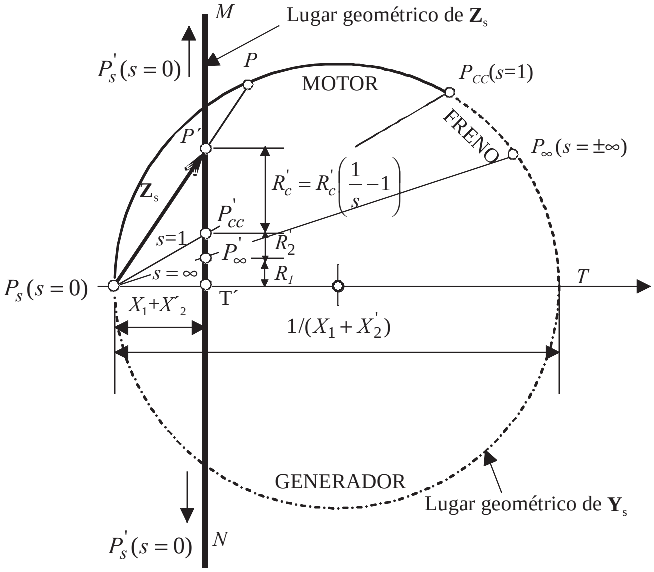


Figura 4.30. Lugares geométricos de impedancias y admitancias.

Para determinar el lugar geométrico de la corriente $\mathbf{I}'_2$ es preciso, de acuerdo con (4.100), multiplicar por $\mathbf{V}_1$ todas las magnitudes del círculo, de tal forma que si se desea que las direcciones de $\mathbf{Y}_s$ sean las de las intensidades, es preciso, a efectos de diagrama fasorial, que el eje de las tensiones coincida con el de las resistencias (conductancias), ya que las intensidades en éstas van en fase con la tensión aplicada. Para determinar posteriormente $\mathbf{I}_1$ deberá aplicarse la intensidad (4.101), lo que se consigue, como muestra la Figura 4.31, añadiendo $\mathbf{I}_0$ a $\mathbf{I}'_2$; tomando como afijo de la corriente de vacío el origen $O \equiv P_s$, resultando un nuevo origen 0_1. El diámetro del círculo es ahora igual a $V_1/(X_1 + X'_2)$, lo que permite trazar la circunferencia correspondiente. En la práctica la construcción de este diagrama se realiza por medio de los ensayos de vacío y cortocircuito. Recuérdese que el ensayo de vacío daba las lecturas: V_1, I_0, P_0, lo que permite conocer I_0 y φ_0 y, en consecuencia, se podrá determinar la situación del punto P_s; en la horizontal que pasa por él se encontrará el centro de la circunferencia.

En el ensayo de cortocircuito se daban las lecturas: V_{1cc}, $I_{1cc} = I_{1n}$, P_{cc}, lo que permite conocer el cos φ_{cc}; ahora bien, para situar el punto P_{cc} en el diagrama es preciso conocer la corriente de cortocircuito que se obtendría en la máquina a la tensión asignada (obsérvese que la construcción del diagrama se realiza tomando como parámetro la tensión asignada), y en consecuencia la *corriente de cortocircuito real* a tener en cuenta será:

$$I_{1cc} = \frac{V_1}{V_{1cc}} I_{1n} \tag{4.104}$$

que corresponde al vector $O_1 P_{cc}$ (no dibujado en la Fig. 4.31) y cuyo ángulo con V_1 es el φ_{cc}. Conociendo los puntos P_s y P_{cc} y la recta donde debe situarse el centro de la circunferencia, puede ya construirse ésta fácilmente. En la Figura 4.31 se indica el método, que consiste en trazar la mediatriz del vector I'_{2cc} hasta cortar en W a la horizontal que pasa por P_s; el punto W determina el centro del círculo.

Se observa en el diagrama de la Figura 4.31 que para un punto genérico de funcionamiento, tal como el P, la ordenada correspondiente a $PD = I_1 \cos \varphi_1$ representa la componente activa de la corriente absorbida por la máquina; si se multiplican las ordenadas por m_1V_1, siendo V_1 la tensión simple de la red, se obtiene la potencia activa absorbida de la red:

$$P_1 = m_1V_1I_1 \cos \varphi_1 = m_1V_1 \cdot |PD| \tag{4.105}$$

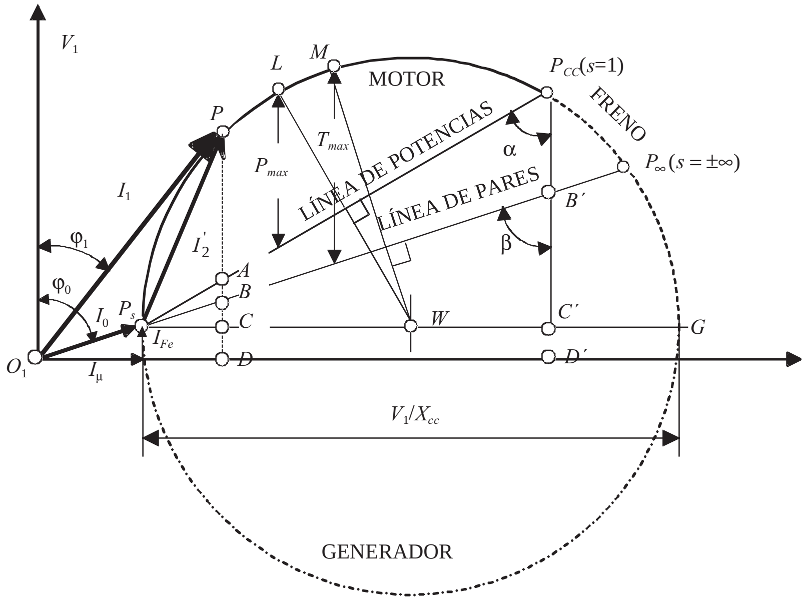


Figura 4.31. Diagrama del círculo de la máquina asíncrona.

En consecuencia, la distancia entre los puntos del círculo y el eje horizontal que pasa por el origen O_1 dan a una cierta escala la potencia absorbida por la máquina. Los puntos situados por encima del eje horizontal corresponden a potencias positivas, es decir, absorbidas por la máquina (motor y freno), mientras que los puntos situados en la parte inferior corresponden a potencias cedidas a la red (generador):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{R_2'}{R_1} = \frac{\overline{P_{cc}B'}}{\overline{B'C'}} \tag{4.106}$$

lo que indica que el punto B' divide al segmento $P_{cc}C'$ en partes proporcionales a R_1 y R_2', o que el punto B divide al segmento AC en idéntica forma. En el caso del punto P_{cc}, se tiene una corriente de cortocircuito I_{2cc}'; como en esta situación la máquina no produce energía mecánica, toda la energía absorbida se disipa en forma de calor en los arrollamientos. Las pérdidas en el cobre vendrán expresadas como:

$$(P_{cu})_{cc} = m_1 V_1 |P_{cc}C'| = m_1 (R_1 + R_2') I_{2cc}'^2 \tag{4.107}$$

y de acuerdo con (4.106) se podrá poner:

$$(P_{cu1})_{cc} = m_1 R_1 I_{2cc}'^2 = m_1 V_1 |B'C'| \tag{4.108}$$

$$(P_{cu2})_{cc} = m_1 R_2' I_{2cc}'^2 = m_1 V_1 |P_{cc}B'| \tag{4.109}$$

y de forma análoga, para el punto de trabajo P, que corresponde a una corriente I_2', resultará:

$$P_{cu1} = m_1 R_1 I_2'^2 = m_1 V_1 \overline{BC} \tag{4.110}$$

$$P_{cu2} = m_1 R_2' I_2'^2 = m_1 V_1 \overline{AB} \tag{4.111}$$

Las pérdidas en el hierro se obtienen fácilmente, teniendo en cuenta en la Figura 4.31 que:

$$P_{Fe} = m_1 \mathrm{V}_1 I_{Fe} = m_1 V_1 \overline{CD} \tag{4.112}$$

Para calcular la potencia mecánica interna desarrollada por el motor habrá que deducir de la potencia absorbida, representada por el segmento *PD* (expresión 4.105), la potencia perdida en el hierro: segmento *CD*, y las disipadas por efecto Joule, segmentos *AB* y *BC*. En consecuencia, la potencia mecánica interna desarrollada por la máquina vendrá expresada por el segmento:

$$\overline{PA} = \overline{PC} - \overline{CD} - (\overline{AB} + \overline{BC}) \tag{4.113}$$

es decir:

$$P_{mi} = m_1 V_1 \overline{PA} \tag{4.114}$$

Por tanto, las distancias de los puntos del círculo a la línea $P_s P_{cc}$ indican la potencia mecánica interna desarrollada por la máquina. Por ello a la recta $P_s P_{cc}$ se la conoce con el nombre de **línea de potencias**.

El rendimiento de la máquina, trabajando como motor, si se prescinde de las pérdidas mecánicas, viene expresado por el cociente:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{m_1 V_1 \overline{PA}}{m_1 V_1 \overline{PD}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} \tag{4.115}$$

La potencia que llega al rotor P_a es la suma de la potencia mecánica interna más las pérdidas en el cobre de ese devanado, resultando, de acuerdo con (4.111) y (4.114):

$$P_a = P_{mi} + P_{cu2} = m_1 V_1 (\overline{PA} + \overline{AB}) = m_1 V_1 \overline{PB} \tag{4.116}$$

en consecuencia, la distancia vertical entre los puntos de la circunferencia y la recta $P_s P_\infty$ expresa la potencia que llega al rotor. Como quiera que el par, de acuerdo con la expresión (4.73), es de la forma:

$$T = \frac{P_a}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} = \frac{m_1 V_1}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} \overline{PB} \tag{4.117}$$

la magnitud $\overline{PB}$ indicará a una cierta escala el par electromagnético producido por la máquina. Como el denominador de (4.117) es la velocidad de sincronismo, indica que P_a es una medida del par, la que da origen a la unidad **vatio síncrono**. Como las distancias a la línea $P_s P_\infty$ determinan el valor del par, se conoce a esta recta con el nombre de **línea de pares**. Por ejemplo, el par de arranque ($s = 1$) vendrá expresado por la distancia $P_{cc}B'$, medido a la escala adecuada.

El diagrama circular permite determinar también cómodamente el deslizamiento de la máquina; debe recordarse, de acuerdo con (4.68), que se cumple:

$$s = \frac{P_{cu2}}{P_a} = \frac{m_1 V_1 \overline{AB}}{m_1 V_1 \overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \tag{4.118}$$

que permite conocer el deslizamiento para el punto de trabajo *P*.

Para calcular el valor de la potencia máxima desarrollada en el árbol de la máquina y el par máximo deberán obtenerse los puntos de la circunferencia que distan más de las líneas de potencias y de pares, respectivamente; para ello se trazarán las perpendiculares a las rectas anteriores desde el punto *W*, centro del círculo. En la Figura 4.31 se muestra esta construcción geométrica, que da lugar a los puntos de trabajo *L* y *M*.

4.8.3. Elección de escalas en el diagrama del círculo

Como se ha demostrado en el apartado anterior, el diagrama del círculo permite determinar diferentes magnitudes de la máquina: corrientes, potencias, pares, etc.; es preciso para ello asignar diferentes escalas de medida para poder expresar cualquier segmento, en la unidad que le corresponda. Eligiendo una determinada escala para las intensidades, se podrán obtener las de las demás magnitudes de acuerdo con la siguiente distribución:

a) Intensidades:

$$1 \text{ amperio} = \ell_A \text{ milímetros; es decir: } 1 \text{ mm} = \frac{1}{\ell_A} \text{ amperios} \tag{4.119}$$

b) Potencias:

$$1 \text{ mm} = \frac{m_1 V_1}{\ell_A} \text{ vatios, es decir: } \mathbf{1\ kW} = \frac{\mathbf{10^3\ \ell_A}}{\mathbf{m_1 V_1}} \text{ mm} \tag{4.120}$$

c) Pares:

$1 \text{ mm} = \frac{m_1 V_1}{\ell_A}$ vatios asíncronos (medidos hasta la recta $P_s P_\infty$). Es decir:

$$1 \text{ mm} = \frac{m_1 V_1}{\ell_A} \frac{1}{2\pi \frac{n_1}{60}} \text{ N.m} \tag{4.121a}$$

que expresado en m · kg (l m · kg = 9,8 N.m) resulta:

$$1 \text{ mm} = \frac{m_1 V_1}{\ell_A} \cdot \frac{1}{2\pi \frac{n_1}{60} 9{,}8} = \frac{m_1 V_1}{\ell_A} \frac{1}{1{,}02 n_1} = \text{m} \cdot \text{kg} \tag{4.121b}$$

y por tanto:

$$1 \text{ m} \cdot \text{kg} = \frac{1{,}02 n_1 \ell_A}{m_1 V_1} \text{ mm} \tag{4.121c}$$

A partir de los ensayos de vacío y cortocircuito y de acuerdo con estas escalas se podrá construir el diagrama circular, del cual se deducirán las diferentes propiedades características de las máquinas asíncronas.

4.9. ARRANQUE

Se denomina arranque el proceso de puesta en marcha de una máquina eléctrica. En un motor asíncrono, para que esta operación pueda llevarse a cabo es preciso, como se ha demostrado en el epígrafe 4.7, que el par de arranque sea superior al par resistente de la carga; de esta forma se obtiene un momento de aceleración que obliga a girar el rotor a una velocidad cada vez más elevada, obteniendo el régimen permanente cuando se igualan los pares motor y resistente.

El proceso de arranque va acompañado de un consumo elevado de corriente, lo que está justificado desde el punto de vista de circuito equivalente, ya que la resistencia de carga R_c' es nula en el instante inicial, debido a que el deslizamiento es la unidad, por lo que el motor ofrece una baja impedancia, estando prácticamente en cortocircuito. Para que lo aprecie claramente el lector, en la Figura 4.32 se muestran las curvas de par, en valores p.u. (valores relativos entre el par instantáneo del motor y el par nominal T/T_n), corriente absorbida p.u, es decir I/I_n), f.d.p. y rendimiento de un motor asíncrono en función de la velocidad de funcionamiento. Obsérvese en esta Figura 4.32 que la variación de la corriente absorbida por el motor en función de la velocidad, comienza con una corriente de arranque que oscila entre 4 y 7

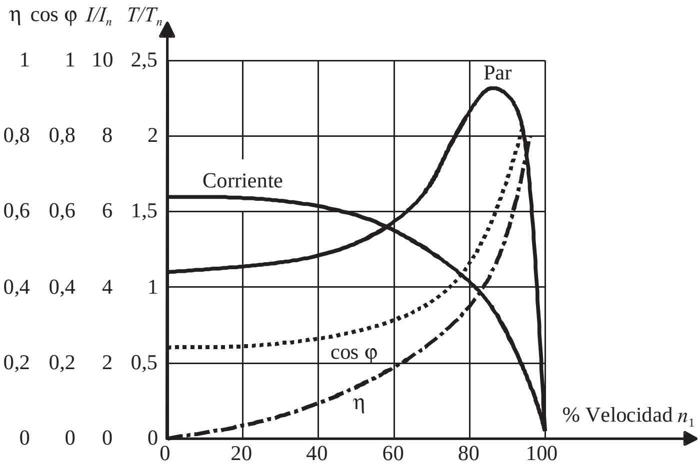


Figura 4.32. Curvas de Par (p.u.); Corriente (p.u); Factor de potencia y Rendimiento de un motor en función de la velocidad.

veces la nominal o asignada, y el valor de la corriente del motor se mantiene bastante alto, hasta que el rotor alcanza el 80 por 100 de la velocidad final, y es a partir de ese momento cuando decae rápidamente en la parte última de la curva. También se muestra en la Figura 4.32 la evolución del par con la velocidad, que comienza con el par de arranque, que varía entre 1,1 y 1,7 veces el nominal, y al ir acelerándose el motor, se pasa por un punto en el que el par es máximo, (que suele oscilar entre 2,1 y 3,5 veces el nominal), y después comienza a descender casi linealmente, hasta llegar teóricamente a la velocidad de sincronismo, en la que el par electromagnético es nulo.

Se puede obtener una relación entre los pares de arranque T_a(para el deslizamiento $s_a = 1$) y nominal T_n (para $s = s_n$), las corrientes de arranque I_a y nonimal I_n y los deslizamientos correspondientes, que es importante para comparar las diversas características de los motores. Téngase en cuenta que la expresión del par, según la ecuación (4.74), es de la forma:

$$T = \frac{m \dfrac{R_2'}{s} I_2'^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} \approx \frac{m \dfrac{R_2'}{s} (kI_1)^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} \tag{4.122}$$

donde se ha supuesto que la corriente absorbida por el estátor del motor es aproximadamente proporcional a la corriente reducida del rótor; esta constante de proporcionalidad k suele ser del orden de 0,9 en la mayoría de las máquinas (es evidente que en el caso de que se desprecie la corriente de vacío del motor, el valor de esta constante sería igual a la unidad). De este modo las expresiones de los pares de arranque y nominal y la relación entre ellos vienen definidas por:

$$T_a = \frac{mR_2'(kI_a)^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} \; ; \; T_n \approx \frac{mR_2'(kI_n)^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60} s_n} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_a}{T_n} \approx \left(\frac{I_a}{I_n}\right)^2 s_n \tag{4.123}$$

por ejemplo si en un motor se tiene $I_a/I_n = 6$ y el deslizamiento nominal es $s_n = 3\,\%$, el cociente entre el par de arranque y nominal que se obtiene al aplicar la última ecuación (4.123) es de 1,1; es decir el par de arranque es del orden de 1,1 veces el nominal, lo que justifica bastante bien la correlación entre las curvas de corriente y de par mostradas en la Figura 4.32 para $s_a = 1$, es decir para $n = 0$.

Por otra parte en esta Figura 4.32 se muestra la evolución del factor de potencia con la velocidad del motor, que comienza con un valor muy reducido en el arranque que es del orden de 0,2; lo que se debe al predominio en el momento del arranque, de la rama serie del circuito equivalente, frente a la rama paralelo del motor, y que luego asciende rápidamente conforme sube la velocidad, hasta que finalmente el f.d.p. a plena carga se sitúa entre 0,75 y 0,9. Una curva similar a la anterior se tiene para la variación del rendimiento con la velocidad, y que comienza en este caso con un valor nulo en el arranque, ya que en esta situación el motor no produce potencia mecánica útil, y aumenta rápidamente con la velocidad, hasta alcanzar un valor final que suele estar comprendido entre 0,6 para los motores de pequeña potencia, inferiores a 1/4 CV, y 0,96 para motores de más 400 kW.

Generalmente las normas de los diferentes países establecen las máximas corrientes de arranque permitidas en los motores eléctricos para que no perturben las redes de distribución. En España, se siguen las Normas del Reglamento Electrotécnico para Baja Tensión aprobado por Real Decreto 842/2002, y la Instrucción ITC-BT47, se refiere a las Instalaciones de Receptores: Motores y dedica el epígrafe 6 a las sobreintensidades de arranque de los motores eléctricos, fijando los límites de la relación corriente de arranque a corriente de plena carga o nominal, tanto para los motores de c.c. como para los motores de c.a. y en función de la potencia nominal de estas máquinas. En la Tabla 4.2 se reflejan sólamente los valores correspondientes a los motores de c.a.

Para reducir las corrientes en el momento de la puesta en marcha de un motor se emplean métodos especiales de arranque, según que la máquina tenga su rotor en forma de jaula de ardilla o con anillos.

4.9.1. Arranque de los motores en jaula de ardilla

a) Arranque directo

Se emplea únicamente en los motores de pequeña potencia. El esquema de conexiones se indica en la Figura 4.33*a*, donde se ha supuesto que el estátor está conectado en estrella. En la Figura 4.33*b* se indica la disposición de la caja de bornes del motor. Este método se aplica a máquinas de una potencia inferior a 5 kW, cuando se trata de instalaciones conectadas a la red urbana (de esta forma no se sobrepasan los valores máximos admitidos por el Reglamento).

Tabla 4.2. Valores admitidos de I_a/I_{pc} en función de la potencia de un motor

Potencia asignada del motor	$I_{arranque}/I_{plena\ carga}$
De 0,75 kW a 1,5 kW	4,5
De 1,5 kW a 5,0 kW	3,0
De 5,0 kW a 15,0 kW	2,0
De más de 15,0 kW	1,5

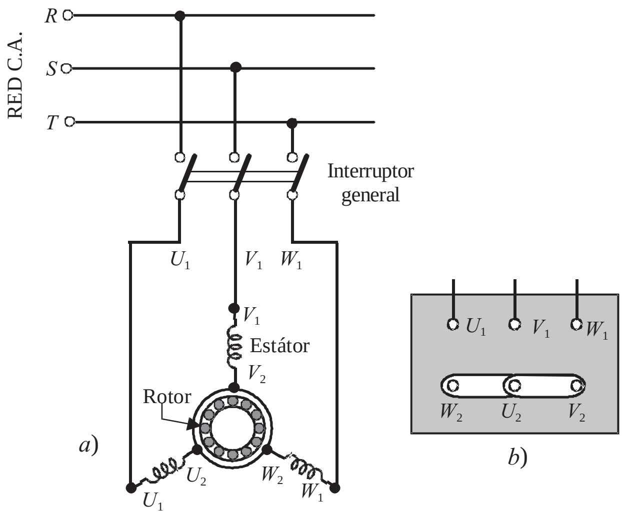


Figura 4.33. Esquema eléctrico del arranque directo.

En las grandes fábricas que tienen una gran potencia instalada, recibiendo energía en A.T. y disponiendo de subestación transformadora, puede llegarse a arranques directos con motores de hasta 100 CV.

b) Arranque por autotransformador

Consiste en intercalar un autotransformador entre la red y el motor, de tal forma que la tensión aplicada en el arranque sea sólo una fracción de la asignada. El proceso puede realizarse en dos o tres escalones y con tensiones no inferiores al 40, 60 y 75 por 100 de la tensión de la línea. En la Figura 4.34 se muestra un arranque por autotransformador, con dos etapas de tensión. En la posición l del conmutador se alimenta el autotransformador con la tensión de la red, aplicando al motor solamente una fracción de esta tensión de la red (**etapa de arranque**). Cuando la máquina ha aumentado su velocidad hasta un valor adecuado, cercano al asignado, el conmutador se pasa a la posición 2, lo que eleva la tensión que llega al motor y éste sigue aumentando de velocidad. Finalmente se pasa el conmutador a la posición 3, de tal forma que la tensión de la red queda aplicada directamente al estátor del motor.

Si se tiene en cuenta, de acuerdo con (4.76), que el par varía con el cuadrado de la tensión aplicada en el momento de la puesta en marcha del motor, la relación entre el par de arranque con autotransformador $T_{a,aut}$ y el que se obtiene en conexión directa T_a, será:

$$T_{a,aut} = x^2 T_a \tag{4.124}$$

donde x indica la fracción de tensión, respecto a la asignada, que se aplica con autotransformador. Por ello, si se aplica una tensión del 70 por 100 de la asignada el par de arranque con autotransformador es el 49 por 100 del par con arranque directo. De aquí se desprende que este método de puesta en marcha solamente es posible en los casos en que el par resistente ofrecido por la carga no sea muy elevado.

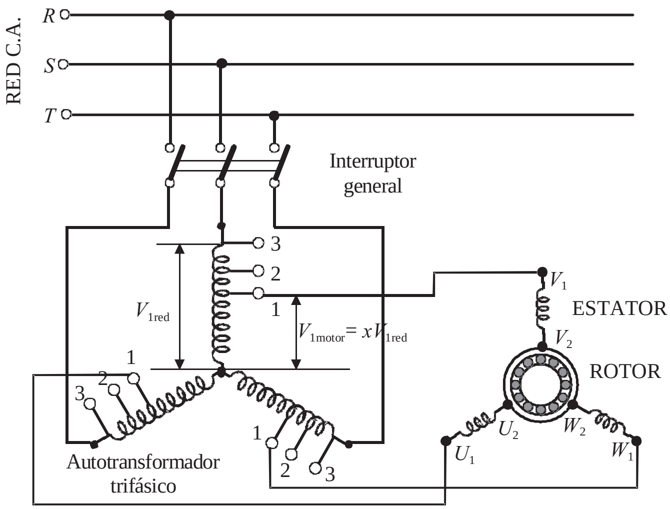


Figura 4.34. Esquema eléctrico del arranque con autotransformador.

Para observar la reducción de la corriente de arranque con este procedimiento, en la Figura 4.35*a* se muestra el circuito equivalente del motor en esas condiciones. La corriente de arranque con la tensión asignada aplicada V_{1red} tendrá una magnitud:

$$I_{1cc} = \frac{V_{1red}}{Z_{cc}} \quad ; \quad Z_{cc} = \sqrt{R_{cc}^2 + X_{cc}^2} \tag{4.125}$$

y la corriente de arranque **en el motor**, con una tensión $V_{1\,motor} = xV_{1red}$, será:

$$I_{a\,motor} = \frac{xV_{1red}}{Z_{cc}} = xI_{cc} \tag{4.126}$$

que corresponde a una corriente en la red, primario del autotransformador (véase Fig. 4.35*b*):

$$I_a = xI_{a\,motor} = x^2 I_{cc} \tag{4.127}$$

Por ejemplo, si la tensión aplicada es el 70 por 100 de la asignada la corriente en la red es del 49 por 100 de la que se obtendría con arranque directo.

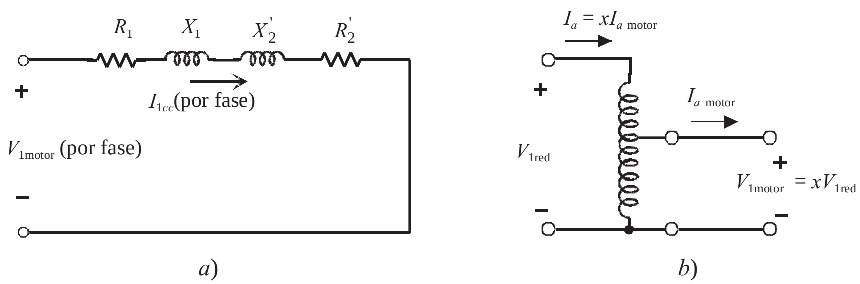


Figura 4.35. Circuito equivalente en el arranque.

c) Conmutación estrella triángulo

Este método **solamente** se puede utilizar en aquellos motores que estén preparados para funcionar en **triángulo** con la tensión de la red. La máquina se conecta en estrella en el momento del arranque y se pasa después a triángulo cuando está en funcionamiento. La operación se realiza en la actualidad con automatismo de contactores, con un circuito de fuerza y otro de mando o control; se requieren tres contactores: uno, denominado principal, para la alimentación de los principios de bobina de los devanados del motor; otro contactor se encarga de realizar la conexión del devanado en estrella, y el tercero ejecuta la conexión triángulo; además se necesita un relé de tiempo para ajustar el momento en que se pasa de la conexión estrella a la conexión triángulo. Para facilitar la comprensión de este sistema de arranque estrella-triángulo, en la Figura 4.36 se muestra el esquema de un circuito que utiliza un conmutador manual especial (hoy día está en desuso, pero tiene una gran ventaja didáctica por la simplicidad de su esquema). La posición 1 del conmutador de la Figura 4.36 se emplea para el arranque y conecta los devanados en estrella; el estátor recibe la alimentación por U_1, V_1 y W_1 y el conmutador *puentea* los terminales U_2, V_2 y W_2. (Comparar el esquema resultante con el de la Fig. 4.5*b*). Una vez que la máquina alcanza una velocidad estable el conmutador se pasa a la posición 2, *puenteando* los terminales U_1 con W_2, V_1 con U_2 y W_1 con V_2, y la máquina queda en triángulo (Comparar el esquema resultante con el de la Fig. 4.6*a*).

Se observa que con este procedimiento de arranque se aplica al motor, en el momento de la puesta en marcha, una tensión por fase de una magnitud $1/\sqrt{3}$ de la asignada. Desde el punto de vista analítico, equivale este método a un caso particular del arranque por autotransformador cuando $x = 1/\sqrt{3}$, y las relaciones (4.124) y (4.127) se convierten en:

$$T_{a\lambda} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 T_a = \frac{1}{3} T_a \tag{4.128}$$

$$I_{a\lambda} = \frac{1}{3} I_{cc} \tag{4.129}$$

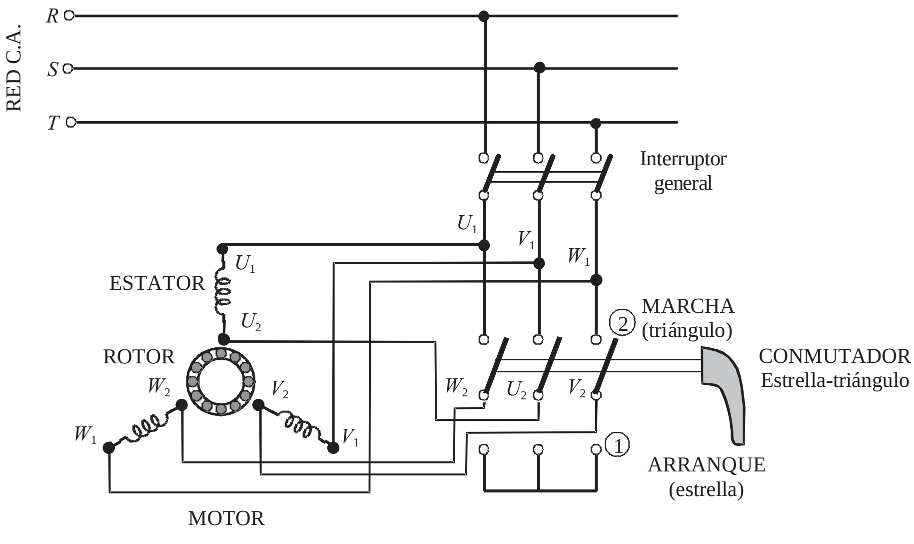


Figura 4.36. Esquema eléctrico del arranque estrella-triángulo con conmutador manual.

Es decir, la corriente de arranque en estrella es la tercera parte de la corriente de arranque que absorbería el motor si se conectara en triángulo. Se observa que el par de arranque se reduce también a la tercera parte. En los motores industriales la relación entre el par de arranque y nominal, T_a/T_n, varía entre 1,2 y 2; en consecuencia, el par de arranque resultante oscila entre 0,4 y 0,67 del par nominal y por ello este procedimiento solamente se aplica en aquellos casos en los que el par resistente de la carga en el momento de la puesta en marcha no excede, como media, del 50 por 100 del par asignado o nominal, como sucede en determinadas aplicaciones: bombas centrífugas, ventiladores, etc.

4.9.2. Arranque de los motores de rotor bobinado

En los motores de rotor devanado o con anillos se puede reducir la corriente de arranque introduciendo una resistencia adicional en cada una de las fases del rotor. La operación se realiza con la ayuda de un reóstato trifásico, como se indica en la Figura 4.37, donde se ha supuesto que los devanados de la máquina están conectados en estrella.

En el arranque se introduce toda la resistencia adicional (posición 1), de esta forma aumenta la impedancia de la máquina y se reduce la corriente inicial; conforme el motor inicia su marcha, se va eliminando resistencia del reóstato pasando el mando móvil a las posiciones 2, 3 y 4, que conforman una serie de contactos o **plots**, en la última posición queda cortocircuitado el rotor y finaliza la operación de arranque. En esta situación, para reducir las pérdidas mecánicas del motor y también el desgaste de anillos y escobillas, estas máquinas llevan a menudo dispositivos para levantar las escobillas y poner en cortocircuito los anillos. Hoy día la operación de arranque se realiza automáticamente por mediación de contactores y relés de tiempo que van eliminando secuencialmente las resistencias adicionales.

Como se ha indicado en el apartado anterior, la introducción de resistencia en el rotor modifica las curvas $T = f(s)$, desplazando el par máximo a valores de mayor deslizamiento, pero sin modificar el par máximo, como se muestra en la Figura 4.38. Se puede incluso lograr,

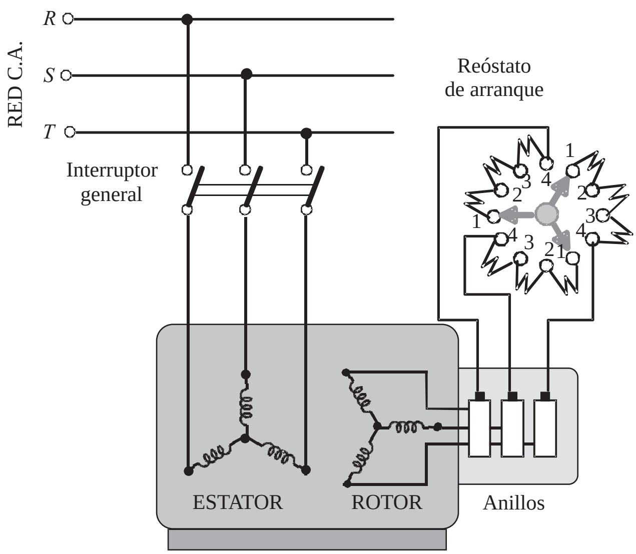


Figura 4.37. Motor asíncrono de rotor devanado y reóstato de arranque correspondiente.

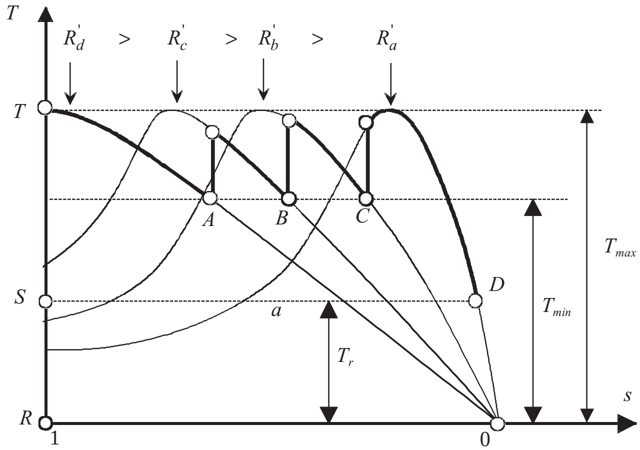


Figura 4.38. Curvas par-velocidad al variar las resistencias del rotor.

para un determinado valor de la resistencia adicional, que se obtenga el par máximo en el arranque, y de acuerdo con (4.79), es preciso para ello que se cumpla:

$$s_m = 1 = \frac{R_2' + R_{adic}'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} \tag{4.130}$$

de donde se obtiene:

$$R_{adic}' = \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2} - R_2' \tag{4.131}$$

En la Figura 4.38 se ha representado esta situación por una resistencia total reducida del rotor de valor R_d'. En el supuesto de que las cuatro curvas mostradas en la Figura 4.38 correspondan a las posiciones de los cuatro plots de la Figura 4.37, se puede analizar de una forma combinada el proceso de arranque de la máquina. Supóngase para ello que el par resistente es constante e igual a T_r (curva *a*) de la Figura 4.38. En el instante de la puesta en marcha el par de la carga, definido por la ordenada *SR*, es inferior al par de arranque de la máquina, definido por *TR* en la situación de *plot* 1; la diferencia entre estos pares provoca el *despegue* del rotor y la máquina se va acelerando siguiendo la curva del par que corresponde a la resistencia R_d', según el camino señalado con trazo más fuerte en la Figura 4.38; conforme se va conmutando el reóstato de arranque, el par del motor pasa de una curva a la siguiente, y se han indicado por medio de los puntos *A*, *B* y *C* los momentos en que se producen estos cambios, hasta llegar al régimen estable de funcionamiento en el punto *D*. Las conmutaciones se han producido en los instantes en que el par pasaba por un valor $T_{\text{mín}}$, pero podría haberse elegido un criterio de corriente mínima, o simplemente un sistema de relojería que conmutara cada resistencia en un tiempo predeterminado.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

1. Automatismos para la maniobra de las máquinas eléctricas

Durante muchos años, la maniobra y control de las máquinas eléctricas, se realizaba con ayuda de interruptores manuales que un operario especializado debía conectar o desconectar de

acuerdo con la secuencia de trabajo que se necesitaba para conseguir un determinado movimiento. Pero a partir de mitad del siglo XX se hicieron más complejas las instalaciones y comenzó la automatización con ayuda del control electromagnético y que se refiere al gobierno de un determinado sistema, mediante electroimanes, relés, contactores, etc. El propósito de este epígrafe es dar a conocer al lector los principales elementos que se utilizan en los automatismos de maniobra de las máquinas eléctricas, para después desarrollar un ejemplo de su empleo en el arranque estrella-triángulo de un motor trifásico. El elemento más característico e importante de los automatismos es el ***contactor****, que en principio y al igual que el interruptor manual, dispone de dos elementos básicos: un juego de contactos eléctricos y un mecanismo para abrir y cerrar dichos contactos. Cuando se emplea un interruptor manual, el operador actúa directamente sobre el mecanismo de cierre y apertura, sin embargo en el caso de un contactor, esta acción es efectuada por un electroimán (véase epígrafe 1.8 del Capítulo 1). El contactor, presenta por consiguiente la posibilidad de su control a distancia, ya que basta con tender dos hilos desde los bornes de alimentación de la bobina hasta el lugar en que se halla emplazado el cuadro de mando para conseguir su activación. Los contactos del contactor pueden clasificarse en dos grupos:* ***contactos principales,*** *también llamados de fase o de potencia, que son los que realizan la conexión de la carga principal, van en el circuito de potencia y son normalmente abiertos y los* ***contactos auxiliares,*** *que son los utilizados para realizar las distintas combinaciones en el circuito de mando; son más débiles que los principales y pueden ser normalmente abiertos o cerrados, según el tipo de maniobra que interese.*

Otros elementos que intervienen en los automatismos de maniobra de las máquinas eléctricas son los relés, entre los que podemos destacar: a) ***Relés temporizados****: que son dispositivos que en forma automática realizan una acción en un tiempo fijado previamente. Normalmente funcionan retardados al cierre, lo que quiere decir que pasa un tiempo desde que se actúa sobre el relé, hasta que se efectúa el cambio. b)* ***Relés térmicos****: que están constituidos por una lámina bimetálica formada por dos metales con diferentes coeficientes de dilatación y que se deforma por el calentamiento producido por un exceso de corriente; actúan cuando un motor está sometido a sobrecargas suaves y prolongadas. Los relés térmicos trabajan unidos a los contactores formando así un conjunto protector del motor, que por ello se denomina vulgarmente* ***guardamotor,*** *y que actúan por desexcitación de la bobina del contactor y apertura, por tanto, del circuito principal. Para ello el contacto normalmente cerrado del relé térmico, va en serie con la bobina del contactor, de tal forma que cuando aparece una sobrecarga se abre el contacto del relé, lo que hace que se desexcite la bobina del contactor.*

En las instalaciones de maniobra también existen elementos auxiliares de mando manual y señalización como son los pulsadores y pilotos. Un ***pulsador****, es un mecanismo de mando que tiene diversos contactos y que abre o cierra un circuito y cierra o abre otro distinto, al ejercer una presión sobre ellos. Los pulsadores pueden tener sus contactos normalmente cerrados, que son los que en reposo están cerrados y al pulsarlos abren el circuito, y se emplean como* ***pulsadores de paro****, también existen contactos normalmente abiertos, que son los que están abiertos en reposo y cierran el circuito al pulsarlos, y se emplean como* ***pulsadores de puesta en marcha****. Cuando se sitúan uno al lado del otro, el pulsador de marcha, cuyo botón es de color verde, se sitúa a la derecha, y el pulsador de paro, de color rojo, se coloca a la izquierda; cuando se disponen uno encima del otro, el superior es el de marcha y el inferior es el de paro. Las* ***lámparas de señalización,*** *son como su nombre indica, lámparas que dan una indicación luminosa cuando se efectúa una maniobra. Algunas veces son de neón, ya que su consumo es menor, su vida mayor y su potencia luminosa suficiente. Se colocan dentro de una caperuza traslúcida de color (rojo, verde, amarillo, azul, etc.) que permite una mayor percepción y la distinción de su indicación. Generalmente el* ***color verde indica marcha y el rojo paro por sobrecarga*** *(en este caso se ilumina al actuar el relé térmico). Las lámparas pueden ir dentro de los pulsadores, en los cuadros generales o en el puesto de mando y control.*

Otros dispositivos que se incluyen en los automatismos son los ***elementos auxiliares de detección y mando automático*** *y que se refieren a una gran variedad de elementos transducto-*

res que cubren un amplio campo de aplicaciones; así se tienen interruptores de posición, presostatos, interruptores de nivel, termostatos, detectores de velocidad, etc. Los interruptores de posición, denominados vulgarmente interruptores fin de carrera, se utilizan como dispositivos pilotos que modifican el circuito auxiliar de una máquina o equipo. ***El interruptor fin de carrera****, suele instalarse por medio de un enlace mecánico directo o indirecto en la máquina accionada, y puede actuar parando un motor en sus límites normales de carrera o recorrido, dando una protección contra excesos de carrera en el caso de que el motor trate de rebasar los límites establecidos. En las instalaciones de bombeo se utiliza el* ***interruptor de flotador*** *como complemento a los grupos motobomba para mantener automáticamente el nivel del agua entre los límites deseados; en tales interruptores, unos flotadores, cuya posición indica el nivel del agua, accionan las bobinas de los contactores del motor; el contactor se cierra para poner en marcha el motor, cuando el nivel del agua baja hasta un punto de ajuste inferior y se abre para detenerlo cuando el nivel del agua sube hasta un punto superior previamente ajustado. Otro elemento auxiliar en los automatismos es el* ***presostato*** *que es un elemento suplementario a las bombas y compresores movidos por motores eléctricos, que arrancan y paran automáticamente, haciendo que la presión del fluido detectada por el presostato se mantenga dentro de los límites establecidos.*

Al realizar un esquema de un automatismo, debe distinguirse ***el circuito principal o de fuerza****, y el* ***de mando o control****. Generalmente se emplean esquemas independientes para el circuito principal y el de mando, lo que facilita la interpretación del funcionamiento y ayuda al operario a realizar el cableado de las conexiones. El circuito de fuerza se destaca en el esquema haciendo las líneas más gruesas, lo que permite identificarlo enseguida. El circuito de mando se realiza con línea fina, lo que indica que está recorrido por una corriente pequeña. El diseño de un automatismo comienza con el dibujo del esquema del circuito principal, en donde se representa la red de entrada, los fusibles, interruptor general, contactores, relés térmicos y motor, junto con las conexiones necesarias para la realización de la función que se pretende ejecutar. Posteriormente se inicia el esquema del circuito de mando donde aparecen los pulsadores, bobinas de contactores, contactos auxiliares de contactores y relés, temporizadores, interruptores final de carrera, etc., y se prepara el circuito que responda a las acciones de mando que se desean obtener.*

Debe señalarse finalmente que en la actualidad los sistemas automáticos utilizan los denominados ***autómatas programables*** *(PLC: Programmable Logic Controllers en inglés), que permiten la automatización de procesos complejos por una programación sencilla, lo que confiere unas características inmejorables, porque cualquier cambio del circuito de mando se realiza por software, lo que simplifica enormemente las operaciones de adaptación de la instalación a los posibles cambios del proceso productivo.*

2. Arranque estrella-triángulo con automatismos de contactores

Como ejemplo de un automatismo se va a explicar en este apartado el circuito de arranque estrella-triángulo de un motor asíncrono trifásico con ayuda de contactores. En primer lugar en la Figura 4.39 se ha dibujado el circuito principal o de fuerza, que está formado por el motor, con sus tres juegos de bobinas U1-U2, V1-V2; y W1-W2, los fusibles FU1 y el relé térmico de protección FR1, y finalmente tres contactores, uno principal KM1 que une las fases de la red eléctrica con los terminales de entrada del motor U1, V1 y W1, y dos auxiliares, el primero de ellos el KM2 cuya misión es unir entre sí los terminales de salida del motor U2, V2 y W2 para formar la conexión en estrella y el segundo KM3 que realizará la conexión de los terminales U2, V2 y W2 del motor en triángulo.

En la Figura 4.40 se muestra el circuito de mando, que se alimenta de una fase y el neutro de la red. El funcionamiento de este circuito es el siguiente: al presionar sobre el pulsador S1 se da tensión a la bobina del contactor principal KM1 que al cerrar sus contactos principales (Figura 4.39) da alimentación a los terminales de entrada del motor, al propio tiempo se activa el relé de tiempo KT4 y se da tensión a la bobina del contactor estrella KM2 que une en un

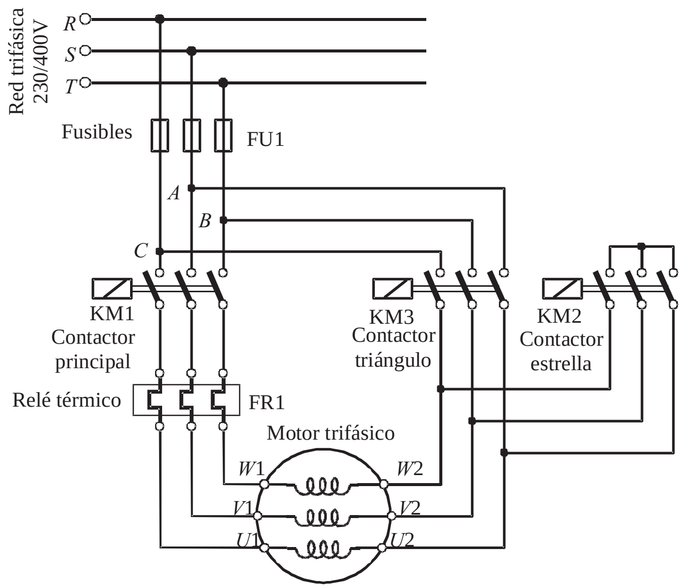


Figura 4.39. Circuito principal o de fuerza de un arrancador estrella-triángulo.

mismo punto los terminales de salida del motor, por lo que éste comienza a arrancar en estrella. Por otra parte el contacto auxiliar de autoretención KM1 del contactor principal, está en paralelo con el pulsador de marcha, por lo que al cerrarse, se puede dejar de presionar sobre el pulsador S1 ya que entonces las bobinas de los contactores cierran su circuito a través de este contacto de autoretención.

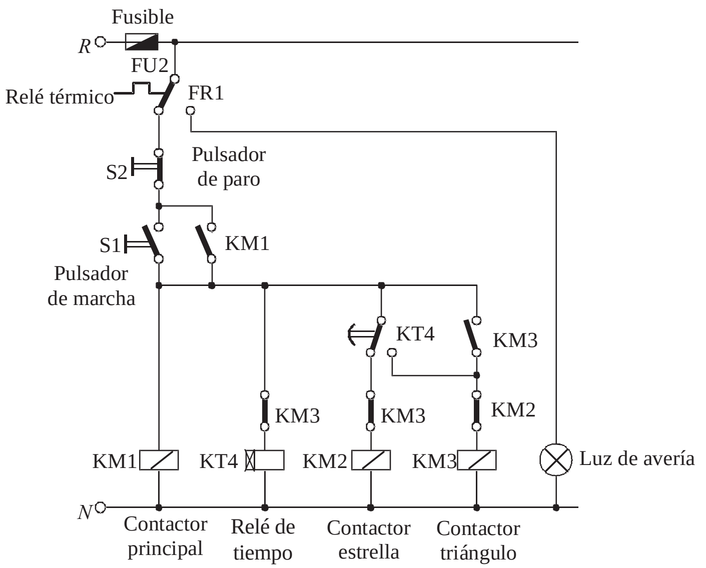
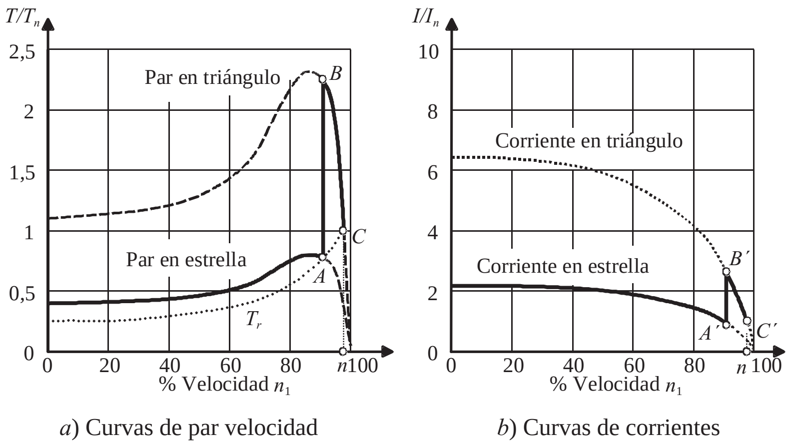


Figura 4.40. Circuito de mando o control de un arrancador estrella-triángulo.

Después que transcurre el tiempo de retardo ajustado previamente con el relé de tiempo KT4, su contacto auxiliar KT4 conmuta a la otra posición señalada en el circuito de mando de la Figura 4.40, lo que provoca la desexcitación de la bobina del contactor estrella KM3, cuyos contactos principales se abren (Figura 4.39) y los auxiliares KM3 (Figura 4.40) cambian de posición, por lo que se desconecta el relé de tiempo, y se da alimentación a la bobina del contactor triángulo KM3 que al activarse cierra sus contactos principales (Figura 4.39) y el motor pasa a la posición triángulo, asegurándose por el contacto auxiliar KM3 que está en serie con la bobina del contactor estrella KM2 que quede sin alimentación este contactor. La desconexión del motor se consigue presionando sobre el pulsador S2 (Figura 4.40), lo que deja sin alimentación a todas las bobinas de los contactores y, por tanto, el motor se para. Si se produce una sobrecarga en la máquina actuará el relé térmico FR1 que al conmutar su contacto deja sin alimentación a las bobinas de los contactores por lo que se desconecta el motor y por otra parte se enciende simultánemente una lámpara de avería (Figura 7.40) para señalar esta anomalía. En el caso de que se produzca un cortocircuito brusco en el motor, la protección se consigue debido a la actuación rápida de los fusibles FU1 de la Figura 4.39.

En las Figuras 4.41 se muestran las curvas características que gobiernan este tipo de arranque tanto de par como de corriente. En las curvas par-velocidad mostradas en la Figura 4.41a se ha tomado en ordenadas el valor del par respecto al nominal (es decir el par por unidad, pu) y en abscisas la velocidad en tanto por ciento respecto de la velocidad de sincronismo. Se han dibujado las curvas del par electromagnético del motor en estrella y en triángulo que de acuerdo con la expresión (4.128) están en la relación 1:3, es decir el par en estrella es un tercio del par en triángulo. Se ha supuesto un par resistente de tipo cuadrático. El motor se acelera, conectado inicialmente en estrella, hasta que alcanza entre el 70 y el 80 por 100 de su velocidad nominal; en el caso de la Figura 4.41a se ha dejado llegar hasta el punto A en el que se igualan los pares motor y resistente; en este momento se produce la conmutación del motor a triángulo y si la conmutación es instantánea el motor pasa a trabajar al punto B donde se acelera rápidamente hasta llegar a C, en el que se iguala con el par resistente.

En la Figura 4.41b se han representado las curvas de corriente absorbida en la línea por el motor en función de la velocidad, y donde las corrientes se expresan en valores p.u. Al igual que en el caso anterior la relación de ordenadas (estrella a triángulo) es de acuerdo con la expresión (4.129) igual a 1:3. Inicialmente la evolución de la corriente sigue la curva inferior (conexión estrella) y en el punto A′ (que es el correspondiente al A de la Figura 4.41a), se produce la conmutación a triángulo, por lo que la máquina sufre un aumento de corriente hasta el punto B′ y al acelerarse el motor la corriente se va reduciendo hasta llegar al punto de funcionamiento



a) Curvas de par velocidad

b) Curvas de corrientes

Figura 4.41. Curvas de par y de velocidad para la conmutación estrella-triángulo.

nominal C′ que se corresponde con el C de la Figura 4.41a. La velocidad final de trabajo es n. Debe observarse en esta última figura que si la conmutación se efectuase demasiado pronto, por ejemplo al 60 por 100 de la velocidad de sincronismo, aparecería una gran punta de corriente en la transición que en el caso de la Figura 4.41b llegaría a alcanzar casi a seis veces la nominal, por lo que este tipo de arranque no tendría ninguna ventaja frente al arranque directo.

Otro aspecto a tener en cuenta en este tipo de arranque es el modo en que debe realizarse la conexión en triángulo del motor. Hay que destacar que cualquier método de arranque que suponga una desconexión momentánea de la red puede provocar corrientes elevadas en la instalación. Téngase en cuenta que cuando se separa el devanado del estátor de la red, y al estar el rotor en cortocicuito (jaula de ardilla), circulan por éste corrientes que tienden a mantener el fasor espacial del campo magnético apuntando hacia la posición del rotor que tenía previa a la desconexión. Este campo magnético induce f.e.m.s en las bobinas del devanado del estátor que acaba de abrirse, por lo que al hacerse la transición de estrella a triángulo en este tipo de arranque, se pueden producir fuertes corrientes en la máquina, dependiendo de la menor o mayor coincidencia de fase de las f.e.m.s inducidas con las tensiones de la red que se vuelven a aplicar en la reconexión.

Si se considera el circuito de la Figura 4.39, obsérvese que inicialmente al activarse el contactor KM2, se conecta el motor en estrella y las tensiones aplicadas a cada fase del motor son: a la bobina U1-U2, la tensión V_{RN}*; a la bobina V1-V2, la tensión* V_{SN}*; y a la bobina W1-W2, la tensión* V_{TN}*. En la Figura 4.42 se han dibujado los fasores de tensión correspondientes que tienen una sucesión de fases de secuencia directa RST. Siguiendo con el esquema de la Figura 4.39, al desconectarse el contactor KM2 y activarse el KM3, se pone el motor en triángulo y las tensiones aplicadas a cada fase del motor son: a la bobina U1-U2, la tensión* V_{RS} *(por medio de la unión en el nudo A, de U2 con la fase S de la red); a la bobina V1-V2, la tensión* V_{ST} *(por medio de la unión en el nudo B, de V2 con la fase T de la red); y a la bobina W1-W2, la tensión* V_{TR} *(por medio de la unión en el nudo C, de W2 con la fase R de la red). Para mayor claridad en la parte superior de la Figura 4.42b se muestra el triángulo resultante, en el que se señala debajo de cada bobina la tensión aplicada correspondiente. De acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 4.42a, la sucesión de tensiones que en la conexión en estrella era* V_{RN}, V_{SN} *y* V_{TN}*, coincide con la secuencia de tensiones en triángulo* V_{RS}, V_{ST} *y* V_{TR}*, por lo que al pasar el motor de estrella a triángulo seguirá girando en el mismo sentido directo (como así debe ser). Sin embargo debe darse cuenta el lector que las tensiones* V_{RS}, V_{ST} *y* V_{TR} *que se aplican al motor*

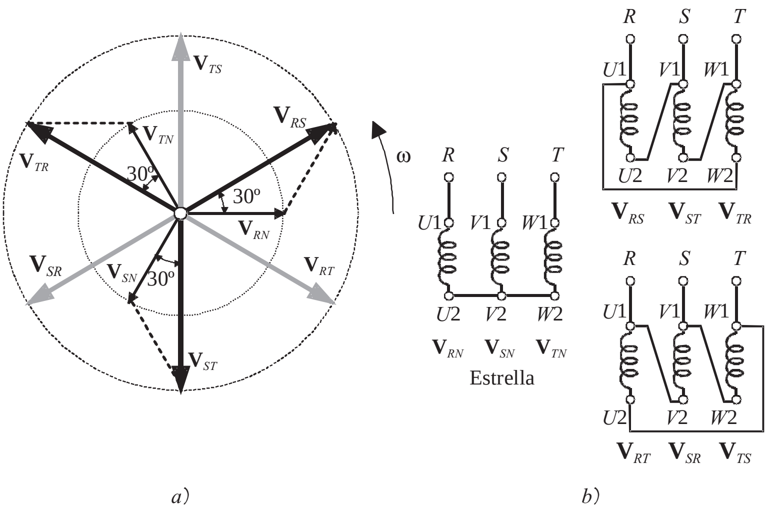


Figura 4.42. Fasores de tensiones. Conexión estrella y tipos de conexión triángulo.

en la conexión triángulo ***están adelantadas 30°*** *respecto de las tensiones simples* V_{RN}*,* V_{SN} *y* V_{TN} *que tenían previamente las bobinas del motor en la conexión en estrella.*

Pero teniendo en cuenta que en una conmutación rápida entre la conexión estrella a triángulo, la posición del rotor se ha retrasado (al quedar el motor separado de la red) respecto a la posición que tenía antes de la conmutación, es más conveniente que en la conexión triángulo se apliquen tensiones compuestas que estén retrasadas respecto de las simples y no adelantadas como se ha comentado en el párrafo anterior y cuyo esquema de conexiones respondía a la Figura 4.39. En nuestro caso esto se puede lograr aplicando en triángulo las siguientes tensiones compuestas al motor: a la bobina U1-U2, la tensión V_{RT} *(uniendo en este caso el nudo A de la Figura 4.39 a la fase T de la red en vez de a la fase S a la que había unido en el caso anterior); a la bobina V1-V2, la tensión* V_{SR} *(uniendo el nudo B a la fase R de la red en vez de a la fase T); y a la bobina W1-W2, la tensión* V_{TS} *(uniendo en este caso el nudo C a la fase S de la red en vez de a la fase R). Para mayor claridad, en la parte inferior de la Figura 4.42b se muestra el triángulo resultante en el que se señala debajo de cada bobina la tensión aplicada correspondiente. De acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 4.42a, la sucesión de tensiones que se obtiene en este caso es* V_{RT}*,* V_{SR} *y* V_{TS} *que también representa un sistema de secuencia directa, pero a diferencia con el caso anterior, estas tensiones compuestas con el motor en triángulo* ***están retrasadas 30°*** *respecto de las tensiones simples* V_{RN}*,* V_{SN} *y* V_{TN} *que tenían previamente las bobinas del motor en la conexión en estrella y este retraso de las tensiones en triángulo compensa el retardo que sufre el rotor en la conmutación, por lo que se logra una mayor coincidencia de fases con la red, lo que se traduce en una reducción del pico de corriente que se produce en esta maniobra y justifica la recomendación de algunos fabricantes que prefieren esta conexión en triángulo que la que se muestra en el esquema de la Figura 4.39.*

Ejemplo de aplicación 4.11

Un motor asíncrono trifásico tiene los siguientes parámetros: $R_1 = R_2' = 0{,}5\ \Omega$*;* $X_{cc} = 5\ \Omega$*. Si la capacidad de sobrecarga* $T_{máx}/T_n$ *es igual a 2,2, calcular la relación entre el par de arranque y el par nominal en los siguientes casos: a) arranque directo; b) arranque por autotransformador con una tensión inicial del 75 por 100 de la asignada; c) arranque estrella-triángulo.*

Solución

De acuerdo con (4.78) el par máximo viene expresado por:

$$T_{\text{máx}} = \frac{m_1 V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}}\right] = \frac{K}{2} V_1^2 \left[\frac{1}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}}\right]$$

donde se ha denominado K a: $m_1/2\pi \dfrac{n_1}{60}$. Al sustituir valores resulta:

$$T_{\text{máx}} = \frac{K}{2} V_1^2 \left[\frac{1}{0{,}5 + \sqrt{0{,}5^2 + 5^2}}\right] = \frac{KV_1^2}{11{,}05}$$

El par de plena carga o nominal es igual a:

$$T_n = \frac{T_{\text{máx}}}{2{,}2} = \frac{KV_1^2}{24{,}31}$$

puesto que la capacidad de sobrecarga es igual a 2,2.

a) El par de arranque se puede obtener haciendo $s = 1$, en la expresión general del par (4.76), resultando:

$$T_a = \frac{m_1 R_2' V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}[(R_1 + R_2')^2 + X_{cc}^2]} = K \frac{R_2' V_1^2}{(R_1 + R_2')^2 + X_{cc}^2}$$

que al aplicar valores da:

$$T_a = KV_1^2 \frac{0{,}5}{1^2 + 5^2} = \frac{KV_1^2}{52}$$

En consecuencia, el cociente T_a/T_n resulta ser:

$$\frac{T_a}{T_n} = \frac{KV_1^2}{52} \cdot \frac{24{,}31}{KV_1^2} = 0{,}468$$

b) El par de arranque con autotransformador y toma de 75 por 100 es igual a 0,752 veces el par de arranque con conexión directa (véase expresión 4.124), y el cociente anterior vale:

$$\frac{T_{a,aut}}{T_n} = 0{,}75^2 \frac{T_a}{T_n} = 0{,}75^2 \cdot 0{,}468 = 0{,}263$$

c) En el arranque estrella-triángulo, de acuerdo con (4.128), se cumple: $T_{a\lambda} = T_a/3$, y en consecuencia:

$$\frac{T_{a\lambda}}{T_n} = \frac{1}{3}\frac{T_a}{T_n} = \frac{1}{3} 0{,}468 = 0{,}156$$

Ejemplo de aplicación 4.12

Un motor de inducción trifásico de 4 polos y rotor devanado tiene los arrollamientos conectados en estrella. Cuando se conecta a su tensión asignada de 380 V, 50 Hz, desarrolla el par de plena carga a 1.425 r.p.m. Los parámetros del circuito equivalente son: $R_1 = R_2' = 1\ \Omega$; $X_{cc} = 6\ \Omega$; $m_v = m_i = 2$. Calcular: a) Corriente y par de plena carga; b) corriente y par de arranque con los anillos cortocircuitados; c) par máximo y velocidad correspondiente; d) resistencia que debe introducirse en los anillos del rotor por fase, para que la máquina desarrolle el par de plena carga en el arranque con la menor corriente posible en el estátor e intensidad correspondiente.

Solución

a) La velocidad de sincronismo es:

$$n_1 = \frac{60\, f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1.500 \text{ r.p.m.}$$

en consecuencia, el deslizamiento a plena carga es:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{1.500 - 1.425}{1.500} = 5\,\%$$

El circuito equivalente a plena carga es el indicado en la Figura 4.43, resultando una intensidad absorbida en el primario de valor:

$$I_1 = \frac{220}{\sqrt{(2 + 19)^2 + 6^2}} = 10{,}07 \text{ A}$$

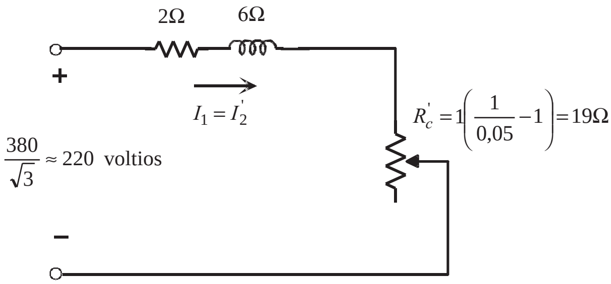


Figura 4.43.

La potencia mecánica interna vale:

$$P_{mi} = 3R_c' I_1^2 = 3 \cdot 19 \cdot 10{,}07^2 = 5.783{,}65 \text{ W}$$

y el par de plena carga será:

$$T_n = \frac{P_{mi}}{2\pi \frac{n}{60}} = \frac{5.783{,}65}{2\pi \frac{1.425}{60}} = 38{,}76 \text{ N.m}$$

b) En el arranque $R_c' = 0$, y la intensidad correspondiente, teniendo en cuenta el circuito de la Figura 4.43, será:

$$I_1 = \frac{220}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = 34{,}79 \text{ A}$$

Para calcular el par de arranque se utilizará la expresión general (4.76), en la que se hará $s = 1$, resultando:

$$T = \frac{3R_2' \cdot V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}\left[(R_1 + R_2')^2 + X_{cc}^2\right]} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 220^2}{2\pi \frac{1.500}{60}\left[2^2 + 6^2\right]} = 23{,}11 \text{ N.m}$$

c) El deslizamiento para par máximo, de acuerdo con (4.77), resulta ser:

$$s_m = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + X_{cc}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = 0{,}164$$

que corresponde a una velocidad:

$$n = n_1 (1 - s) = 1.500\,(1 - 0{,}164) = 1.253{,}4 \text{ r.p.m.}$$

d) Igualando el par de arranque, con una resistencia adicional conectada, al par de plena carga se obtiene:

$$38{,}76 = \frac{3(R_2' + R_{a2}')V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60}\left[(R_1 + R_2' + R_{a2}')^2 + X_{cc}^2\right]} = \frac{3(1 + R_{a2}')220^2}{2\pi \frac{1.500}{60}\left[(2 + R_{a2}')^2 + 6^2\right]}$$

que puede ponerse:

$$(2 + R'_{a2})^2 + 6^2 = \frac{3 \cdot 200^2}{2\pi \dfrac{1.500}{60} \cdot 38{,}76} = (1 + R'_{a2}) = 23{,}85\ (1 + R'_{a2})$$

cuya ecuación de 2.º grado conduce a los valores:

$$R'_{a2} = 19\ \Omega \quad ; \quad R'_{a2} = 0{,}85\ \Omega$$

que en valores sin reducir son:

$$R_{a2} = 4{,}75\ \Omega \quad ; \quad R_{a2} = 0{,}21\ \Omega$$

La primera de estas dos soluciones es la que producirá menor corriente de arranque debido a su mayor magnitud, siendo la intensidad correspondiente igual a:

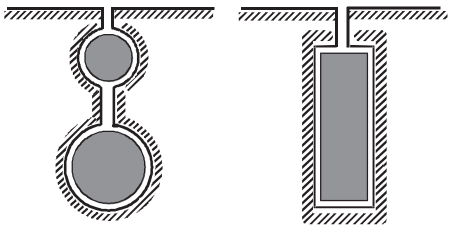
$$I_a = \frac{220}{\sqrt{(2 + 19)^2 + 6^2}} = 10{,}07\ \text{A}$$

que coincide con la corriente de plena carga, lo que era de esperar, ya que la resistencia adicional R'_{a2} coincide con la resistencia de carga R'_c, lo que está de acuerdo con el significado físico de la misma.

4.10. MOTORES DE DOBLE JAULA DE ARDILLA

El motor de doble jaula de ardilla fue inventado por Dolivo Dobrowolsky el año 1893, siendo desarrollado más tarde por Boucherot. Esta configuración representa una de las variedades del motor asíncrono en cortocircuito que utiliza el fenómeno de desplazamiento de la corriente en el devanado del rotor para mejorar las propiedades de arranque del motor.

El estátor de estos motores es trifásico convencional, mientras que el rotor está constituido por dos jaulas que generalmente disponen del mismo número de barras situadas en las mismas ranuras (Fig. 4.44*a*). La jaula externa, situada más cerca del entrehierro, tiene menor sección que la otra y se construye con un material de alta resistividad (latón). La jaula interior se hace con cobre electrolítico. En el caso en que se construyan ambas jaulas con aluminio, se aumentan más las diferencias entre las secciones de las mismas. Ambas jaulas están separadas entre sí en cada ranura por medio de una rendija delgada. La misión de esta rendija es aumentar los flujos de dispersión de la jaula interior, y de este modo se consigue una jaula externa con alta resistencia y baja reactancia, mientras que la interna presenta baja resistencia y gran



a) *b*)

Figura 4.44. Rotor de doble jaula y de ranura profunda.

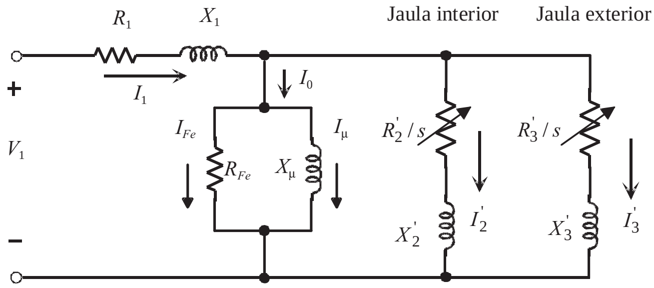


Figura 4.45. Circuito eléctrico equivalente de un motor asíncrono de doble jaula.

reactancia. Los anillos de cortocircuito pueden estar separados y unidos después eléctricamente, o tener uno único para ambas jaulas. De este modo la corriente rotórica se distribuirá entre cada jaula dependiendo de las impedancias de las mismas.

La teoría que rige el funcionamiento de este tipo de rotores es la siguiente: en el arranque la frecuencia del rotor f_2 coincide con la del estátor, de tal modo que las reactancias son muy superiores a las resistencias; como consecuencia de ello la corriente fluye en su mayor parte por la jaula que presenta menor reactancia (la exterior). A velocidades normales las frecuencias rotóricas, como ya sabemos, son despreciables, por lo que predominan las resistencias frente a las reactancias, y de este modo la mayor parte de la corriente circula por la jaula interior, que tiene menos resistencia. Con todo ello se consigue que en el arranque la resistencia sea alta, lo que conduce a un alto par de arranque y una baja corriente. A velocidad asignada la resistencia es baja, con lo que se consigue un buen rendimiento.

Se han desarrollado diversas teorías para obtener el circuito equivalente de estas máquinas. (El lector interesado en este tema puede consultar el texto de P. L. Alger citado en la bibliografía.) Si se desprecian los efectos de inductancia mutua entre ambas jaulas y se considera lineal el cambio de las reactancias de las jaulas con las frecuencias (que significa despreciar el efecto pelicular), se puede considerar aceptable el circuito que se muestra en la Figura 4.45, que es copia en definitiva del circuito equivalente convencional (Fig. 4.13*a*) pero en el que se han considerado las dos jaulas en paralelo en el circuito secundario. El cálculo de potencias y pares se realiza entonces teniendo en cuenta ambos circuitos rotóricos.

Otra variedad constructiva para conseguir motores con alto par de arranque es dotar al rotor de una simple jaula con ranuras profundas (véase Fig. 4.44*b*) en las que se introducen conductores rectangulares o trapezoidales, con mayor profundidad que anchura. El cambio de la resistencia con la frecuencia se debe a las corrientes parásitas o de Foucault que se inducen en las barras, que son muy altas en el arranque merced a que entonces la frecuencia en el rotor es alta y prácticamente despreciable a velocidades ordinarias. El comportamiento de este tipo de rotores es de este modo, similar al de doble jaula.

Ejemplo de aplicación 4.13

Se dispone de un motor de doble jaula que tiene una resistencia del estátor despreciable, así como la rama paralelo del circuito equivalente. Las impedancias a rotor parado de las jaulas interior y exterior son, respectivamente: $Z_2 = 0{,}05 + j\,0{,}4\ \Omega$/fase; $Z_3 = 0{,}5 + j\,0{,}1\ \Omega$/fase. Calcular la relación de pares debidos a las dos jaulas: 1) en el arranque; 2) cuando la máquina gira con un deslizamiento del 5 por 100.

Solución

1. De acuerdo con (4.76), teniendo en cuenta que se desprecia la impedancia del estátor, resulta:

$$T = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} s\left[\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2\right]} = \frac{AR_2}{s\left[\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + X_2^2\right]}$$

donde en la constante A se han incluido todos lo parámetros que se conservan constantes y que incluyen un factor m^2 en el denominador (relación de transformación de impedancias) para poder resolver el problema con parámetros directamente en el secundario. Teniendo en cuenta la ecuación anterior resultará un cociente entre pares de arranque:

$$a = \frac{T_{a3}}{T_{a2}} = \frac{0{,}5}{0{,}5^2 + 0{,}1^2} \cdot \frac{0{,}05^2 + 0{,}4^2}{0{,}05} = 6{,}25$$

2. Procediendo de un modo análogo, para un deslizamiento del 5 por 100 resulta:

$$\frac{T_{a3}}{T_{a2}} = \frac{0{,}5}{0{,}05\left[\left(\frac{0{,}5}{0{,}05}\right)^2 + 0{,}1^2\right]} \cdot \frac{0{,}05\left[\left(\frac{0{,}05}{0{,}05}\right)^2 + 0{,}4^2\right]}{0{,}05} = 0{,}116$$

Si analizamos los resultados obtenidos se deduce que la jaula exterior contribuye 6,25 veces más que la jaula interior en el momento del arranque, mientras que con un deslizamiento del 5 por 100 sólo contribuye 0,116 veces, o de otro modo, a velocidades de régimen, la jaula interior da un par 1/0,116 = 8,62 veces el de la jaula exterior.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Clases de motores asíncronos

La asociación estadounidense de fabricantes de maquinaria eléctrica (NEMA: National Electrical Manufacturers Association) y también las Normas del Comité Electrotécnico Internacional (CEI o ICE), clasifican los motores asíncronos en función de la forma constructiva de la jaula de ardilla del rotor, lo que da lugar a una variedad de curvas par-velocidad tales como las que se muestran en la Figura 4.46, en la que en el eje de abscisas se representa la velocidad del rotor en tanto por ciento respecto de la síncrona, y en ordenadas el par desarrollado en tanto por ciento respecto del asignado a plena carga. También se han dibujado de una forma aproximada las formas de la ranura para cada clase. Los principales tipos de motores que se van a comentar son los siguientes:

Motores Clase A: *Son los motores más simples y tienen las ranuras del rotor semicerradas, en las que se insertan barras de bastante sección que están localizadas cerca de la superficie, por lo que tienen baja resistencia eléctrica (debido a su gran sección) y poca reactancia al estar las barras cerca del estator. El deslizamiento a plena carga es generalmente inferior al 5 por 100 debido a la pequeña resistencia del rotor. Desarrolla un par de arranque pequeño del 125 al 175 por 100 del par de plena carga y la corriente de arranque es elevada y varía entre 5 y 7 veces la nominal. Es un motor adecuado para aplicaciones a velocidad constante. Estos motores se emplean en el accionamiento de bombas centrífugas, ventiladores, y máquinas herramientas.*

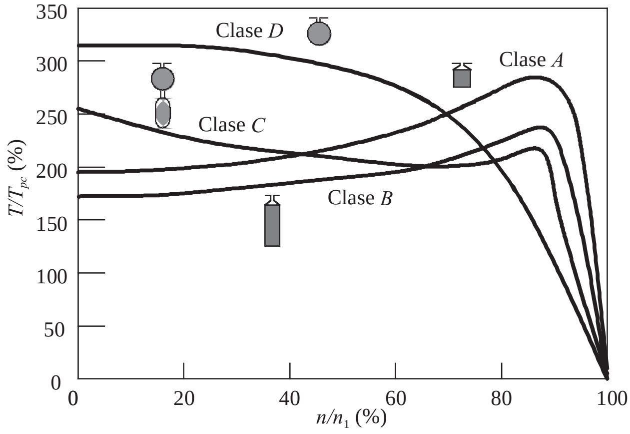


Figura 4.46. Curvas par-velocidad de diversas clases de motores asíncronos.

Motores Clase B: *En estos motores los conductores del rotor se colocan en ranuras más profundas que los de la clase A. Debido al efecto pelicular, la corriente de arranque en el rotor tiende a concentrarse en la parte superior, cuando la frecuencia del rotor es elevada, por lo que la resistencia en el arranque es más alta que los de la clase A y la corriente de arranque correspondiente es inferior a los de la clase A ya que oscila entre 4,5 y 5,5 veces la nominal. A plena carga (con pequeños deslizamientos) el efecto pelicular es despreciable y la corriente tiende a distribuirse uniformemente por la sección transversal de los conductores del rotor disminuyendo la resistencia del rotor y mejorando por ello el rendimiento. El par de arranque para los motores de clase B, es prácticamente el mismo que los de la clase A.*

Motores Clase C: *En estos motores el rotor tiene una jaula de ardilla doble, la jaula interior consiste en barras profundas embutidas en el hierro y que son de baja resistencia y alta inductancia de dispersión, mientras que la jaula externa está formada por barras de alta resistencia y al estar cerca de la superficie tienen una baja inductancia de dispersión. Es por ello que en el arranque (cuando la frecuencia del rotor es elevada), la jaula superior o externa tiene menos reactancia que la interior por lo que la corriente tiende a circular por esta última y debido a que tiene una resistencia elevada, se consigue un par de arranque alto, pero con la ventaja de que la corriente de arranque es reducida. Cuando el motor funciona a plena carga, es decir con poco deslizamiento, la frecuencia del rotor es pequeña, y debido a ello la corriente tiende a circular por la jaula interna, que al tener baja resistencia se consiguen buenos rendimientos. El par de arranque es elevado y oscila entre el 200 y el 275 por 100 del correspondiente a la plena carga y con corrientes de arranque reducidas que oscilan entre 3,5 a 5 veces la nominal. Este tipo de motores se utilizan en aplicaciones en las que se requieren altos pares de arranque, como es el caso de las trituradoras, máquinas taladradoras, cintas transportadoras y maquinaria textil.*

Motores Clase D: *En estos motores las barras del rotor son de pequeña sección y de un material de alta resistividad como el bronce, por lo que la resistencia eléctrica de la jaula es alta. Debido a ello estos motores desarrollan pares de arranque elevados que oscilan entre el 250 a 300 por 100 del par de plena carga. Dependiendo del diseño, la corriente de arranque puede ser de 3 a 8 veces la nominal. Este tipo de motores se utiliza para el accionamiento de cargas con aceleraciones rápidas como prensas, máquinas de estampar, máquinas de corte, excavadoras y grúas.*

4.11. REGULACIÓN DE VELOCIDAD

Como se ha indicado anteriormente, el motor de inducción tiene una característica par-velocidad, que en la zona de trabajo estable es muy rígida, lo que significa que funciona a una velocidad asíncrona prácticamente constante. Si se une a esta prioridad la sencillez de su construcción, esta máquina es idónea en aquellas condiciones de servicio donde se requiere una velocidad constante.

Cuando es necesario disponer de una regulación de velocidad, se prefieren los motores de c.c. (véase Cap. 6), y de ahí sus aplicaciones en tracción eléctrica, trenes de laminación, etc. Debido al mayor precio de los motores de c.c. y a sus gastos de mantenimiento, se ha intentado desarrollar diversos métodos de regulación de los motores de inducción, que hoy día gracias a la electrónica de potencia se van incorporando cada vez más a este mercado. Se van a indicar en este epígrafe los principios generales que pueden aplicarse para controlar la velocidad de los motores asíncronos. De acuerdo con la expresión (4.4), que define el deslizamiento, la velocidad del rotor viene dada por la expresión:

$$n = n_1(1 - s) = \frac{60\, f_1}{p}(1 - s) \tag{4.132}$$

que indica que la velocidad depende del deslizamiento, de la frecuencia y del número de pares de polos.

4.11.1. Regulación por variación del número de polos

Variando el número de polos del estátor de la máquina, cambia la velocidad del campo giratorio y en consecuencia varía la velocidad de rotación del motor. El procedimiento utiliza diversos devanados en el estátor dependiendo de las velocidades que se quieran obtener; generalmente, por limitación de espacio en las ranuras suelen emplearse dos combinaciones diferentes, dando lugar a dos r.p.m. asíncronas cercanas a 3.000, 1.500, 1.000, 750, 500, etc., r.p.m. (a 50 Hz). Para que el funcionamiento sea posible es **preciso que el rotor sea de jaula de ardilla**, ya que este tipo de rotor adapta automáticamente (por inducción) su número de polos al existente en el estátor. Con frecuencia se emplean dos escalones de velocidad en la relación 2:1, y con un solo devanado que se conmuta adecuadamente, lo que se denomina **CONEXIÓN DAHLANDER**. En este caso, cada fase del devanado consta de dos partes iguales, que pueden ponerse en serie o en paralelo, dando lugar a una reducción del número de polos a la mitad del original, aumentando en consecuencia la velocidad del rotor a prácticamente el doble. En la Figura 4.47 se muestra el procedimiento utilizado. En *a*) se muestra el devanado formando 4 polos, estando las bobinas conectadas en serie. En *b*) se muestra el devanado formando 2 polos, con las bobinas conectadas en paralelo; se observa en este caso que la corriente en la bobina *cd* ha sufrido una inversión. En el caso de devanados trifásicos, la conmutación se realiza de acuerdo con los circuitos mostrados en la Figura 4.48.

El cambio de estrella a doble estrella se emplea en los accionamientos en los que el cambio de velocidad se hace con cargas que trabajan a par constante. Para demostrar esta afirmación deben compararse los dos esquemas en el supuesto de que la máquina trabaje en ambos casos con idéntico f.d.p. y las mismas corrientes en las bobinas. Para la estrella se cumple:

$$P_\lambda = 3\frac{V}{\sqrt{3}} I_n \cos\varphi = \sqrt{3} V I_n \cos\varphi \tag{4.133}$$

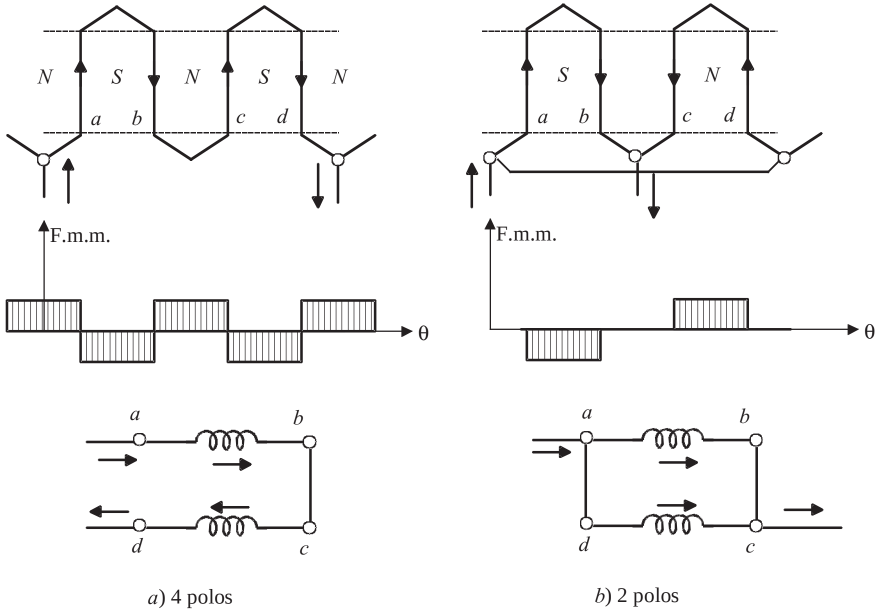


Figura 4.47. Conexión Dahlander. Formación de los polos.

En la doble estrella resulta:

$$P_{\lambda\lambda} = 3\,\frac{V}{\sqrt{3}}\,2I_n \cos\varphi = 2P_{\lambda} \tag{4.134}$$

Como en este caso la velocidad es doble, debido a que aparecen p pares de polos, el par se mantendrá constante.

El cambio de triángulo a doble estrella se emplea en aquellas aplicaciones en que se conserva la potencia. En este sistema se cumple:

$$P_{\Delta} = 3VI_n \cos\varphi \tag{4.135}$$

y en doble estrella:

$$P_{\lambda\lambda} = 3\,\frac{V}{\sqrt{3}}\,2I_n \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\,P_{\Delta} = 1{,}155P_{\Delta} \tag{4.136}$$

es decir, prácticamente se conserva la potencia en la conmutación.

La regulación de velocidad que se obtiene en la conexión Dahlander no resulta suave, sino escalonada, pero el procedimiento es muy económico, resultando unas características mecánicas duras o rígidas. Gracias a sus ventajas este procedimiento se aplica en ciertos tipos de máquinas herramientas con objeto de disminuir sus transmisiones mecánicas y también se emplea en ventiladores, extractores de polvo, ascensores, etc.

Nota histórica: El método de Dahlander fue consecuencia de un artículo publicado en 1897 en la revista alemana *Elektrotechnische Zeitschrift*, y permite conseguir dos velocidades distintas de giro de un motor (y que como se acaba de señalar están en la relación 2:1), lo cual se logra utilizando un cambio de conexiones en las bobinas del estátor. Este procedimiento fue generalizado en 1958 por el profesor inglés Gordon Hindle Rawcliffe (1910-1979), que fue catedrático la Universidad de Bristol entre 1944

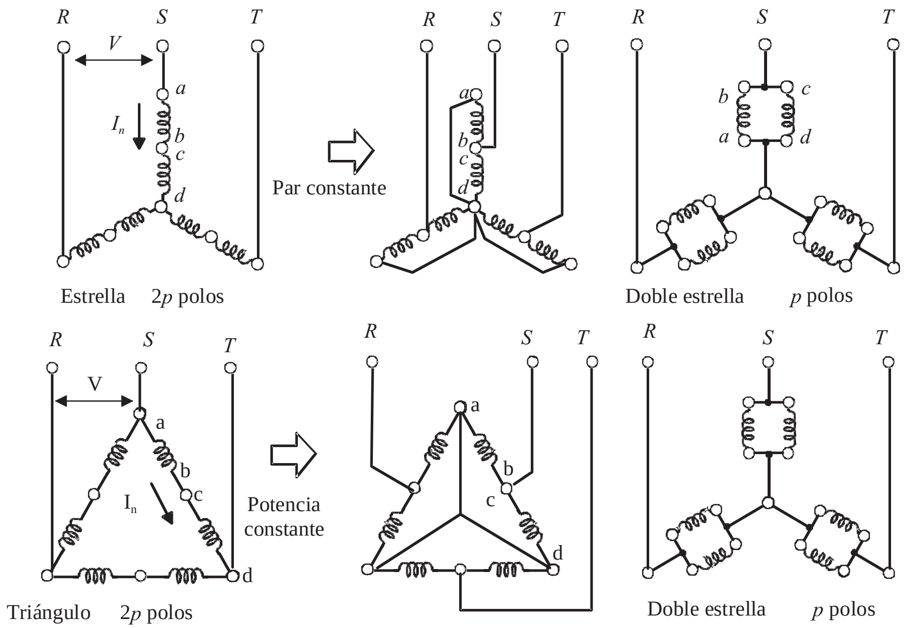


Figura 4.48. Conexión Dahlander. Cambios a par constante y a potencia constante.

y 1975, con un método denominado **modulación de la amplitud polar**, cuyo nombre se debe a la similitud con la modulación en amplitud con portadora suprimida utilizada en telecomunicación. La modulación de la onda de f.m.m. de un simple devanado de p pares de polos, da lugar a dos f.m.m.s superpuestas con un número de pares de polos $p_1 = p \pm k$, donde k es entero, y mediante una conexión adecuada de las bobinas de las tres fases se puede eliminar una u otra de las dos f.m.m.s. anteriores. Por ejemplo si se parte de un devanado preparado para formar 8 polos ($p = 4$) y $k = 1$, se puede conseguir una máquina con $p_1 = p \pm k = 4 \pm 1$, es decir de seis o diez polos. Para el lector interesado en este tema, se le remite a los artículos publicados por G.H. Rawcliffe mencionados en la bibliografía final de este capítulo.

4.11.2. Regulación por variación del deslizamiento

La variación en el deslizamiento puede realizarse controlando la tensión aplicada al motor, pero el procedimiento no es aconsejable porque de acuerdo con (4.70) resulta afectado el par, ya que éste varía con el cuadrado de la tensión. Se puede regular el deslizamiento también, variando la resistencia del rotor, como se ha indicado en el epígrafe anterior; el procedimiento, sin embargo, tiene grandes pérdidas debido al efecto Joule en el reóstato de regulación, que es similar al de arranque pero diseñado para trabajar en régimen continuo. Existen otros sistemas especiales como la conexión en cascada, Kramer, Scherbius, etc., que se basan en la regulación de la potencia de deslizamiento sP_a de la máquina. Hoy en día se han sustituido por sistemas electrónicos más o menos sofisticados, como se explica en el Capítulo 7.

4.11.3. Regulación por variación en la frecuencia

La variación de la frecuencia de alimentación puede realizarse por medio de convertidores de frecuencia rotativos (por ejemplo, un alternador movido por un mecanismo regulable,

cuya tensión generada se aplica al estátor del motor de inducción). Sin embargo, hoy día la conversión se realiza estáticamente por medio de SRC (rectificadores controlados de silicio o tiristores). Durante la regulación de la velocidad por medio de la frecuencia se debe mantener el flujo constante para que el par se conserve y la máquina disponga de una capacidad de sobrecarga suficiente; si se desprecian las caídas de tensión en el estátor, la condición anterior se satisface, de acuerdo con (4.8), si se mantiene constante la relación V_1/f_1, dando lugar a unas curvas $T = f(s)$ bastante rígidas en la zona de trabajo (véase Cap. 7).

Ejemplo de aplicación 4.14

Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes, de 8 polos, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros: $R_1 = R_2' = 1\ \Omega$; $X_{cc} = 5\ \Omega$. *El devanado del estátor está conectado en triángulo y el rotor en estrella. Al aplicar una tensión de 380 V al estátor, dejando los anillos en circuito abierto, se ha medido en el rotor una tensión de 219,4 V entre fases. El motor desarrolla el par de plena carga con los anillos en cortocircuito para un deslizamiento de 4 por 100. Calcular la velocidad a que girará la máquina si se introduce en el rotor una resistencia de 0,5 Ω/fase y se aplica el par de plena carga al árbol del motor. NOTA: La tensión aplicada al estátor es la misma en ambos casos.*

Solución

Del ensayo realizado con el rotor en circuito abierto puede obtenerse la relación de transformación de tensiones. Téngase en cuenta que el estátor, al estar conectado en triángulo, mide una tensión por fase igual a 380 V; en cambio en el rotor, al estar en estrella, se medirán: $219{,}4/\sqrt{3}$. En consecuencia, de acuerdo con (4.28), se cumplirá:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{380}{219{,}4\sqrt{3}} = 3 = \frac{K_1 N_1}{K_2 N_2} = m_v$$

que coincide con m_i al tener el rotor el mismo número de fases que el estátor.

De acuerdo con (4.76), el par de plena carga del motor será:

$$T_n = \frac{m_1 \dfrac{R_2'}{s} V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}\left[\left(R_1 + \dfrac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2\right]} = K \frac{R_2'/s}{\left[\left(R_1 + \dfrac{R_2'}{s}\right)^2 + X_{cc}^2\right]}$$

donde se ha llamado K a:

$$K = \frac{m_1 V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}}$$

al sustituir valores resulta:

$$T_n = K \frac{1}{0{,}04\left[\left(1 + \dfrac{1}{0{,}04}\right)^2 + 5^2\right]} = \frac{K}{28{,}04}$$

Cuando se introduce en el rotor una resistencia de 0,5 Ω/fase, es decir, una resistencia reducida igual a:

$$m_v m_i R_{a2} = 3^2 \cdot 0{,}5 = 4{,}5\ \Omega$$

la resistencia reducida total del circuito del rotor vale 1 + 4,5 = 5,5 Ω, y como quiera que en estas circunstancias la máquina desarrolla el mismo par, si se denomina s_2 al nuevo deslizamiento se cumplirá:

$$T_n = \frac{K}{28{,}04} = K\frac{5{,}5/s_2}{\left[\left(1+\frac{5{,}5}{s}\right)^2 + 5^2\right]} = \frac{K}{28{,}04}$$

de donde se obtiene:

$$s_2 = 0{,}22 \quad \text{o} \quad s_2 = 5{,}28$$

El primer valor es el que interesa, ya que corresponde al funcionamiento como motor. La segunda solución se refiere al trabajo como freno.

La velocidad correspondiente es: $n = n_1(1 - s) = \dfrac{60 \cdot 50}{4}(1 - 0{,}22) = 585$ r.p.m.

*4.12. DINÁMICA DEL MOTOR ASÍNCRONO

4.12.1. Generalidades

Cuando se examinan los regímenes transitorios en los accionamientos con motores asíncronos, se desprecia en primera aproximación los procesos electromagnéticos, ya que éstos se desarrollan más rápidamente que los procesos mecánicos.

Si se denomina T el par electromagnético producido por el motor, T_r al par resistente que ofrece la carga, J al momento polar de inercia de las masas giratorias (motor + carga) y Ω la velocidad angular de rotación, la dinámica del cuerpo en rotación nos ofrece la ecuación de equilibrio de momentos:

$$T - T_r = J\frac{d\Omega}{dt} \qquad [\text{N.m}] \tag{4.137}$$

que nos indica que el par de rotación desarrollado por el motor se equilibra con el par resistente y por el momento dinámico.

El momento de inercia del accionamiento se puede expresar así:

$$J = m\rho^2 = \frac{GD^2}{4g} \qquad [\text{kg} \cdot \text{m}^2] \qquad [4.138)$$

siendo ρ y D, respectivamente, el radio y el diámetro de inercia en metros, G el peso de las masas giratorias en newton, $g = 9{,}81$ m/s^2 la aceleración de la gravedad y m la masa giratoria en kg.

Sustituyendo en (4.137) J y Ω por $GD^2/4g$ y $2\pi n/60$ respectivamente, se obtiene la ecuación de la dinámica de rotación en una forma más conocida por el ingeniero:

$$T - T_r = \frac{GD^2}{4g}\frac{2\pi}{60}\frac{dn}{dt} = \frac{GD^2}{375}\frac{dn}{dt} \tag{4.139}$$

La magnitud GD^2 recibe el nombre de **momento giratorio**. Esta magnitud se incluye en los catálogos de los fabricantes de motores eléctricos con la denominación PD^2 (que la miden en kg · m^2). El valor de catálogo de GD^2 se deberá dividir por cuatro, para obtener J en unidades SI (kg · m^2). En lo que sigue trabajaremos con la ecuación (4.137), que es la equivalente a (4.139) pero en unidades internacionales SI.

Si se parte de (4.137) se observa que:

1. Cuando $T > T_r$, $\dfrac{d\Omega}{dt} > 0$; es decir, tiene lugar la aceleración del motor.

2. Cuando $T < T_r$, $\frac{d\Omega}{dt} < 0$; lo que indica que el motor sufre una deceleración.

3. Cuando $T = T_r$, $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, y en este caso el motor trabaja en régimen permanente en un estado de equilibrio.

Habitualmente un motor asíncrono pone en acción un mecanismo a través de un sistema de transmisión (caja de engranajes, convertidor de par). En este caso deberá reducirse el par resistente de un eje de rotación a otro, a base de aplicar el balance energético del sistema. En este caso, las pérdidas de la potencia en las transmisiones intermedias se toman en consideración, introduciendo en los cálculos el rendimiento respectivo (η). Si designamos con Ω_a la velocidad del árbol del motor y con Ω_b la velocidad del árbol donde se coloca el par resistente, se tendrá una igualdad de potencias:

$$\frac{T_b \cdot \Omega_b}{\eta} = T_a\Omega_a \tag{4.140}$$

donde T_b es el par resistente que ofrece la carga en el mecanismo de producción y $T_a = T_r$ es el mismo par resistente reducido al árbol del motor. De la ecuación anterior se deduce:

$$T_a = T_b \frac{\Omega_b}{\Omega_a}\frac{1}{\eta} = \frac{T_b\gamma}{\eta} \tag{4.141}$$

donde γ es la relación de velocidad de los engranajes Ω_b/Ω_a. Observará el lector una analogía de la ecuación anterior con el cambio de tensiones de un secundario a un primario en un transformador eléctrico (la relación de transformación es ahora la relación de velocidades).

De un modo análogo, la reducción de momentos de inercia (m.d.i.) a un eje de rotación está basada en el balance de energía cinética de los elementos que se mueven. Si se denomina, por ejemplo, J_m el m.d.i. del rotor del motor que se mueve a velocidad angular Ω_a y J_b el m.d.i. de la carga que se mueve a velocidad Ω_b, se cumplirá:

$$\frac{1}{2}J\Omega_a^2 = \frac{1}{2}J_m\Omega_a^2 + \frac{1}{2}J_2\Omega_b^2 \tag{4.142}$$

de donde se deduce que el m.d.i. reducido al árbol del motor será:

$$J = J_m + J_2\left(\frac{\Omega_b}{\Omega_a}\right)^2 = J_m + \gamma^2 J_2 \tag{4.143}$$

ecuación que es análoga a la reducción de impedancias de un transformador de secundario a primario:

4.12.2. Tiempo de arranque de un motor asíncrono

Si se desea calcular el tiempo que tarda un motor desde que se inicia el arranque hasta que alcanza la velocidad de régimen, la ecuación (4.137) nos dará:

$$T - T_r = J\frac{d\Omega}{dt} \tag{4.144}$$

si se denomina Ω_1 la velocidad de sincronismo del campo giratorio, medida en radianes mecánicos por segundo (y que en función de la velocidad n_1 en r.p.m. es igual a $2\pi n_1/60$), de una forma similar a (4.71) se podrá escribir:

$$\Omega = \Omega_1(1 - s) \tag{4.145}$$

que llevando a (4.144) nos da:

$$T - T_r = -J\Omega_1\frac{ds}{dt} \tag{4.146}$$

que al integrar nos da:

$$[t]_0^{t_A} = t_A = -J\Omega_1 \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{T - T_r}\, ds \tag{4.147}$$

Como quiera que el término $T - T_r$ es no lineal, la integración anterior debe realizarse por métodos numéricos; t_A indica el tiempo de aceleración, s_1 sería el deslizamiento en el momento del arranque ($s_1 = 0$) y s_2 el deslizamiento a plena carga ($s_2 = s_n$).

Si se considera que el motor arranca en vacío, es decir, sin mover ninguna carga ($T_r = 0$), y se prescinde de la impedancia del estátor del motor, el par desarrollado por éste en estas condiciones es, según (4.90):

$$T = T_{\text{máx}} \frac{2}{\dfrac{s}{s_m} + \dfrac{s_m}{s}} \tag{4.148}$$

que llevando a (4.147) nos da:

$$t_A = -\frac{J\Omega_1}{2T_{\text{máx}}} \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{s}{s_m} + \frac{s_m}{s} \right) ds \tag{4.149}$$

es decir:

$$t_A = -\frac{J\Omega_1}{2T_{\text{máx}}} \left[\frac{s_1^2 - s_2^2}{2s_m} + s_m \ln \frac{s_1}{s_2} \right] \tag{4.150}$$

y tomando $s_1 = 1$ y $s_2 = 0{,}05$, resulta:

$$t_A = \tau_{mec} \left[\frac{1}{4s_m} + 1{,}5s \right] \tag{4.151}$$

donde τ_{mec} vale:

$$\tau_{mec} = \frac{J\Omega_1}{T_{\text{máx}}} \tag{4.152}$$

que se denomina **constante de tiempo electromecánica** y representa en sí misma el tiempo necesario para que el rotor de inercia J se acelere hasta la velocidad de sincronismo Ω_1 bajo la acción del par máximo $T_{\text{máx}}$. Esta constante de tiempo varía entre 0,4 y 0,6 segundos para los motores de c.c. y motores síncronos de 6 polos. El tiempo de aceleración o de arranque (4.151) es mínimo cuando:

$$\frac{dt_A}{ds_m} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_m = 0{,}407 \tag{4.153}$$

que nos determina el valor del deslizamiento s_m para conseguir un tiempo de arranque mínimo. Como quiera que según (4.79) el valor de s_m es proporcional a la resistencia del rotor, modificando ésta (solamente se puede hacer en los motores con rotor devanado) se podrán minimizar los tiempos de arranque de estas máquinas.

4.12.3. Pérdidas de energía en régimen dinámico

Si se desprecian las pérdidas en el hierro y rozamientos en el motor asíncrono y se considera únicamente la rama serie del circuito equivalente, las pérdidas de energía al poner en marcha el motor serán únicamente las pérdidas en el cobre y de este modo se podrá escribir:

$$\Delta W_a = \int_0^{t_A} 3R_1 I_1^2\, dt + \int_0^{t_A} 3R_2' I_2'^2\, dt \tag{4.154}$$

donde ΔW_a expresa la energía disipada en el cobre en el proceso de arranque. Al despreciar la rama paralelo del circuito equivalente se cumplirá $I_1 = I'_2$ y por tanto (4.154) se transforma en:

$$\Delta W_a = \int_0^{t_A} 3(R_1 + R'_2) I'^2_2 \, dt \tag{4.155}$$

Si el motor arranca en vacío ($T_r = 0$) se tiene, de acuerdo con (4.146):

$$dt = -\frac{J\Omega_1}{T} ds \tag{4.156}$$

Como quiera además que según (4.68) y (4.73) se cumple:

$$P_{cu2} = sP_a \quad ; \quad P_a = T\Omega_1 \tag{4.157}$$

resulta:

$$3R'_2 I'^2_2 = T\Omega_1 s \tag{4.158}$$

que llevando a (4.155) nos da:

$$\Delta W_a = \int_0^{t_A} 3R'_2 I'^2_2 \left(1 + \frac{R_1}{R'_2}\right) dt = \int_0^{t_A} T\Omega_1 s \left(1 + \frac{R_1}{R'_2}\right) dt \tag{4.159}$$

y teniendo en cuenta (4.156):

$$\Delta W_a = \int_{s_f}^{s_i} J\Omega_1^2 \left(1 + \frac{R_1}{R'_2}\right) s \, dt \tag{4.160}$$

si se considera $s_i = 1$ y $s_f = 0$, resultará:

$$\Delta W_a = \frac{J\Omega_1^2}{2}\left(1 + \frac{R_1}{R'_2}\right) \qquad [\text{Julios}] \tag{4.161}$$

es decir:

$$\Delta W_a = \frac{J\Omega_1^2}{2} + \frac{J\Omega_1^2}{2}\frac{R_1}{R'_2} \tag{4.162}$$

El primer sumando de la ecuación anterior representa las pérdidas en el cobre del rotor, que coinciden con la energía cinética final almacenada en todas las partes rotativas. El segundo sumando representa las pérdidas en el cobre del estátor al poner en marcha el motor.

De un modo análogo se puede calcular la pérdida de energía durante el frenado a contracorriente. Si se parte de la ecuación (4.160) y se toman como límites de integración $s_i = 2$ y $s_f = 1$, resulta:

$$\Delta W_f = 3\frac{J\Omega_1^2}{2}\left[1 + \frac{R_1}{R'_2}\right] \tag{4.163}$$

que nos demuestra que el calor disipado en el rotor durante un proceso de frenado a contra corriente (desde la velocidad asignada a cero) es igual a **tres veces** la energía cinética original de todas las partes giratorias (supuesto $R_1 \approx 0$, lo que representa una aproximación aceptable para motores de tamaño medio-grande).

Observando las ecuaciones (4.162) y (4.163) se deduce que se pueden reducir las pérdidas de energía durante los regímenes transitorios de un motor asíncrono disminuyendo el momento de inercia del accionamiento eléctrico. Para ello es frecuente en la práctica colocar dos motores (en vez de uno solo) que tengan cada uno la mitad de la potencia total necesaria. Al hacer esta sustitución se disminuye el diámetro de los rotores de los motores y, pese al aumento del peso global de éstos, se reduce el momento de inercia total.

También pueden emplearse motores especiales con rotor alargado, que es una técnica muy utilizada en metalurgia (trenes de laminación). Los rotores de estos motores se hacen de menor diámetro que los ordinarios, lo que permite reducir su momento de inercia.

Un procedimiento moderno que reduce las pérdidas en el régimen de arranque de un motor asíncrono es alimentar la máquina con una tensión que se va elevando gradualmente. Con objeto de que no se produzcan reducciones en el par electromagnético desarrollado, la variación de tensión va acompañada de una variación de frecuencia proporcional (véase epígrafe 4.11.3).

En los motores de dos velocidades o conexión Dahlander (véase epígrafe 4.11.1) se pueden reducir las pérdidas de energía a la velocidad superior realizando un arranque por etapas. Por ejemplo, si es un motor de 1.500/3.000 r.p.m., se hace un arranque que siga el proceso 0-1.500-3.000 r.p.m. más que el directo 0-3.000 r.p.m.

Ejemplo de aplicación 4.15

Se dispone de un motor asíncrono trifásica de 2,5 kW, 50 Hz, con conexión Dahlander para 2 polos y 4 polos. El momento de inercia del rotor es $J = 0,25$ kg · m^2 y la resistencia el estátor R_1 es 1,5 veces la resistencia reducida del rotor R'_2. Calcular: 1) Pérdidas de energía producidas en el proceso de arranque según se efectúe éste en una o dos etapas; 2) Pérdidas de energía producidas en el frenado a contracorriente en una o dos etapas.

Solución

1. Las velocidades de sincronismo son:

$$n_1 = \frac{60\, f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1.500 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad n_2 = \frac{60 \cdot 50}{1} = 3.000 \text{ r.p.m.}$$

que corresponden a velocidades angulares: $\Omega_1 = 157$ rad/s; $\Omega_2 = 314$ rad/s.

Las pérdidas de energía en el arranque directo hasta la velocidad final Ω_2 es, según (4.161):

$$\Delta W_a = \frac{0,25 \cdot 314}{2}(1 + 1,5) = 30,81 \cdot 10^3 \text{ Julios} = 8,56 \cdot 10^{-3} \text{ kWh}$$

Si el arranque se realiza en dos etapas, se tendrá:

a) Arranque hasta la velocidad Ω_1:

$$\Delta W_{a1} = \frac{0,25 \cdot 157^2}{2} \cdot 2,5 = 7.703 \text{ Julios} = 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ kWh}$$

b) Paso de la velocidad Ω_1 a Ω_2:

$$\Delta W_{a2} = \frac{0,25(314 - 157)^2}{2} \cdot 2,5 = 7.703 \text{ Julios} = 2,14 \cdot 10^{-3} \text{ kWh}$$

que da lugar a un valor total:

$$\Delta W_{a1} + \Delta W_{a2} = 4{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ kWh}$$

que es la mitad de la energía perdida en el arranque realizado en una sola etapa.

2. De un modo análogo al anterior y aplicando (4.163) se obtiene:

Frenado en una sola etapa: $\Delta W_f = 25{,}68 \cdot 10^{-3}$ kWh
Frenado en dos etapas: $\Delta W_f = 12{,}84 \cdot 10^{-3}$ kWh

Ambas pérdidas son el triple que las producidas en el arranque. Se sigue cumpliendo que las pérdidas de energía en el frenado a contracorriente en dos etapas es la mitad que la producida en una sola etapa.

4.13. MOTOR DE INDUCCIÓN MONOFÁSICO

4.13.1. Principio de funcionamiento

Básicamente, un motor de inducción monofásico está formado por un rotor en jaula de ardilla análogo al de los motores trifásicos y un estátor en el que se dispone un devanado alimentado con c.a. monofásica. Normalmente se construyen con potencias inferiores a 1 CV y por ello reciben también el nombre de motores fraccionarios. El campo de aplicación está muy restringido y se limita en su mayoría a las instalaciones domésticas: lavadoras, ventiladores, tocadiscos, etc. En la Figura 4.49 se muestra el esquema de conexiones básico. Al introducir una corriente alterna en el devanado del estátor se produce una fuerza magnetomotriz en el entrehierro, distribuida de forma sinusodal en el espacio y de carácter pulsatorio, cuya expresión, de acuerdo con el epígrafe 2.8 del Capítulo 2 (expresión 2.48), es:

$$\mathcal{F}(\alpha, t) = F_m \cos \omega_1 t \cos p\alpha \tag{4.164}$$

La f.m.m. anterior produce un campo magnético proporcional en el entrehierro, el cual induce a su vez corrientes en el rotor, como si fuera el circuito secundario de un transformador, de tal forma que los pares de rotación originados por la acción recíproca de las intensidades de las dos mitades del arrollamiento del rotor con el campo inductor del estátor son

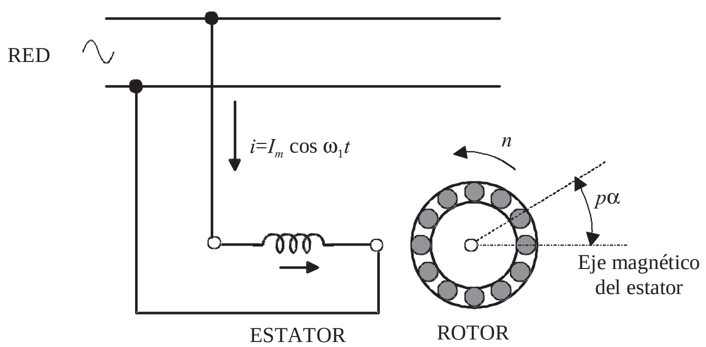


Figura 4.49. Motor asíncrono monofásico.

opuestas entre sí, y en consecuencia, el par resultante que actúa sobre el rotor en reposo es nulo. La ausencia de par inicial de arranque representa la particularidad característica del motor monofásico y por ello esta máquina **no puede arrancar por sí misma**. De acuerdo con el teorema de Leblanc (epígrafe 2.8.4), la f.m.m. alternativa (4.164) puede expresarse también como:

$$\mathscr{F}(\alpha, t) = \frac{1}{2} F_m \left[\cos(\omega_1 t + p\alpha) + \cos(\omega_1 t - p\alpha)\right] \qquad (4.166)$$

Cada campo giratorio dará lugar a una característica par-deslizamiento análoga a la mostrada en la Figura 4.22 para los motores trifásicos. Si el motor gira en el sentido del campo positivo directo (uno de ellos elegido arbitrariamente) a velocidad n, el deslizamiento de este campo s_d tendrá un valor:

$$s_d = s = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \qquad (4.167)$$

mientras que el deslizamiento correspondiente del campo inverso s_i será:

$$s_i = \frac{n_1 - (-n)}{n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \qquad (4.168)$$

expresión que relaciona los deslizamientos de ambos campos.

Las características $T = f(s)$ para cada uno de los sistemas giratorios y su resultante se muestran en la Figura 4.50. Debe observarse que el campo directo produce un par positivo, mientras que el campo inverso crea un par negativo. En el arranque, $s_d = s_i = 1$, se tiene un par nulo y en consecuencia, como ya se ha indicado, el motor no puede *despegar*; sin embargo, y como muestra la Figura 4.50, si por cualquier procedimiento se ayudara a girar el rotor en un sentido, aparecerá inmediatamente un par de arranque que si es superior al par resistente pondrá en funcionamiento la máquina.

Por ejemplo, si el motor llevara conectada una carga cuyo par resistente es del tipo ventilador, como muestra la Figura 4.50, y se moviera el rotor por un medio mecánico exterior de tal forma que se sobrepasara el punto A, en este momento, al ser el par motor superior al par

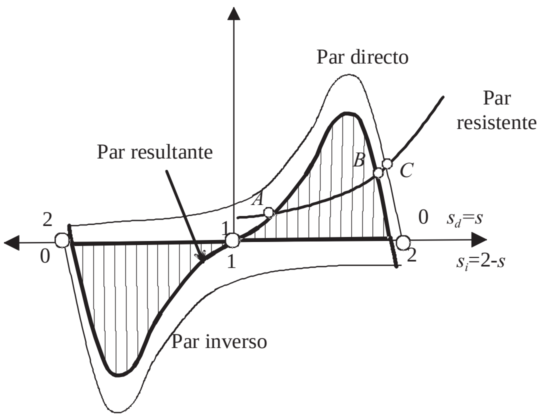


Figura 4.50. Curvas par-velocidad de un motor asíncrono monofásico.

resistente, la máquina se acelerará hasta obtener el régimen estable en el punto *B*. Se observa que la velocidad final que se obtiene es inferior a la que resultaría con un motor trifásico con idéntica curva (punto *C*), y de ahí que estos motores trabajen con un deslizamiento relativamente elevado.

Si en un motor trifásico se desconecta una fase, se tendría un funcionamiento análogo al descrito aquí, ya que la máquina trabajaría como motor monofásico. En estas condiciones no hay par de arranque; la potencia y el par máximo se reducen considerablemente, y si la carga actuara en el eje con el par nominal, se produciría un calentamiento excesivo en los devanados.

4.13.2. Circuito equivalente

Podemos obtener el circuito equivalente de un motor asíncrono monofásico teniendo en cuenta el ya conocido de un motor trifásico (Fig. 4.13*a*) y la teoría del doble campo giratorio desarrollada en el epígrafe anterior. Por razones didácticas se va a proceder a un desarrollo heurístico de tipo semicuantitativo evitando el empleo de las componentes simétricas trifásicas que en rigor se necesitan. De acuerdo con la teoría del doble campo giratorio, se puede considerar que el motor monofásico de la Figura 4.49 es equivalente a dos motores trifásicos iguales, cuyos rotores están situados en un mismo árbol (Fig. 4.51) y cuyos estátores están conectados en serie de tal modo que los campos magnéticos creados por ellos giran en el espacio en sentidos contrarios (véase en la Fig. 4.51 la inversión de una fase en el estátor del motor 2 respecto del 1).

Si se considera el rotor parado, el circuito equivalente del motor monofásico será el mostrado en la Figura 4.52*a* (se han considerado despreciables las pérdidas en el hierro). Este circuito no es más que el correspondiente al motor trifásico (Fig. 4.13*a*) para un deslizamien-

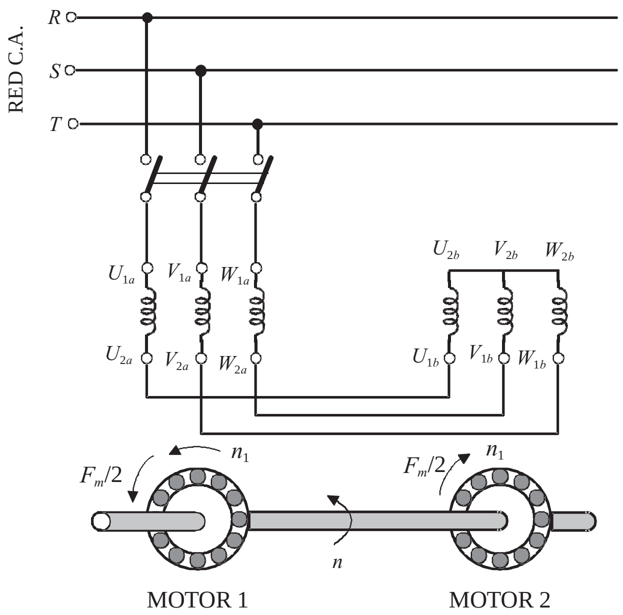


Figura 4.51. Equivalencia de un motor monofásico con dos trifásicos que giran en sentidos contrarios.

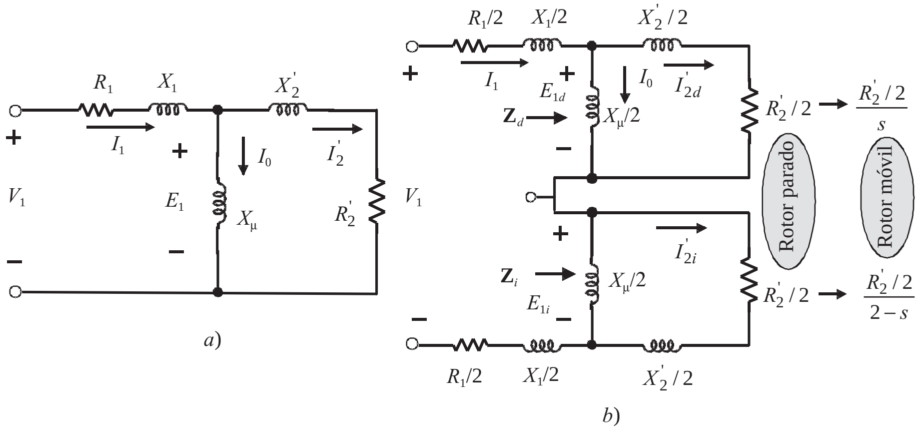


Figura 4.52. Desarrollo del circuito equivalente del motor asíncrono monofásico.

to nulo; E_1 representa la f.e.m. inducida en el devanado del estátor debida al campo alternativo existente en el entrehierro.

De acuerdo con el esquema de la Figura 4.51, el circuito equivalente de la Figura 4.52*a* se puede poner como se muestra en la Figura 4.52*b*, que consiste en dos mitades idénticas conectadas en serie, cada una correspondiente a cada campo giratorio. Se han denominado $\mathbf{E}_{1d}$ y $\mathbf{E}_{1i}$ las f.e.m.s. inducidas en el estátor debidas a cada campo; comparando ambas figuras resulta:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{1d} + \mathbf{E}_{1i} \tag{4.169}$$

Si el motor está parado ($n = 0$), los deslizamientos de la máquina respecto a cada campo giratorio serán iguales a la unidad, como así lo confirman las ecuaciones (4.167) y (4.168). En esta situación los circuitos equivalentes de los motores componentes que definen el motor monofásico serán idénticos. En definitiva, lo que sucede en la Figura 4.52 es que se cumple:

$$\mathbf{E}_{1d} = \mathbf{E}_{1i} = \frac{\mathbf{E}_1}{2} \tag{4.170}$$

Cuando el rotor gira a la velocidad n respecto al campo directo, los deslizamientos correspondientes serán, según (4.167) y (4.168):

$$s_d = s \quad ; \quad s_i = 2 - s \tag{4.171}$$

y de ahí que las resistencias rotóricas se modifiquen de un modo diferente para cada campo. En la Figura 4.52*b* se muestran a la derecha los nuevos valores de estas resistencias. En esta situación las impedancias Z_d y Z_i son desiguales, de hecho se tiene $Z_d \gg Z_i$, por lo que $E_{1d} \gg E_{1i}$ y el efecto sobre el motor es que el campo directo predomina sobre el campo inverso, lo que provoca un par electromagnético neto. En definitiva, lo que ocurre cuando gira el motor es que aumenta la amplitud del campo giratorio directo mientras que disminuye la amplitud del campo inverso.

Para que el motor monofásico pueda arrancar se necesita que los dos campos giratorios tengan diferentes amplitudes en condiciones estacionarias. Esto requiere, como se explicará en el epígrafe siguiente, que se incorpore un bobinado adicional al motor monofásico y que se denomina **devanado auxiliar**, que se sitúa a 90° eléctricos respecto al otro bobinado, deno-

minado **devanado principal** (se trata, en definitiva, de preparar un pseudomotor bifásico). El devanado auxiliar tiene menos espiras que el devanado principal y se construye con hilo más delgado. Este devanado auxiliar se desconecta de la red una vez que el motor ha comenzado a girar. En el epígrafe 4.13.3 se explicarán otros procedimientos adicionales para dotar al motor monofásico de una capacidad de autoarranque.

Con el circuito equivalente a rotor móvil del motor monofásico mostrado en la Figura 4.52*b* se puede hacer un análisis cuantitativo de esta máquina de un modo similar al que se utilizó en el análisis del motor trifásico. En el caso del motor monofásico se dispone de dos **resistencias de carga de campo directo e inverso**:

$$R'_{cd} = \frac{R'_2}{2}\left(\frac{1}{s} - 1\right) = \frac{R'_2}{2}\,\frac{1-s}{s} \quad ; \quad R'_{ci} = \frac{R'_2}{2}\left(\frac{1}{2-s} - 1\right) = -\frac{R'_2}{2}\,\frac{1-s}{2-s} \tag{4.172}$$

que dan lugar a las potencias mecánicas internas:

$$(P_{mi})_d = R'_{cd} I'^2_{2d} \quad ; \quad (P_{mi})_i = R'_{ci} I'^2_{2i} \tag{4.173}$$

lo que corresponde a una potencia mecánica total:

$$P_{mi} = (P_{mi})_d + (P_{mi})_i = \frac{R'_2}{2}(1-s)\left[\frac{I'^2_{2d}}{s} - \frac{I'^2_{2i}}{2-s}\right] \tag{4.174}$$

y se denomina $\Omega_1 = 2\pi n_1/60$ a la velocidad angular de sincronismo (medida en radianes mecánicos por segundo) el par neto en el eje, teniendo en cuenta (4.72) y (4.174), es igual a:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega_1(1-s)} = \frac{1}{\Omega_1}\cdot\frac{R'_2}{2}\left[\frac{I'^2_{2d}}{s} - \frac{I'^2_{2i}}{2-s}\right] \tag{4.175}$$

la potencia activa absorbida por el motor de la red será, según el circuito de la Figura 4.52*b*:

$$P_1 = V_1 I_1 \cos\varphi_1 \tag{4.176}$$

donde φ_1 indica el desfase entre la tensión aplicada V_1 y la corriente absorbida I_1. Por consiguiente, el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} \tag{4.177}$$

El lector puede obtener cualquier otra potencia analizando simplemente el circuito equivalente de la Figura 4.52*b*.

4.13.3. Arranque de los motores de inducción monofásicos

Hemos visto en la Figura 4.50 que el motor monofásico no tiene par de arranque y que por tanto no puede iniciar la marcha por sí mismo. Por otro lado, se advierte en la misma figura que si se acciona el rotor y se le impulsa en cualquier sentido, la máquina desarrolla entonces un par interno que acelera el rotor hasta conseguir la velocidad de régimen. Un procedimiento simple sería, si el motor trabajara en vacío, moverlo en cualquier sentido con un par motor exterior; esto se puede realizar en la práctica mediante una polea a la que se arrolla una cuerda, y al tirar de ésta se conseguirá el impulso inicial para que arranque la máquina; el sentido de giro dependerá del sentido de arrollamiento de la cuerda sobre la polea. En motores pequeños trabajando en vacío es suficiente, para arrancar el motor, mover el eje con los dedos

de una mano (mucho cuidado con esta operación). De cualquier modo, estos procedimientos mecánicos para conseguir el despegue de un motor monofásico no son prácticos y por consiguiente están desechados.

Afortunadamente, se puede conseguir el arranque de un motor monofásico por procedimientos eléctricos. La clave de la solución está en conseguir un campo giratorio único en el momento del arranque. Para ello, y de acuerdo con el teorema de Ferraris (véase epígrafe 2.8.3), el método más simple sería preparar un devanado bifásico. Un sistema bifásico consiste, como se muestra en la Figura 4.53, en dos devanados estatóricos desfasados 90° eléctricos en el espacio que llevan corrientes desfasadas 90° eléctricos en el tiempo. Si en el caso de la Figura 4.53 las corrientes son de la forma:

$$i_1 = \sqrt{2}I \cos \omega_1 t \quad ; \quad i_2 = \sqrt{2}I \cos(\omega_1 t - 90°) = \sqrt{2}I \operatorname{sen} \omega_1 t \tag{4.178}$$

se producirán en los ejes de las bobinas unas f.m.m.s.:

$$\mathscr{F}_1 = N_1 i_1 = F_m \cos \omega_1 t \quad ; \quad \mathscr{F}_2 = N_1 i_2 = F_m \operatorname{sen} \omega_1 t \tag{4.179}$$

donde por simplicidad se han considerado ambos devanados con el mismo número de espiras. La composición vectorial de ambas f.m.m.s. que se muestran en la Figura 4.53, nos indica que:

$$\mathscr{F}_T = \sqrt{\mathscr{F}_1^2 + \mathscr{F}_2^2} = F_m$$

$$\operatorname{tg}(p\alpha) = \frac{\mathscr{F}_2}{\mathscr{F}_1} = \operatorname{tg} \omega_1 t \;\Rightarrow\; p\alpha = \omega_1 t \;\Rightarrow\; \Omega_1 = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\omega_1}{p} \tag{4.180}$$

lo que corresponde a una f.m.m. resultante de amplitud constante F_m y que gira a la velocidad de sincronismo $\Omega_1 = \omega_1/p$, lo que está de acuerdo con la ecuación (2.75), que expresaba el teorema de Ferraris con un número de fases $m = 2$. Evidentemente, si se intercambian las alimentaciones de ambos devanados, se obtendrá un campo giratorio de sentido contrario al expresado antes.

Si las corrientes que alimentan los dos devanados del estátor (el rotor es siempre en jaula de ardilla) tienen amplitudes diferentes o si los bobinados tienen diferente número de espiras, se sigue obteniendo una f.m.m. giratoria, pero su amplitud va variando con la posición, ofreciendo un valor máximo en el eje de un devanado y un valor mínimo en el eje del otro. El lugar geométrico del afijo del vector (fasor espacial) de f.m.m. es una elipse con los semiejes correspondientes a $F_{máx}$ y $F_{mín}$ que resultan en los ejes de los devanados.

Si además las corrientes de los devanados tienen un desfase distinto a 90° eléctricos, el lugar geométrico de f.m.m. sigue siendo una elipse en la que los ejes principales no se corres-

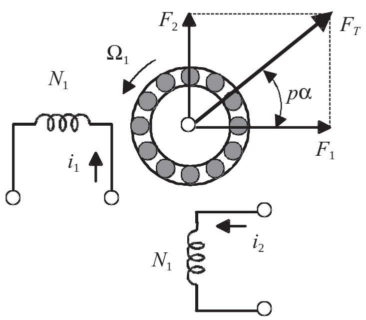


Figura 4.53. F.m.m.s. en un motor bifásico.

ponden con los ejes de las bobinas. Esta última combinación es la que generalmente se emplea en el arranque de los motores reales, debido a la dificultad en conseguir con una única red monofásica dos corrientes desfasadas 90° eléctricos, como así lo requiere el teorema de Ferraris.

Los procedimientos de arranque de los motores asíncronos monofásicos que constituyen los diversos tipos existentes en el mercado son: *a*) motores de fase partida; *b*) motores con condensador; *c*) motores con espira de sombra. Veamos una descripción de estas versiones:

a) Motor de fase partida

En este motor se sitúan en el estátor dos devanados desfasados 90° eléctricos en el espacio (Fig. 4.54). El primer devanado, denominado **principal**, cubre los 2/3 de las ranuras y tiene muchas espiras de hilo grueso por lo que ofrece una gran reactancia y baja resistencia y se conecta directamente a la red, mientras que el otro, denominado **auxiliar o de arranque**, cubre el resto del estátor y tiene pocas espiras de hilo delgado y ofrece por ello alta resistencia y baja reactancia, y se conecta en serie con un interruptor centrífugo situado en el eje del motor.

El diagrama fasorial de las corrientes que atraviesan los arrollamientos se muestra en la Figura 4.55*a*, donde se ha tomado la tensión de la red como referencia de fase. Se observa que el ángulo formado por V e I_p es superior al que existe entre V e I_a, en virtud de la mayor reactancia del devanado principal. En la práctica, el ángulo φ que forman las corrientes es próximo a los 30°, y como los arrollamientos están defasados 90° en el espacio, resulta un campo giratorio de naturaleza elíptica debido a que los módulos de I_a e I_p no son iguales y no forman entre sí 90°; este campo giratorio produce el despegue del motor, y cuando la velocidad del rotor alcanza un valor del orden de 70 por 100 del nominal, el interruptor centrífugo desconecta el devanado auxiliar, que al estar realizado con un hilo delgado no es capaz de soportar un funcionamiento continuo. De esta forma el motor queda funcionando como monofásico. En la Figura 4.55*b* se muestra la curva por velocidad de este motor, en la que se indica el instante (correspondiente a la velocidad n_i) en el que actúa el interruptor centrífugo y se desconecta el devanado auxiliar. Obsérvese que la curva par-velocidad cuando actúan los dos devanados es similar a la de un motor trifásico y produce un par de arranque, mientras que la curva correspondiente cuando funciona sólo el devanado principal tiene un par de arranque nulo. Este tipo de motores se utiliza en ventiladores, bombas centrífugas, lavadoras, etc. Se construyen generalmente desde potencia 50 W hasta 500 W.

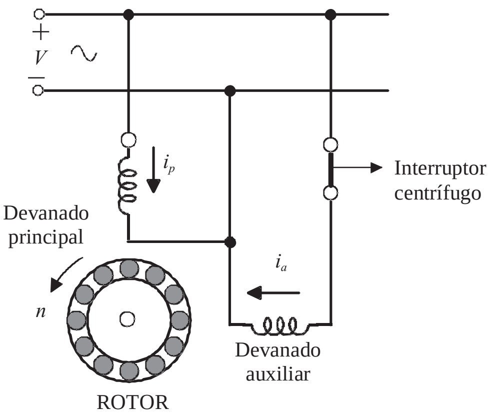


Figura 4.54. Motor de fase partida.

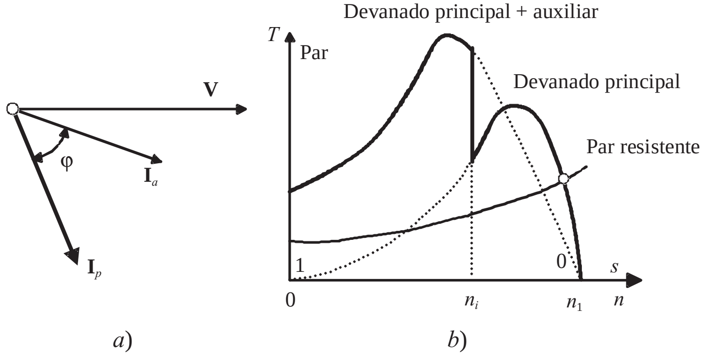


Figura 4.55. Diagrama fasorial y curva par-velocidad de un motor de fase partida.

b) Motor con arranque por condensador

Este tipo de motor (Figura 4.56), de forma análoga al caso anterior, está formado por un **devanado principal** que cubre los 2/3 de las ranuras y tiene muchas espiras de hilo grueso por lo que ofrece una gran reactancia y baja resistencia y se conecta directamente a la red, mientras que el **devanado auxiliar** cubre el resto del estátor y tiene pocas espiras de hilo delgado y ofrece por ello alta resistencia y baja reactancia, y se conecta en serie con un condensador de capacidad suficiente para adelantar la fase de su corriente casi 90° respecto a la correspondiente al devanado principal.

En la Figura 4.57*a* se muestra el diagrama fasorial de las corrientes, en el que se ha tomado la tensión de la red como referencia; se observa que la corriente del devanado principal se retrasa respecto a la tensión debido a su carácter inductivo, mientras que la corriente en el devanado auxiliar se adelanta respecto a la tensión debido a su carácter capacitivo.

En la Figura 4.57*b* se muestra la curva par-velocidad de este motor, que si se compara con la Figura 4.55*b* se desprende que el motor con condensador ofrece un par de arranque considerablemente mayor que en el caso del montaje con fase partida. Los condensadores emplea-

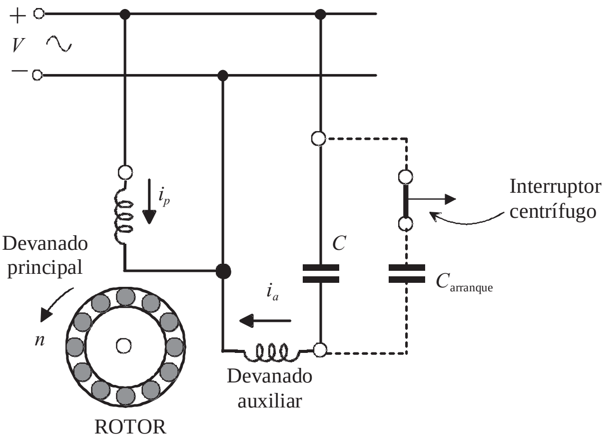


Figura 4.56. Motor monofásico de arranque por condensador.

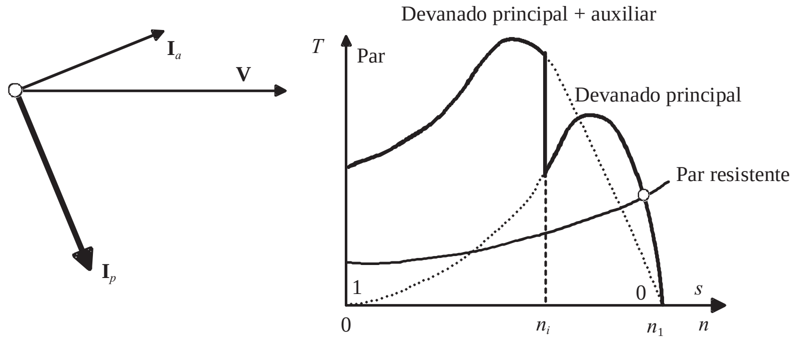


Figura 4.57. Diagrama fasorial y curva par-velocidad de un motor monofásico con condensador.

dos son del tipo electrolítico y permanecen conectados únicamente durante el período de arranque*. Una vez desconectado el condensador el motor queda funcionando como monofásico empleando el devanado principal.

A veces, con objeto de mejorar las características del par y el f.d.p. de la máquina, se emplean condensadores de papel impregnados con aceite que trabajan de forma continua, como se indica en la Figura 4.56. También se puede emplear una solución mixta, con un condensador electrolítico para el arranque y otro de papel para régimen continuo. Por ejemplo, un motor de 1/2 CV lleva un condensador electrolítico de 250 μF para el arranque y un condensador de papel impregnado de aceite de 115 μF para el régimen normal. Este tipo de motores se emplean en compresores, bombas, algunos tipos de máquinas herramienta, equipos de refrigeración y aire acondicionado, etc. Se construyen hasta potencias que llegan a 6 kW.

AMPLÍE SUS CONOCIMIENTOS

1. Funcionamiento de un motor trifásico en redes monofásicas

Un motor trifásico convencional se puede adaptar para trabajar en redes monofásicas empleando condensadores, es decir, funcionando como motor monofásico con condensador. En la Figura 4.58*a* se muestra el esquema correspondiente; una bobina se conecta directamente a la red, mientras que las otras dos bobinas se unen en serie a la red, pero previamente se conecta en paralelo un condensador con una de estas últimas; dependiendo con qué bobina esté conectado el condensador, el motor girará en un sentido o en el contrario tal como se señala en la Figura 4.58*a*. El motor trifásico en estas condiciones arranca por sí mismo con las mismas características que un motor monofásico normal. Se consigue con la disposición anterior que los flujos de ambos juegos de bobinas estén a 90° separados en el espacio, simulando la bobina V_1 y W_1 el devanado principal y la fase U_1 el devanado auxiliar. Utilizando un condensador adecuado se puede conseguir que la potencia del motor como monofásico pueda llegar al 80-90 por 100 de su valor asignado como trifásico. Para una red de 220 V se necesitan unos 70 μF por kilovatio de

* La técnica del condensador electrolítico se utiliza para conseguir altas capacidades, pero los condensadores de este tipo tienen una polaridad definida y por ello su uso está limitado a la corriente continua. En el caso que nos ocupa, al trabajar con c.a. deben funcionar durante el breve tiempo del período de arranque.

potencia útil del motor (Norma UNE 48501). El condensador debe preverse para una tensión alrededor de 1,25 veces la de red, debido a los efectos de sobretensiones a que suele estar sometido como consecuencia de los fenómenos de resonancia.

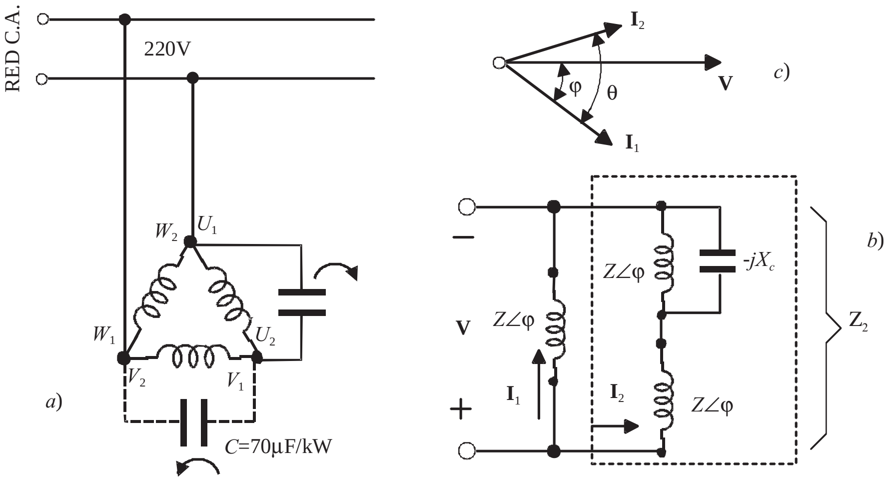


Figura 4.58. Adaptación de un motor trifásico para trabajar como monofásico.

Explicación técnica: En la Figura 4.58*b* se muestra el esquema eléctrico equivalente de la Figura 4.58*a*, donde se ha denominado $Z \angle \varphi$ a la impedancia de cada una de las bobinas del motor. La rama 1 tiene una impedancia $\mathbf{Z}_1 = Z \angle \varphi$, mientras que la impedancia de la rama 2 vale:

$$\mathbf{Z}_2 = Z \angle \varphi + \frac{Z \angle \varphi (-jX_c)}{Z \angle \varphi - jX_c} = Z \angle \varphi \left[1 - \frac{jX_c}{Z \angle \varphi - jX_c} \right] =$$

$$= Z \angle \varphi \frac{Z \angle \varphi - j2X_c}{Z \angle \varphi - jX_c} = Z_2 \angle \varphi - \theta \qquad (a)$$

de este modo las corrientes de las ramas son:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{V}{Z \angle \varphi} \quad ; \quad \mathbf{I}_2 = \frac{V}{Z_2 \angle \varphi - \theta}$$

y cuyo diagrama fasorial se muestra en la Figura 4.58*c*. Se observa que las corrientes están desfasadas entre sí θ grados. El objetivo a conseguir es encontrar el valor de la reactancia X_c (en definitiva, de la capacidad C del condensador) que haga máximo el ángulo θ. De la ecuación (*a*) se deduce:

$$\theta = \text{arctg} \frac{Z \text{ sen } \varphi - X_c}{Z \cos \varphi} - \text{arctg} \frac{Z \text{ sen } \varphi - 2X_c}{Z \cos \varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \beta - \alpha \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{ZX_c \cos \varphi}{Z^2 - 3ZX_c \text{ sen } \varphi + 2X_c^2} \qquad (b)$$

el ángulo θ será máximo si su tangente también es máxima; por consiguiente, derivando la última ecuación anterior respecto de X_c e igualando esta derivada a cero se obtiene el valor de X_c que cumple este objetivo, y que resulta ser:

$$X_c = \frac{Z}{\sqrt{2}} \qquad (c)$$

Si se considera un motor trifásico de 1 kW, V_{fase} = 220 V, η = 0,71; cos φ = 0,7 (es decir φ = 45,57°), la corriente que consume es:

$$I = \frac{P}{\eta 3V \cos\varphi} = \frac{1.000}{0{,}71 \cdot 3 \cdot 220 \cdot 0{,}7} = 3{,}05 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = 3{,}05 \angle -45{,}57°$$

por consiguiente, la impedancia del motor será:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{220}{3{,}05 \angle -45{,}57°} = 72{,}16 \angle 45{,}57°$$

y la reactancia capacitiva que se requiere de acuerdo con (c) es: $X_c \approx$ 51 ohmios, que corresponde a una capacidad:

$$X_c = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{X_c\omega} = \frac{1}{X_c 2\pi f} = \frac{1}{51 \cdot 2\pi \cdot 50} = 62{,}4\ \mu\text{F}$$

como quiera que el motor era de 1 kW, significa que la capacidad necesaria es del orden de 60 a 70 μF/kW, que es el valor que señala la Norma UNE. El lector puede comprobar, sustituyendo (c) en (b), que el valor de la tg θ es:

$$\text{tg } \theta = \frac{\cos\varphi}{2\sqrt{2} - 3 \text{ sen } \varphi}$$

que en el caso que nos ocupa da lugar a un ángulo $\theta \approx 45°$. Es difícil conseguir ángulos más elevados; sin embargo, es suficiente para un funcionamiento correcto tanto del motor trifásico como monofásico.

2. Motor de lavado y de centrifugado en una lavadora doméstica

Una lavadora doméstica dispone de un motor monofásico con condensador que se utiliza para el movimiento del tambor durante el lavado y el centrifugado. El estátor de este motor dispone de dos juegos de devanados con dos bobinas cada uno, y estas últimas están desfasadas entre sí 90° eléctricos, siendo el rotor de jaula de ardilla. Es decir el motor de la lavadora equivale, por los dos juegos de devanados que tiene en el estátor, a dos motores distintos pero montados en una misma estructura de máquina, por ello tiene un tamaño grande para la potencia mecánica que desarrolla. Como motor de centrifugado el primer juego de bobinas está preparado para dos polos, y tiene una potencia mecánica del orden de 120W, absorbe una potencia eléctrica de unos 450W y la velocidad es del orden de 2.700 r.p.m. (deslizamiento del 10 por 100). La bobina principal se conecta directamente a la red y la auxiliar va en serie con un condensador de 14μF y su sentido de giro es fijo. Como motor de lavado se utiliza el segundo juego de bobinas que está devanado para formar 12 polos y desarrolla una potencia mecánica cercana a los 100W, absorbiendo en estas condiciones una potencia eléctrica de la red de unos 250W, a una velocidad cercana a las 400 r.p.m. (deslizamiento del 20 por 100). Como quiera que en la etapa de lavado, el motor debe girar alternativamente en ambos sentidos, el condensador existente de 14μF se va conmutando de una bobina a la otra de este devanado para invertir de este modo el movimiento. Las conmutaciones necesarias para poder insertar el condensador en una u otra bobina (y en el devanado auxiliar en el caso de funcionamiento en régimen de centrifugado) se realizan a través de un mecanismo programador.

c) Motor con espira de sombra

Constituye el modelo más sencillo y corresponde al tipo de motor monofásico más pequeño. Está formado por un estátor de polos salientes (Fig. 4.59*a*) que dispone de un devanado concentrado alimentado por una red monofásica y un rotor en forma de jaula de ardilla.

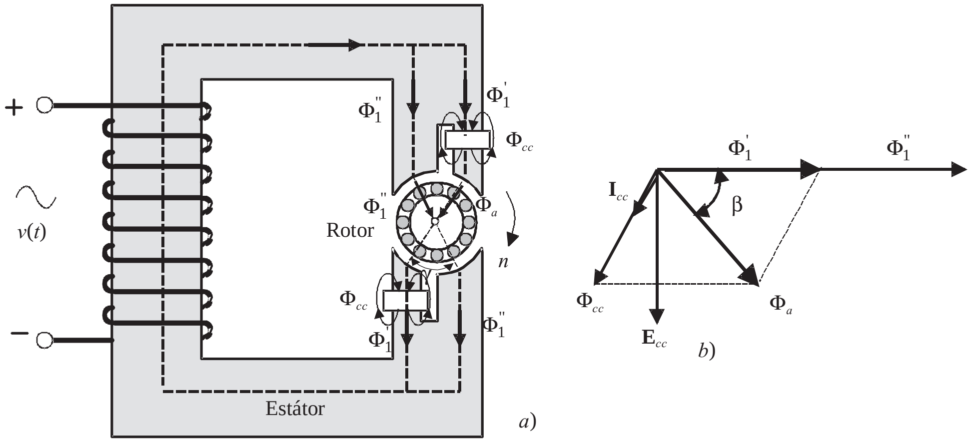


Figura 4.59. Motor con espira de sombra y diagrama fasorial de flujos y corrientes.

Alrededor de cada polo y abrazando parte del mismo se coloca una espira de sombra; parte del flujo principal del estátor, Φ_1', atraviesa esta espira, induciendo una f.e.m. E_{cc} que a su vez produce una corriente I_{cc} en retraso (por presentar una pequeña reactancia), que da lugar a un flujo Φ_{cc} que sumado vectorialmente con Φ_1' (Fig. 4.59*b*) da como resultado un flujo auxiliar Φ_a desfasado β grados en el tiempo, respecto al flujo Φ_1'' que atraviesa la otra parte del polo. Ambos flujos Φ_a y Φ_1'' se encuentran desplazados también en el espacio un ángulo γ; en consecuencia se produce un campo giratorio (*de naturaleza elíptica*) que se dirige hacia la espira de sombra, dando origen a un par en el eje. El sentido de giro de estos motores es único y es el que resulta de ir desde el eje de un polo hacia el eje de la espira de sombra colocada en él (véase Figura 4.59*a*). Debido a la pequeña magnitud de este par, las aplicaciones de este motor son muy limitadas: ventiladores de uso doméstico, equipos de aire acondicionado, tocadiscos, máquinas fotocopiadoras, proyectores de diapositivas, bombas de desagüe de lavadoras y lavavajillas, etc. Se fabrican con potencias que llegan hasta 1/20 kW.

Ejemplo de aplicación 4.16

Un motor asíncrono monofásico de 1.800 W, 220 V, 50 Hz, 4 polos, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = 3\ \Omega$; $X_1 = 5\ \Omega$; $R_2' = 1{,}5\ \Omega$; $X_2' = 2\ \Omega$; $X_\mu = 100\ \Omega$; se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas. Si el motor se conecta a una red de 220 V, 50 Hz y trabaja con un deslizamiento del 5 por 100, calcular: 1) corriente absorbida por el motor y su factor de potencia; 2) potencia mecánica desarrollada; 3) par en el eje; 4) rendimiento.

Solución

1. El circuito equivalente del motor es el mostrado en la Figura 4.52, en el que los valores de las resistencias totales del rotor (propia + carga) para cada campo son:

$$\frac{R_2'}{2s} = \frac{1{,}5}{2 \cdot 0{,}05} = 15\ \Omega \quad ; \quad \frac{R_2'}{2(2-s)} = \frac{1{,}5}{2(2-0{,}05)} = 0{,}385\ \Omega$$

de este modo las impedancias Z_d y Z_i son, respectivamente (el símbolo ∥ significa conexión en paralelo):

$$\mathbf{Z}_d = j\frac{X_\mu}{2} \parallel \left(\frac{R_2'}{2s} + j\frac{X_2'}{2}\right) = \frac{j\,50(15 + j\,1)}{15 + j\,51} = 14{,}14 \angle 20{,}21° \;\Omega$$

$$\mathbf{Z}_i = j\frac{X_\mu}{2} \parallel \left(\frac{R_2'}{2(2 - s)} + j\frac{X_2'}{2}\right) = \frac{j\,50(0{,}385 + j\,1)}{0{,}385 + j\,51} = 1{,}05 \angle 69{,}37° \;\Omega$$

si se toma la tensión como referencia, la corriente absorbida por el motor será:

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}_1}{R_1 + j\,X_1 + \mathbf{Z}_d + \mathbf{Z}_i} =$$

$$= \frac{220 \angle 0°}{3 + j\,5 + 14{,}14 \angle 20{,}21° + 1{,}05 \angle 69{,}37°} = 11{,}07 \angle -33{,}13° \text{ A}$$

y por tanto, el motor absorbe una corriente de 11,07 A con un f.d.p. de cos 33,13° = 0,837.

2. Por la regla del divisor de corriente, se obtienen las intensidades $\mathbf{I}_{2d}'$ e $\mathbf{I}_{2i}'$:

$$\mathbf{I}_{2d}' = 11{,}7 \angle -33{,}13° \frac{j\,50}{15 + j\,51} = 10{,}41 \angle -16{,}73°$$

$$\mathbf{I}_{2i}' = 11{,}07 \angle -33{,}13° \frac{j\,50}{0{,}385 + j\,51} = 10{,}85 \angle -32{,}7°$$

por consiguiente, de acuerdo con (4.174) se obtiene una potencia mecánica interna total:

$$P_{mi} = 1.544{,}24 - 43{,}01 = 1.501{,}23 \text{ W}$$

La potencia de 1.544,24 W indica la potencia mecánica producida por el campo directo, mientras que la de 43,01 W representa la potencia debida al campo inverso. De este modo el campo directo produce un 102,9 por 100 de la potencia total, mientras que el campo inverso contribuye al −2,9 por 100 de la potencia total desarrollada por el motor.

3. La velocidad de sincronismo es según (4.166) igual a 1.500 r.p.m., que corresponde a una velocidad mecánica según (4.71) de 1.425 r.p.m., lo que indica un par en el eje de acuerdo con (4.175) de:

$$T = \frac{1.501{,}33}{2\pi \dfrac{1.425}{60}} = 10{,}06 \text{ N.m}$$

4. La potencia eléctrica absorbida por el motor de la red será, de acuerdo con (4.176):

$$P_1 = 220 \cdot 11{,}07 \cdot 0{,}837 = 2.038{,}3 \text{ W}$$

lo que da lugar a un rendimiento, según (4.177):

$$\eta = \frac{1.501{,}23}{2.038{,}43} = 73{,}65\,\%$$

que es claramente inferior al que poseen los motores trifásicos. En la práctica el rendimiento de los motores monofásicos oscila entre el 60 y el 80 por 100.

* 4.14. FUNCIONAMIENTO DEL MOTOR ASÍNCRONO TRIFÁSICO ALIMENTADO CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS

Cuando se alimenta un motor asíncrono trifásico con tensiones desequilibradas, el estudio de su comportamiento requiere el empleo de las componentes simétricas. Si las tensiones simples aplicadas al motor son: $\mathbf{V}_{RN}$, $\mathbf{V}_{SN}$ y $\mathbf{V}_{TN}$, la teoría de las componentes simétricas permite expresar las tensiones anteriores como suma de tres juegos de tensiones trifásicas simétricas, el primero de ellos se denomina *sistema directo o de secuencia positiva*, formado por las tres tensiones:

$$\mathbf{V}_{RNd}\,,\ \mathbf{V}_{SNd} = \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{RNd}\,,\ \mathbf{V}_{TNd} = \mathbf{a}\mathbf{V}_{RNd} \tag{4.181}$$

donde **a** es el vector complejo: $\mathbf{a} = 1 \angle 120°$ y por tanto $\mathbf{a}^2 = 1 \angle -120°$. El segundo juego de tensiones se denomina *sistema inverso o de secuencia negativa*, formado por las tres tensiones:

$$\mathbf{V}_{RNi}\,,\ \mathbf{V}_{SNi} = \mathbf{a}\mathbf{V}_{RNi}\,,\ \mathbf{V}_{TNi} = \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{RNi} \tag{4.182}$$

y el tercer juego de tensiones se denomina *sistema homopolar o de secuencia cero*, formado por las tres tensiones iguales en módulo y fase siguientes:

$$\mathbf{V}_{RN0}\,,\ \mathbf{V}_{SN0} = \mathbf{V}_{RN0}\,,\ \mathbf{V}_{TN0} = \mathbf{V}_{RN0} \tag{4.183}$$

Al igualar las tensiones de cada fase con la suma de las respectivas componentes simétricas se obtiene:

$$\mathbf{V}_{RN} = \mathbf{V}_{RNd} + \mathbf{V}_{RNi} + \mathbf{V}_{RN0} \quad ; \quad \mathbf{V}_{SN} = \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{RNd} + \mathbf{a}\mathbf{V}_{RNi} + \mathbf{V}_{RN0}$$
$$\mathbf{V}_{TN} = \mathbf{a}\mathbf{V}_{RNd} + \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{RNi} + \mathbf{V}_{RN0} \tag{4.184}$$

Estas ecuaciones (4.184) permiten calcular las tensiones desequilibradas: $\mathbf{V}_{RN}$, $\mathbf{V}_{SN}$ y $\mathbf{V}_{TN}$ aplicadas al motor si se conocen los valores de las componentes directa, inversa y homopolar: $\mathbf{V}_{RNd}$, $\mathbf{V}_{RNi}$ y $\mathbf{V}_{RN0}$.

A partir de (4.184) se pueden obtener las relaciones inversas, es decir, los valores de las componentes simétricas a que da lugar el sistema trifásico desequilibrado original, y que son:

$$\mathbf{V}_{RNd} = \mathbf{V}_{1d} = \frac{\mathbf{V}_{RN} + \mathbf{a}\mathbf{V}_{SN} + \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{TN}}{3} \quad ; \quad \mathbf{V}_{RNi} = \mathbf{V}_{1i} = \frac{\mathbf{V}_{RN} + \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{SN} + \mathbf{a}\mathbf{V}_{TN}}{3}$$
$$\mathbf{V}_{RN0} = \mathbf{V}_{10} = \frac{\mathbf{V}_{RN} + \mathbf{V}_{SN} + \mathbf{V}_{TN}}{3} \tag{4.185}$$

Al conectar el motor a la red, las tensiones de secuencia directa darán lugar a la circulación de corrientes de secuencia directa, y de un modo análogo, las tensiones de secuencia inversa y homopolar producirán corrientes de secuencia inversa y homopolar, respectivamente. Las tres corrientes homopolares son por definición iguales en módulo y fase, por lo que su suma no puede ser cero y en el caso de que existiese hilo neutro retornaría esta suma por él; sin embargo, si la conexión del motor es a tres hilos, en estrella o triángulo (como es lo frecuente), no existirá camino de retorno, por lo que las corrientes homopolares serán siempre nulas. De este modo solamente circularán por el motor corrientes de secuencia directa e inversa. Como quiera que el estudio de un motor trifásico equilibrado alimentado por tensiones simétricas se puede resolver a partir de su modelo monofásico equivalente, deberán desarrollarse los circuitos equivalentes del motor por fase para las tensiones de secuencia directa e inversa. Las corrientes de secuencia directa tenderán a mover el rotor de la máquina en sentido directo o positivo, mientras que las corrientes de secuencia inversa tenderán a mover el rotor en sentido negativo.

Si la velocidad de sincronismo del motor es n_1 y el motor gira en el sentido del campo positivo o directo a velocidad n, el deslizamiento de este campo s_d tendrá un valor:

$$s_d = s = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \tag{4.186}$$

En la Figura 4.60*a* se muestra el circuito equivalente por fase del motor para el sistema de secuencia directa de tensiones, que coincide con el esquema clásico (se ha supuesto que se desprecian las pérdidas en el hierro del motor). En la Figura 4.60*b* se ha representado el circuito equivalente por fase para el sistema inverso de tensiones. Téngase en cuenta para deducir este esquema que el deslizamiento correspondiente del campo inverso s_i en función del deslizamiento del campo directo es igual a:

$$s_i = \frac{n_1 - (-n)}{n_1} = 1 + \frac{n}{n_1} = 2 - s \tag{4.187}$$

por lo que las resistencias de carga correspondiente a cada circuito son, respectivamente:

$$R'_{cd} = R'_2 \left(\frac{1}{s} - 1\right) = R'_2 \frac{1-s}{s} \quad ; \quad R'_{ci} = R'_2 \left(\frac{1}{2-s} - 1\right) = -R'_2 \frac{1-s}{2-s} \tag{4.188}$$

Es decir, la resistencia de carga del circuito equivalente para las tensiones inversas es negativa, lo que era de esperar, ya que la potencia mecánica desarrollada es de sentido contrario a la del campo directo.

A partir de los circuitos equivalentes anteriores se pueden calcular todas las magnitudes eléctricas y mecánicas del motor para ver su comportamiento. Por ejemplo, la corriente de secuencia directa $\mathbf{I}_{1d}$ en la fase principal del estátor (fase R) se puede calcular con el circuito equivalente de la Figura 4.60*a*, dando lugar a:

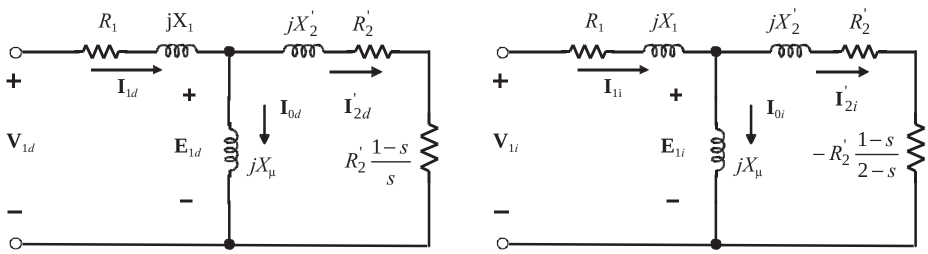
$$\mathrm{I}_{1d} = \frac{\mathbf{V}_{1d}}{\mathbf{Z}_{1d}} \quad ; \quad \text{donde } \mathbf{Z}_{1d} = (R_1 + jX_1) + \cfrac{1}{\cfrac{1}{jX_\mu} + \cfrac{1}{jX'_2 + \cfrac{R'_2}{s}}} \tag{4.189}$$

de un modo similar, la corriente de secuencia inversa $\mathbf{I}_{1i}$ en la fase principal del estátor (fase R) se obtiene del circuito de la Figura 4.60*b*, y su valor es:

$$\mathbf{I}_{1i} = \frac{\mathbf{V}_{1i}}{\mathbf{Z}_{1i}} \quad ; \quad \text{donde } \mathbf{Z}_{1i} = (R_1 + jX_1) + \cfrac{1}{\cfrac{1}{jX_\mu} + \cfrac{1}{jX'_2 + \cfrac{R'_2}{2-s}}} \tag{4.190}$$

A partir de las corrientes anteriores es inmediato calcular las intensidades reducidas del rotor para cada uno de los circuitos de la Figura 4.60 y representadas por $\mathbf{I}'_{2d}$ e $\mathbf{I}'_{2i}$, y cuyos valores son:

$$\mathbf{I}'_{2d} = \mathbf{I}_{1d} \frac{jX_\mu}{\frac{R'_2}{s} + j(X'_2 + X_\mu)} \quad ; \quad \mathbf{I}'_{2i} = \mathbf{I}_{1i} \frac{jX_\mu}{\frac{R'_2}{2-s} + j(X'_2 + X_\mu)} \tag{4.191}$$



a) Circuito equivalente con secuencia directa *b*) Circuito equivalente con secuencia inversa

Figura 4.60. Circuitos equivalentes directo e inverso.

Por consiguiente, las potencias mecánicas internas desarrolladas por el motor a las diferentes secuencias son:

$$(P_{mi})_d = 3R'_{cd}I'^2_{2d} \quad ; \quad (P_{mi})_i = 3R'_{ci}I'^2_{2i} \tag{4.192}$$

lo que corresponde a una potencia mecánica total:

$$P_{mi} = (P_{mi})_d + (P_{mi})_i = 3R'_2\,(1-s)\left[\frac{I'^2_{2d}}{s} - \frac{I'^2_{2i}}{2-s}\right] \tag{4.193}$$

y a un par neto en el eje:

$$T = \frac{P_{mi}}{\Omega_1(1-s)} = \frac{3}{\Omega_1}\cdot R'_2\left[\frac{I'^2_{2d}}{s} - \frac{I'^2_{2i}}{2-s}\right] \tag{4.194}$$

Las potencias activas absorbidas por el motor de la red a las dos secuencias se pueden calcular sumando a cada potencia mecánica las pérdidas respectivas en el cobre de los devanados del estátor y el rotor, lo que da lugar a:

$$P_{1d} = 3R'_{cd}I'^2_{2d} + 3R'_2I'^2_{2d} + 3R_1I^2_{1d} \quad ; \quad P_{1i} = 3R'_{ci}I'^2_{2i} + 3R'_2I'^2_{2i} + 3R_1I^2_{1i} \tag{4.195}$$

en consecuencia, la potencia eléctrica total activa absorbida por el motor de la red será:

$$P_1 = P_{1d} + P_{1i} \tag{4.196}$$

lo que indica un valor del rendimiento del motor:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} \tag{4.197}$$

Para estudiar el funcionamiento de un motor trifásico alimentado con tensiones desequilibradas es interesante partir de las componentes directa e inversa de las tensiones de fase. El grado de desequilibrio de estas tensiones se puede cuantificar mediante el cociente modular:

$$\gamma = \frac{V_{1i}}{V_{1d}} \tag{4.198}$$

que se mide en tanto por ciento. De este modo, fijando el valor de la tensión directa V_{1d} en la asignada de la máquina y variando el valor del parámetro γ se va cambiando la tensión V_{1i}, lo que permite ver su influencia en el funcionamiento del motor. El análisis se simplifica tomando la fase de la tensión directa como referencia y eligiendo la fase de la tensión inversa adelantada 60° respecto de la anterior, ya que de este modo se hacen iguales dos de las tensiones de alimentación.

Una vez calculadas las corrientes de secuencia directa e inversa, deberán evaluarse las corrientes reales en cada una de las fases de entrada mediante las ecuaciones (4.184) pero aplicadas a corrientes. Con objeto de deducir consecuencias prácticas se va a considerar la resolución de un ejemplo concreto.

Ejemplo de aplicación 4.17

Supóngase un motor asíncrono trifásico de 30 kW conectado en estrella a una red de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz, 4 polos. Se conoce de los datos del fabricante los siguientes valores:

$$R_1 = R'_2 = 0{,}04\ \Omega;\ X_1 = X'_2 = 0{,}3\ \Omega;\ X_\mu = 10\ \Omega$$

Se desprecian las pérdidas en el hierro y mecánicas. Se supone asimismo que el deslizamiento a plena carga del motor es s = 0,01. Si las tensiones directa e inversa aplicadas al motor por fase son:

$$\mathbf{V}_{1d} = \frac{380}{\sqrt{3}}\angle 0° \quad ; \quad \mathbf{V}_{1i} = \frac{19}{\sqrt{3}}\angle 60°$$

Calcular: a) tensiones simples aplicadas en la red de alimentación; b) tensiones de línea en la red; c) corrientes directa e inversa absorbidas de la red para la fase de referencia; d) corrientes reales en las diversas fases de la red; e) potencia mecánica desarrollada por el motor a las dos secuencias y potencia mecánica total; f) pares directo, inverso y total en el eje; g) pérdidas en el cobre para ambas secuencias; h) potencias eléctricas absorbidas de la red para ambas secuencias y total del motor; i) rendimiento del motor.

Solución

a) El grado de desequilibrio de tensiones es $\gamma = \dfrac{V_{1i}}{V_{1d}} = \dfrac{19}{380} = 5\,\%$ y, de acuerdo con (4.184), las tensiones simples de la red son:

$$\mathbf{V}_{RN} = \mathbf{V}_{RNd} + \mathbf{V}_{RNi} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 0° + \frac{19}{\sqrt{3}} \angle 60° = 225{,}08 \angle 2{,}42°$$

$$\mathbf{V}_{SN} = \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{RNd} + \mathbf{a}\mathbf{V}_{RNi} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle -120° + \frac{19}{\sqrt{3}} \angle 180° = 225{,}08 \angle -122{,}42°$$

$$\mathbf{V}_{TN} = \mathbf{a}\mathbf{V}_{RNd} + \mathbf{a}^2\mathbf{V}_{RNi} = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 120° + \frac{19}{\sqrt{3}} \angle -60° = 208{,}42 \angle 120°$$

b) Las tensiones de línea aplicadas al motor serán:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{RS}} = \mathbf{V}_{\mathrm{RN}} - \mathbf{V}_{\mathrm{SN}} = 225{,}08 \angle 2{,}42° - 225{,}08 \angle -122{,}42° = 399 \angle 30°$$
$$\mathbf{V}_{\mathrm{ST}} = \mathbf{V}_{\mathrm{SN}} - \mathbf{V}_{\mathrm{TN}} = 225{,}08 \angle -122{,}42° - 208{,}42 \angle 120° = 370{,}87 \angle -92{,}54°$$
$$\mathbf{V}_{\mathrm{TR}} = \mathbf{V}_{\mathrm{TN}} - \mathbf{V}_{\mathrm{RN}} = 208{,}42 \angle 120° - 225{,}08 \angle 2{,}42° = 370{,}87 \angle 152{,}54°$$

Que representan unas magnitudes: $V_{RS} = 399$ voltios; $V_{ST} = V_{TR} = 370{,}87$ voltios. Es decir, el desequilibrio de tensiones representado por el factor $\gamma = 5$ por 100 equivale a una diferencia entre las tensiones de línea de $399 - 370{,}87 = 28{,}13$ voltios ($\approx 7{,}1$ por 100).

c) Las impedancias del motor a las secuencias directa e inversa, de acuerdo con (4.188) y (4.189), valen, respectivamente:

$$\mathbf{Z}_{1d} = (0{,}04 + j\,0{,}3) + \frac{1}{\dfrac{1}{j\,10} + \dfrac{1}{j\,0{,}3 + 0{,}04/0{,}01}} = 3{,}32 + j\,1{,}86 = 3{,}804 \angle 29{,}3°$$

$$\mathbf{Z}_{1i} = (0{,}04 + j\,0{,}3) + \frac{1}{\dfrac{1}{j\,10} + \dfrac{1}{j\,0{,}3 + 0{,}04/(2-0{,}01)}} = 0{,}059 + j\,0{,}591 = 0{,}5942 \angle 84{,}3°$$

Obsérvese que la impedancia inversa del motor es aproximadamente la reactancia de cortocircuito del mismo, en virtud del alto deslizamiento del campo inverso, es decir: $\mathbf{Z}_{1d} \approx j\,(X_1 + X_2') = j\,X_{cc} = j\,0{,}6 = 0{,}6 \angle 90°$. Las corrientes directa e inversa del motor serán:

$$\mathbf{I}_{1d} = \frac{\mathbf{V}_{1d}}{\mathbf{Z}_{1d}} = \frac{\dfrac{380}{\sqrt{3}} \angle 0°}{3{,}804 \angle 29{,}3°} = 57{,}67 \angle -29{,}3°$$

$$\mathbf{I}_{1i} = \frac{\mathbf{V}_{1i}}{\mathbf{Z}_{1i}} = \frac{\dfrac{19}{\sqrt{3}} \angle 60°}{0{,}5942 \angle 84{,}3°} = 18{,}46 \angle -24{,}3°$$

De estos resultados se deduce que un desequilibrio de tensiones definido por el factor $\gamma = 5$ por 100 se convierte en un desequilibrio de corrientes de valor:

$$\alpha = \frac{I_{1i}}{I_{1d}} = \frac{18{,}46}{57{,}67} \approx 32\,\%$$

es decir, el desequilibrio de tensiones se manifiesta enormemente en el desequilibrio de corrientes. Una forma rápida (pero aproximada) de averiguar la relación entre los factores anteriores se deduce de la propia definición y teniendo en cuenta que la impedancia a la secuencia inversa es prácticamente la reactancia de cortocircuito del motor, y así se cumple:

$$\alpha = \frac{I_{1i}}{I_{1d}} = \frac{\dfrac{V_{1d}}{Z_{1d}}}{\dfrac{V_{1i}}{Z_{1i}}} = \frac{V_{1i}}{V_{1d}}\frac{Z_{1d}}{Z_{1i}} \approx \frac{V_{1i}}{V_{1d}}\frac{Z_{1d}}{X_{cc}} = \frac{V_{1i}}{V_{1d}}\frac{1}{\dfrac{X_{cc}}{Z_{1d}}} = \gamma\,\frac{1}{X_{cc}(pu)}$$

donde $X_{cc}(pu)$ representa la reactancia de cortocircuito del motor en valores por unidad. En definitiva, el factor de desequilibrio de corrientes es $1/X_{cc}(pu)$ veces el factor de desequilibrio de tensiones.

d) Las corrientes en las diversas fases de la red son:

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{I}_{1d} + \mathbf{I}_{1i} = 57{,}67 \angle -29{,}3° + 18{,}46 \angle -24{,}3° = 76{,}1 \angle -28{,}1°$$
$$\mathbf{I}_S = \mathbf{a}^2\mathbf{I}_{1d} + \mathbf{a}\mathbf{I}_{1i} = 52{,}6 \angle -167{,}9°$$
$$\mathbf{I}_T = \mathbf{a}\mathbf{I}_{1d} + \mathbf{a}^2\mathbf{I}_{1i} = 49{,}5 \angle 108{,}5°$$

que son tres corrientes distintas que se desvían respecto de la asignada de 57,67 A. Así, la corriente en la fase *R* es de 76,1 A, que es casi un 32 por 100 más elevada que la asignada, la corriente en la fase *S* es de 52,6 A, que representa un 8,8 por 100 inferior a la asignada, y la corriente en la fase *T*, que es de 49,5 A, es un 14 por 100 inferior a la asignada. Conviene que el lector advierta estas desviaciones de las corrientes absorbidas por la máquina teniendo en cuenta que el desequilibrio de tensiones es solamente del 5 por 100.

e) Las corrientes reducidas del rotor al estátor para las componentes de secuencia directa e inversa se obtienen aplicando (4.191), resultando ser:

$$\mathbf{I}'_{2d} = 57{,}67 \angle -29{,}3° \,\frac{j\,10}{\dfrac{0{,}04}{0{,}01} + j(0{,}3 + 10)} \approx 52{,}2 \angle -8{,}1° \text{ A}$$

$$\mathbf{I}'_{2i} = 18{,}46 \angle -24{,}31° \,\frac{j\,10}{\dfrac{0{,}04}{2 - 0{,}01} + j(0{,}3 + 10)} \approx 17{,}92 \angle -24{,}2° \text{ A}$$

y por consiguiente, las potencias mecánicas debidas a ambas componentes son:

$$(P_{mi})_d = 3R'_2\,\frac{1-s}{s}\,I'^2_{2d} = 3 \cdot 0{,}04 \cdot \frac{1 - 0{,}01}{0{,}01}\,52{,}2^2 \approx 32.366 \text{ W;}$$

$$(P_{mi})_i = 3R'_2\,\frac{1-s}{2-s}\,I'^2_{2i} = 3 \cdot 0{,}04 \cdot \frac{1 - 0{,}01}{2 - 0{,}01}\,17{,}92^2 \approx -19{,}18 \text{ W;}$$

$$\Rightarrow P_{mi} = 32.366 - 19{,}18 \approx 32.347 \text{ W}$$

es decir, el desequilibrio de tensiones provoca una reducción inapreciable en la potencia mecánica desarrollada por el motor.

f) Teniendo en cuenta que la velocidad de sincronismo del motor vale:

$$n_1 = \frac{60\,f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1.500 \text{ r.p.m.}$$

y como quiera que el deslizamiento del motor es del 1%, la velocidad de giro de la máquina es:

$$n = n_1(1 - s) = 1.500(1 - 0{,}01) = 1.485 \text{ r.p.m.}$$

De este modo los pares directo, inverso y total del motor son:

$$T_d = \frac{32.366}{2\pi \dfrac{1.485}{60}} = 208{,}13 \text{ N.m} \quad ; \quad T_i = \frac{-19{,}18}{2\pi \dfrac{1.485}{60}} = -0{,}12 \text{ N.m} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = 208{,}13 - 0{,}12 = 208{,}01 \text{ N.m}$$

es decir, el desequilibrio de tensiones provoca una reducción inapreciable en el par mecánico que desarrolla el motor.

g) Las pérdidas en el cobre son, respectivamente:

$$P_{cud} = 3R_2' I_{2d}'^2 + 3R_1 I_{1d}^2 = 3 \cdot 0{,}04\,(52{,}2^2 + 57{,}67^2) \approx 726{,}1 \text{ W}$$
$$P_{cui} = 3R_2' I_{2i}'^2 + 3R_1 I_{1i}^2 = 3 \cdot 0{,}04\,(17{,}92^2 + 18{,}46^2) \approx 79{,}44 \text{ W}$$

h) Las potencias eléctricas absorbidas por el motor de la red a las secuencias directa e inversa son, respectivamente:

$$P_{1d} = 32.366 + 726{,}1 = 33.092 \text{ W} \quad ; \quad P_{1i} = -19{,}18 + 79{,}44 = 60{,}26 \text{ W}$$

que corresponde a una potencia total $P_1 = 33.092 + 60{,}26 = 33.153$ W.

i) El rendimiento del motor es, de este modo:

$$\eta = \frac{P_{mi}}{P_1} = \frac{32.347}{33.153} = 97{,}57\,\%$$

Conclusiones: En la Tabla 4.3 se resumen los principales resultados no solamente para el factor de desequilibrio de tensiones del 5 por 100 con el que se ha resuelto el problema, sino para los siguientes

Tabla 4.3. Magnitudes del motor en función del índice de desequilibrio de tensiones

$\gamma \rightarrow$	0%	1%	3%	5%	7%	10%
V_{RN}	219,39 ∠ 0°	220,5 ∠ 0,5°	222,8 ∠ 1,5°	225,1 ∠ 2,4°	227,5 ∠ 3,3°	231,1 ∠ 4,7°
V_{SN}	219,39 ∠ −120°	220,5 ∠ −120,5°	222,8 ∠ −122,5°	225,1 ∠ −122,4°	227,5 ∠ −123,3°	231,1 ∠ −124,7°
V_{TN}	219,39 ∠ 120°	217,2 ∠ +120°	212,8 ∠ +120°	208,4 ∠ +120°	204,0 ∠ +120°	197,5 ∠ +120°
V_{RS}	380 ∠ 30°	383,8 ∠ 30°	391,4 ∠ 30°	399 ∠ 30°	406,6 ∠ 30°	418 ∠ 30°
V_{ST}	380 ∠ −90°	378,1 ∠ −91°	374,4 ∠ −91,5°	370,9 ∠ −92,5°	367,4 ∠ −93,6°	362,5 ∠ −95,2°
V_{TR}	380 ∠ +150°	378,1 ∠ +150,5°	374,4 ∠ +151,5°	370,9 ∠ +152,5°	367,4 ∠ +153,6°	362,5 ∠ +155,2°
I_{1d}	57,67 ∠ −29,3°	57,67 ∠ −29,3°	57,67 ∠ −29,3°	57,67 ∠ −29,3°	57,67 ∠ −29,3°	57,67 ∠ −29,3°
I_{1i}	0	3,69 ∠ −24,3°	11,1 ∠ −24,3°	18,46 ∠ −24,3°	25,8 ∠ −24,3°	36,9 ∠ −24,3°
I'_{2d}	52,20 ∠ −8,1°	52,20 ∠ −8,1°	52,20 ∠ −8,1°	52,20 ∠ −8,1°	52,20 ∠ −8,1°	52,20 ∠ −8,1°
I'_{2i}	0	3,58 ∠ −24,2°	10,75 ∠ −24,2°	17,92 ∠ −24,2°	25,1 ∠ −24,2°	35,85 ∠ −24,2°
I_R	57,67 ∠ −29,3°	61,35 ∠ −29,0°	68,71 ∠ −28,5°	76,1 ∠ −28,1°	83,5 ∠ −27,8°	94,51 ∠ −27,4°
I_S	57,67 ∠ −149,3°	56,21 ∠ −152,75°	53,94 ∠ −160°	52,6 ∠ −167,9°	52,3 ∠ −176°	53,8 ∠ 172,2°
I_T	57,67 ∠ 90,7°	55,64 ∠ 93,78°	52,1 ∠ 100,7°	49,5 ∠ 108,5°	47,8 ∠ 117°	47,4 ∠ 130,3°
P_{mi}	32.366	32.366	32.359	32.347	32.329	32.290
P_{cud}	726,1	726,1	726,1	726,1	726,1	726,1
P_{cui}	0	3,18	28,6	79,44	155,7	317,8
P_1	33.092	33.095	33.144	33.153	33.211	33.333
η	97,81%	97,80%	97,72%	97,57%	97,34%	96,87%
T	208,13	208,12	208,1	208,01	207,9	207,6

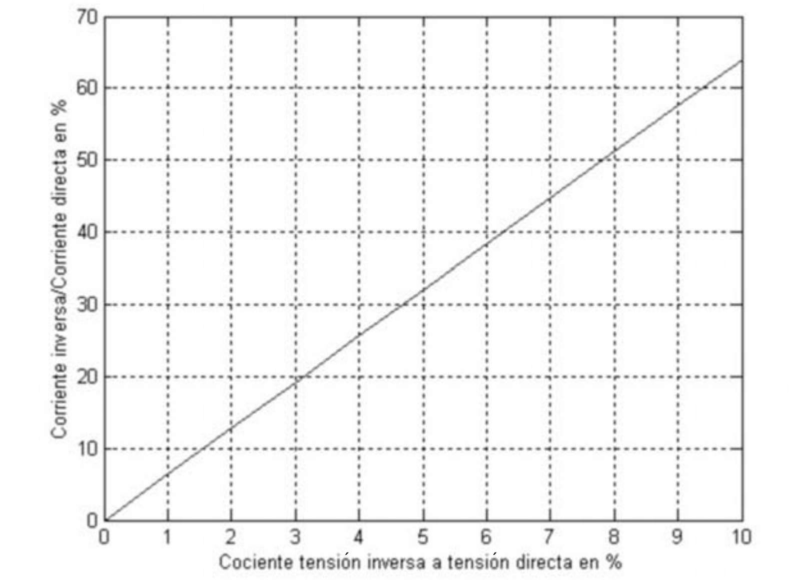


Figura 4.61. Evolución del desequilibrio de corrientes en función del desequilibrio de tensiones.

valores: 0 (sin desequilibrio), 1, 3, 5, 7 y 10 por 100. De este modo esta tabla puede servir para que el lector examine con detenimiento la influencia del factor de desequilibrio en las diversas magnitudes del motor.

En la Figura 4.61 se presenta un gráfico realizado con MATLAB® en el que se representa el factor de desequilibrio de corrientes en función del factor de desequilibrio de tensiones. En la Figura 4.62 se presenta un gráfico que muestra la evolución de las corrientes en las diversas fases de la red en función del factor de desequilibrio de tensiones.

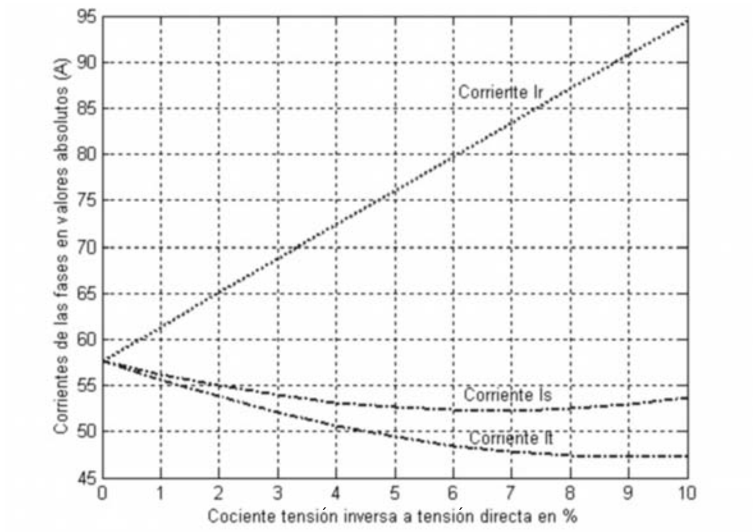


Figura 4.62. Evolución de las corrientes de la red en función del desequilibrio de tensiones.

Aspectos prácticos

Se comprueba en este ejemplo que un pequeño desequilibrio en las tensiones de alimentación de un motor ocasiona una gran variación en las corrientes absorbidas por la máquina. Parece a primera vista que la potencia y el par del motor no se ven seriamente afectados, pero debe tenerse en cuenta que debido al aumento de las corrientes de secuencia inversa, conforme se eleva el factor de desequilibrio se pueden producir grandes calentamientos en los devanados. Si el motor dispone de un relé magneto-térmico calibrado para la corriente nominal o asignada de 57,67 A (que corresponde a un factor de desequilibrio del 0 por 100), es evidente, como se comprueba en la Tabla 4.3, que para un desequilibrio de tensiones del 1 por 100 la corriente en la fase R pasa a valer 61,35 A, lo que se traduce en que el motor no podrá desarrollar su potencia asignada porque actuaría la protección térmica del motor al quedar sobrecargada la fase R; esto significa que la máquina solamente podrá suministrar una potencia máxima de 57,67/61,35 ≈ 94 por 100 de la nominal o asignada, pero si el desequilibrio fuera del 5 por 100, el motor solamente podrá dar una potencia del 57,67/76,1 ≈ 75,8 por 100 de la asignada y para un desequilibrio del 10 por 100 la potencia utilizable sería solamente el 57,67/94,51 ≈ 61 por 100 de la asignada, lo que representa una fuerte reducción en la potencia mecánica que puede suministrar el motor.

Afortunadamente, no es frecuente que se tengan grandes desequilibrios en las redes de suministro de energía eléctrica, por lo que en la práctica los motores eléctricos no deben tener ningún problema de funcionamiento. Pero aun existiendo una red simétrica de alimentación se pueden producir fuertes desequilibrios, si la línea que une la red (o transformador) con el motor es de gran longitud y se utilizan cables unipolares en su instalación, pero sin haber tenido la precaución de conseguir una simetría en su trazado, lo que origina un desequilibrio de las reactancias de cada fase. Un ejemplo concreto en ingeniería civil lo constituyen los grupos motobombas que se colocan sumergidos en los pozos para suministro de agua a poblaciones aprovechando las aguas subterráneas, donde las líneas tienen longitudes que en algunos casos superan los 400 m. Existen experiencias en que por este fallo de montaje, los grupos motobombas no pueden funcionar a plena carga y no queda más remedio que reformar la línea red-motor, buscando la simetría de los conductores de las tres fases o realizando las trasposiciones correspondientes para igualar las reactancias de la línea, evitando de este modo los posibles desequilibrios. Este problema no aparece si se emplean cables tripolares, ya que entonces las fases quedan equilibradas debido a la simetría del propio cable.

AMPLÍE SUS CONOCIMIENTOS

1. Efectos de los armónicos espaciales de f.m.m.

Como ya se indicó en la sección *Amplíe sus Conocimientos* incluida en el Capítulo 2, después del epígrafe 2.9.3, debido al número limitado de ranuras por polo y fase del devanado del estátor de un motor se pueden producir armónicos espaciales de f.m.m. Si se considera un motor trifásico y se denomina $\omega_1 = 2\pi f_1$ a la pulsación de las corrientes del estátor y $2p$ al número de polos, se produce una f.m.m. rotativa que gira a la velocidad angular mecánica $n_1 = 60 f_1/p$, y otras f.m.m.s armónicas de velocidades $n_5 = -n_1/5$, $n_7 = +n_1/7$, $n_{11} = -n_1/11$, etc. (recuérdese que la f.m.m. del armónico de orden 3 se anula). Estas f.m.m.s armónicas producen pares electromagnéticos en el motor que se suman al par fundamental. Como quiera que las amplitudes de estas f.m.m.s son inversamente proporcionales al orden del armónico, solamente vamos a considerar las acciones de los armónicos más importantes 5 y 7 en la contribución al par resultante de la máquina. En la Figura 4.63 se muestra en la parte superior y en trazo fino la curva par-deslizamiento del armónico fundamental T_1. Si se denomina n a la velocidad de giro del rotor en el sentido del campo giratorio principal, que se mueve a su vez a la velocidad de sincronismo n_1, el deslizamiento correspondiente s_1 estará definido por:

$$s_1 = \frac{n_1 - n}{n_1} = 1 - \frac{n}{n_1} \tag{1}$$

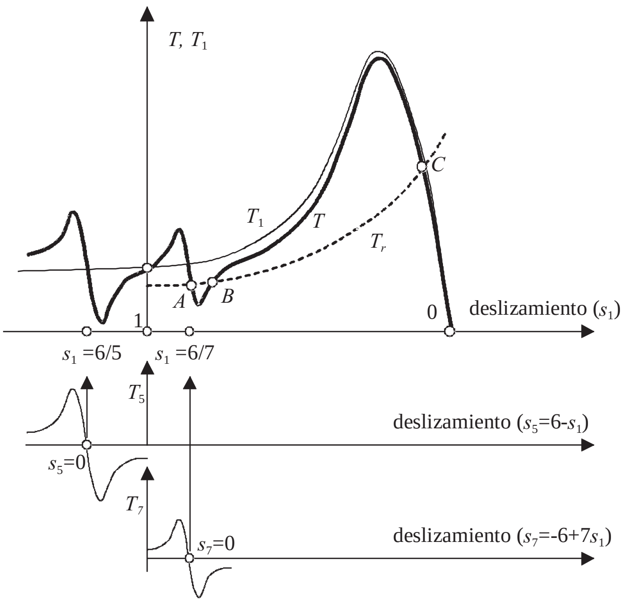


Figura 4.63. Curva par-velocidad de un motor trifásico con armónicos espaciales de f.m.m.

En la parte inferior de la Figura 4.63 se muestran las curvas par-velocidad de los armónicos 5° y 7°, cuyos deslizamientos respectivos son:

$$s_5 = \frac{-\frac{n_1}{5} - n}{-\frac{n_1}{5}} = 1 + \frac{5n}{n_1} = 6 - 5s_1 \quad ; \quad s_7 = \frac{\frac{n_1}{7} - n}{\frac{n_1}{7}} = 1 - \frac{7n}{n_1} = -6 + 7s_1 \qquad (2)$$

Para poder sumar la acción de estos pares armónicos con la del par electromagnético producido por el armónico fundamental, debe tenerse en cuenta que los pares armónicos son nulos cuando sus deslizamientos respectivos son cero y que de acuerdo con las ecuaciones (2) corresponden a unos valores:

$$s_5 = 0 = 6 - 5s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{6}{5} \quad ; \quad s_7 = 0 = -6 + 7s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{6}{7} \qquad (3)$$

En la parte superior de la Figura 4.63 se muestra la suma de los pares fundamental, 5° y 7° armónico, teniendo en cuenta la posición de estos últimos y definidas por las ecuaciones (3). Se observa que la curva resultante, que tiene un trazo más grueso, y debido a la influencia del 7° armónico pasa por una zona de depresión *AB* en la que el par electromagnético o par motor es inferior al resistente (que se ha supuesto de tipo cuadrático). Como consecuencia de ello cuando arranca el motor, al pasar por esta zona se queda **agarrado** a la velocidad correspondiente al punto de trabajo *A* que es estable y no puede llegar a alcanzar el punto de trabajo *C*, que así le correspondería si se prescindiera del efecto de los armónicos espaciales. El deslizamiento en el punto *A* es cercano a 6/7 y corresponde a una velocidad que es prácticamente $n_1/7$, lo que produce grandes corrientes de funcionamiento y fuertes vibraciones y zumbidos en el motor. Para evitar este efecto, las barras de la jaula de ardilla de los motores asíncronos no siguen la dirección de las generatrices del cilindro del rotor, sino que se colocan oblicuas o sesgadas (a

modo de hélice) con un ángulo de paso del orden de una ranura del rotor, como el lector puede apreciar en el rotor de jaula de ardilla mostrado en la Figura 4.2. Debe señalarse que este sesgado del rotor equivale a una reducción del coeficiente de devanado del rotor (realmente actúa como un factor de distribución del devanado), y provoca una disminución de los pares máximo y de arranque a causa del aumento de las inductancias de dispersión del motor.

2. Asimetría del devanado del rotor. Fenómeno de Görges.

Johannes Görges (1859-1946), catedrático de ingeniería eléctrica en la Universidad de Dresde desde 1901 hasta 1930, observó un efecto curioso y que lleva su nombre, cuando al trabajar con un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes, tuvo una avería en el reóstato de arranque en el que se desconectó una fase, por lo que el rotor quedó trabajando como monofásico (asimetría del rotor) y el motor presentó un funcionamiento estable para una velocidad cercana a la mitad de la síncrona. La explicación rigurosa de este fenómeno requiere el uso de las componentes simétricas, sin embargo aquí se va a dar un enfoque más intuitivo para interpretar lo que sucede. Obsérvese que el estátor está recorrido por corrientes trifásicas, por lo que produce un campo magnético giratorio que se mueve a una velocidad angular mecánica $\Omega_1 = \omega_1/p$ (siendo $\omega_1 = 2\pi f_1$ la pulsación de las corrientes de la red). Por otro lado el rotor gira a la velocidad angular mecánica Ω, por lo que la pulsación de las corrientes rotóricas son proporcionales a la velocidad de deslizamiento $\omega_2 = p(\Omega_1 - \Omega)$. Pero al ser el rotor monofásico, éste crea un campo alternativo o pulsante, que se puede considerar, de acuerdo con el teorema de Leblanc, que es equivalente a la suma de dos campos giratorios que se mueven en sentidos contrarios y a velocidades mecánicas *respecto del rotor* de valores $+(\Omega_1\text{-}\Omega)$ y $-(\Omega_1 - \Omega)$.

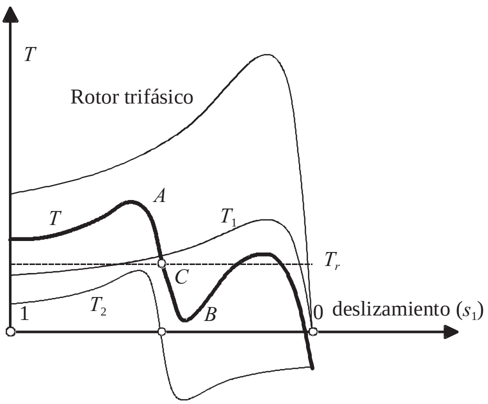


Figura 4.64. Curvas par-velocidad en el fenómeno de Görges.

El primero de estos campos (campo directo) se mueve por tanto a una velocidad absoluta: $\Omega_d = \Omega + (\Omega_1 - \Omega) = +\Omega_1$, es decir que coincide con la velocidad del campo giratorio del estator y producirá un par motor T_1 cuya curva par-velocidad se muestra en la Figura 4.64, que es similar a la de un motor trifásico pero de menor amplitud. El segundo de los campos (campo inverso) se mueve a una velocidad absoluta: $\Omega_i = \Omega - (\Omega_1 - \Omega) = 2\Omega - \Omega_1$; es por ello que si la velocidad de giro del motor es $\Omega > \Omega_1/2$, la velocidad absoluta de este campo inverso es positiva, mientras que si la velocidad de giro es $\Omega < \Omega_1/2$ la velocidad absoluta de este campo inverso será negativa. En cualquier caso, este campo rotórico inverso, producirá en las bobinas del estátor corrientes inducidas, que tenderán a mover el estátor en el mismo sentido que él, (es decir positivo si $\Omega > \Omega_1/2$ y negativo si $\Omega < \Omega_1/2$), pero como el estátor está fijo y anclado en la bancada, provocará una acción contraria en el rotor, que dará lugar a un par de reacción T_2 igual

y opuesto al que actúa sobre el estátor, es decir, que será negativo para $\Omega > \Omega_1/2$ y positivo cuando $\Omega < \Omega_1/2$. En la Figura 4.64 se muestra esta segunda curva de par T_2 y que al sumarla con la anterior T_1 da una resultante $T = T_1 + T_2$ (dibujada en trazo grueso), por lo que si el motor mueve un par resistente T_r de valor constante da lugar a un punto de funcionamiento C, (en la zona estable AB de la curva resultante), que corresponde a una velocidad prácticamente mitad de la velocidad de sincronismo del motor.

* 4.15. MÁQUINAS ASÍNCRONAS ESPECIALES

Se van a comentar en este apartado una serie de máquinas eléctricas de inducción que por sus características específicas, por su construcción o por su régimen de funcionamiento corresponden a aplicaciones muy especiales de la máquina asíncrona, estando su campo de trabajo muy limitado.

4.15.1. Regulador de inducción

El regulador de inducción supone un régimen especial de funcionamiento de la máquina asíncrona convencional y se empleó durante muchos años para controlar la tensión en las redes eléctricas; hoy día se ha sustituido casi completamente por transformadores con tomas variables. Dispone de un estátor y un rotor trifásico devanados, en el que puede regularse la posición de este último respecto del primero por medio de una transmisión por tornillo sinfín. En la Figura 4.65 se muestra el esquema de conexiones del regulador de inducción. Se tiene una máquina asíncrona clásica en la que el primario es el rotor (que está bloqueado) y el secundario es el estátor. Al introducir una tensión primaria de V_1 voltios por fase al rotor se produce un campo giratorio en el entrehierro que induce f.e.m.s. en ambos devanados, cuyas magnitudes, de acuerdo con la expresión (4.28), cumplen la relación:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{K_1 N_1}{K_2 N_2} \tag{4.199}$$

Estas f.e.m.s. están desfasadas en el tiempo los mismos grados que forman en el espacio.

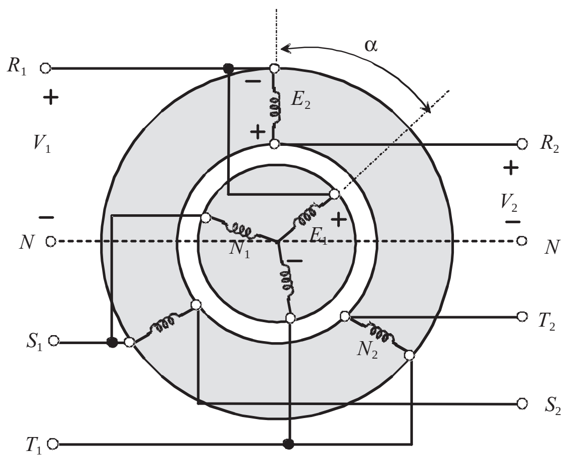


Figura 4.65. Regulador de inducción.

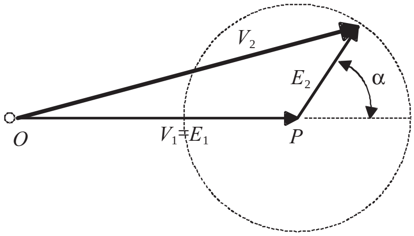


Figura 4.66. Composición de tensiones en el regulador de inducción.

De acuerdo con el circuito de la Figura 4.65, y en el supuesto de considerar despreciables las caídas de tensión, se cumplirá:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 \quad ; \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{E}_2 \tag{4.200}$$

ecuaciones que son el resultado de aplicar el 2.º lema de Kirchhoff a las mallas de estátor y rotor. Si los ejes de los devanados forman α grados, la 2.ª ecuación anterior se podrá representar por el diagrama fasorial de la Figura 4.66. Se observa que el lugar geométrico de $\mathbf{V}_2$ corresponde a los puntos de una circunferencia de radio $\mathbf{E}_2$ y centro en P, cuyos valores extremos resultan ser:

$$\alpha = 0° \;\Rightarrow\; V_{2\text{máx}} = V_1 + E_2 \quad ; \quad \alpha = 180° \;\Rightarrow\; V_{2\text{mín}} = V_1 - E_2 \tag{4.201}$$

En consecuencia, es posible obtener tensiones variables V_2 en módulo y magnitud partiendo de una tensión V_1 constante. La regulación puede hacerse de forma continua, sin necesidad de conmutaciones; por ello, esta máquina requiere poco mantenimiento. Las principales aplicaciones se centran en aquellos casos en que son necesarias tensiones variables con gran margen de regulación: electroquímica, alimentación de laboratorios de ensayos eléctricos, soldadura por arco, etc.

4.15.2. Selsyns

El término *selsyn* proviene de la contracción de las palabras inglesas: ***self-synchronous devices*** (dispositivos autosincronizados), y son sistemas que sirven para sincronizar las posiciones angulares de dos ejes, en puntos separados, en donde una interconexión mecánica entre ellos resultaría impracticable. Existen dos tipos fundamentales de selsyns:

a) *Los formados por motores asíncronos con estátor y rotor trifásicos (rotor devanado), que se emplean para aplicaciones de potencia y que reciben el nombre de* ***ejes eléctricos (electric shaft*** o ***arbre électrique)***.
b) *Los formados por motores asíncronos, con estátor trifásico y rotor monofásico, que se emplean en aplicaciones de control, o de pequeña potencia, y que se denominan* ***sincros*** o ***selsyns pilotos***.

El principio de funcionamiento de ambos tipos es el mismo y difieren en sus aplicaciones, por lo que aquí nos referiremos únicamente a los selsyns de potencia o ejes eléctricos, que se emplean en aquellos accionamientos en los que es necesario obtener la misma velocidad en distintos ejes que no están unidos entre sí por transmisiones mecánicas. Consideremos el esquema de la Figura 4.67, en el que se muestran dos motores primarios 1 y 2 que mueven dos ejes independientes 1 y 2 que es preciso que giren en sincronismo mutuo.

Se han acoplado mecánicamente a los motores anteriores sendos motores asíncronos de anillos rozantes que tienen conectados entre sí sus devanados de estátor y rotor. Estos últimos pueden actuar aisladamente sobre la maniobra y control del grupo o pueden actuar como máquinas auxiliares respecto de los primeros. El eje eléctrico lo forman realmente los dos motores asíncronos, que son idénticos.

Si los dos grupos de máquinas están sometidos a los mismos pares de carga, los ejes respectivos girarán a la misma velocidad. En el caso de que un motor quede sobrecargado respecto del otro, disminuirá su velocidad de tal forma que aparecerá una corriente de circulación entre los rotores respectivos

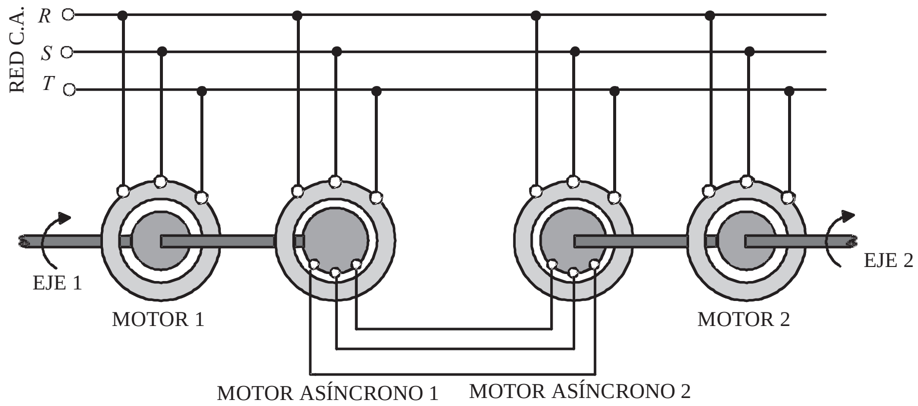


Figura 4.67. Esquema del eje eléctrico.

debido a la diferencia de f.e.m.s. inducidas en los secundarios de ambas «máquinas»; esta corriente originará un par de sincronización o igualador que tenderá a acelerar el motor sobrecargado y a retardar la posición de la máquina menos cargada, hasta que se igualen las velocidades y posiciones de los ejes respectivos. En consecuencia, el sistema permite obtener un sincronismo en la posición de dos ejes separados entre sí sin necesidad de una conexión mecánica rígida, lo cual es importante en aquellas aplicaciones en que la distancia entre los ejes hace imposible cualquier acoplamiento convencional. Estos sistemas se emplean en las grúas de los puertos que presentan un gran gálibo, donde es preciso que la traslación de las ruedas de ambos carriles se produzca a la misma velocidad para evitar descarrilamientos. También es frecuente su aplicación en puentes grúas y en los mecanismos de maniobra para la apertura de las compuertas de los aliviaderos de las presas.

El tipo monofásico se emplea en servomecanismos de control de posición, teledetección y otros; por ejemplo, para determinar la inclinación de los alerones de un avión, indicar la posición de las barras de control de un reactor nuclear, etc.

4.15.3. Motor de inducción lineal

Un motor de inducción lineal es un tipo de motor asíncrono en el que se ha sustituido el movimiento de rotación de la máquina por uno de traslación, lo cual le confiere unas peculiaridades características que lo hacen aplicable a una diversidad de casos prácticos. Este motor se puede considerar que se deriva de la máquina convencional, por desarrollo de la misma al cortarle por una generatriz, como muestra la Figura 4.68.

Al aplicar un sistema trifásico de corrientes al estátor se produce un campo magnético que se propaga a la velocidad de sincronismo por el entrehierro de la máquina, de tal forma que aparecen unas corrientes inducidas en el secundario de la máquina, que al reaccionar con el campo inductor producen una fuerza de traslación que obliga a mover al *rotor*. El sistema tiene las ventajas de poder trabajar con velocidades ilimitadas, ya que ningún elemento está sometido a velocidades centrífugas. El movimiento lineal se obtiene sin necesidad de utilizar ruedas, engranajes o cualquier otro dispositivo mecánico similar. Sin embargo, el modelo de la Figura 4.68 presenta algunos inconvenientes. En primer lugar, aparecen fuerzas de atracción entre el estátor y el rotor mucho más elevadas que la fuerza de traslación de la máquina; estas fuerzas se equilibran en el motor cilíndrico en virtud de su simetría, pero aquí es preciso duplicar el devanado del estátor con objeto de anular estas acciones, como muestra la Figura 4.69; aun así, es preciso igualar los entrehierros de ambas caras para que no existan fuerzas transversales. En segundo lugar, debido a la simetría del devanado se obtienen deformaciones en el campo en las extremidades del miembro más corto (el primario en la Fig. 4.69); esto conduce a una serie de fenómenos transitorios que pueden hacer que las características del motor sean muy diferentes de las que cabría

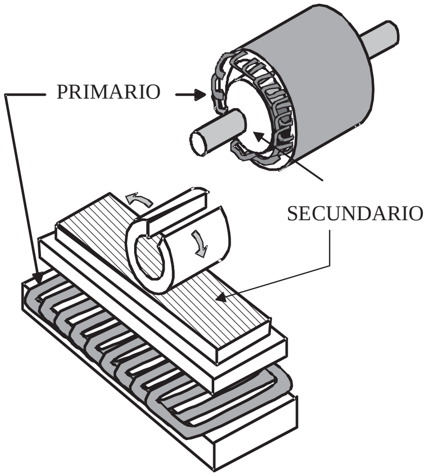


Figura 4.68. Génesis del motor lineal a partir del desarrollo de un motor rotativo.

esperar utilizando las teorías convencionales empleadas a lo largo de este capítulo. En el libro de Laithwaite citado en la bibliografía pueden profundizarse los conceptos anteriores, que se salen de los límites de este texto.

Normalmente la *jaula de ardilla* del elemento secundario es sustituida por una banda de cobre o aluminio continua, en virtud de su mejor conductividad eléctrica (Fig. 4.69). En las aplicaciones a la tracción eléctrica, el motor lineal se está ensayando como medio de transporte no convencional de alta velocidad; en este caso el primario es el órgano móvil (vagón), estando el secundario fijo, que sirve como sistema de guiado (vía); para mejorar el rendimiento y obtener velocidades elevadas (no inferiores a 300 km/h) se emplean imanes superconductores, que provocan una suspensión o levitación magnética del vehículo, lo que evita todo tipo de rozamientos. La superconductividad se obtiene haciendo circular por los devanados helio líquido a temperaturas que oscilan entre 3 y 4 K. Existen otras aplicaciones para lanzaderas de telares, cintas transportadoras con banda metálica, accionamiento para puertas con apertura automática, etc.

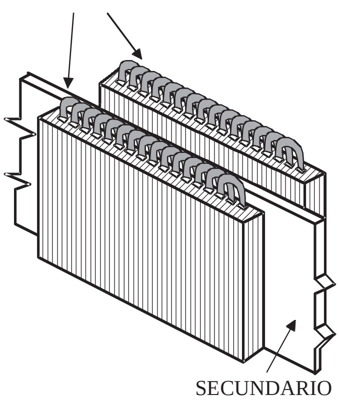


Figura 4.69. Motor lineal con doble alimentación para eliminar las fuerzas transversales.

* 4.16. APÉNDICE: EL PAR DE ROTACIÓN DE UN MOTOR ASÍNCRONO DESDE EL PUNTO DE VISTA FÍSICO

En el epígrafe 4.7 se ha calculado el par de rotación de un motor asíncrono trifásico a partir de su circuito equivalente. El procedimiento es sencillo y muy didáctico, ya que utiliza el potencial de la teoría de circuitos para determinar las expresiones del par en función de los parámetros de la máquina y permite comprender la forma de las curvas par-velocidad y su influencia en el comportamiento del motor. Otro procedimiento alternativo para explicar la creación del par en una máquina eléctrica es el que se utilizó en el epígrafe 2.10 del Capítulo 2, que hacía uso de los fasores espaciales de f.m.m. Vamos a analizar en este epígrafe la correlación entre ambos puntos de vista y el significado físico de la creación del par a partir de los fasores espaciales.

Considérese el circuito equivalente por fase de un motor asíncrono en el que se consideran despreciables las pérdidas en el hierro de la máquina, señalado en la Figura 4.70. De acuerdo con este circuito, si se toma como referencia de fases la f.e.m. $\mathbf{E}_1$, la expresión de la corriente del rotor reducida al estátor $\mathbf{I}_2'$ es:

$$\mathbf{I}_2' = \frac{\mathbf{E}_1}{\frac{R_2'}{s} + jX_2'} = \frac{E_1}{\sqrt{\left(\frac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}} \angle -\varphi_2 \quad ; \quad \varphi_2 = \text{arctg}\,\frac{X_2'}{R_2'/s} \tag{4.202}$$

es decir, la corriente reducida $\mathbf{I}_2'$ se retrasa de la f.e.m. $\mathbf{E}_1$ un ángulo φ_2.

Por otro lado, la corriente que circula por la reactancia magnetizante de la rama central vale:

$$\mathbf{I}_\mu = \frac{\mathbf{E}_1}{jX_\mu} = \frac{E_1}{X_\mu} \angle -90° \tag{4.203}$$

es decir, la corriente de imanación se retrasa 90° respecto de la f.e.m. $\mathbf{E}_1$. Esta corriente $\mathbf{I}_\mu$ es la que produce el flujo magnético Φ en el entrehierro del motor. Por otro lado, si se aplica el primer lema de Kirchhoff al nudo *A* se puede escribir:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2' + \mathbf{I}_\mu \tag{4.204}$$

Debe destacarse que la ecuación anterior está en consonancia con el circuito equivalente de la Figura 4.12, en el que la corriente $\mathbf{I}_2'$ produce un efecto desmagnetizante respecto de $\mathbf{I}_1$ (es decir, la corriente $\mathbf{I}_1$ entra por el terminal señalado por punto en el circuito del estátor, mientras que la corriente $\mathbf{I}_2'$ sale por el terminal señalado con punto en el rotor). Se puede escribir una ecuación equivalente a (4.204) considerando una corriente reducida del rotor $\mathbf{I}_r'$ contraria a $\mathbf{I}_2'$, es decir: $\mathbf{I}_r' = -\mathbf{I}_2'$, tal como se muestra en la Figura 4.70; en este caso la corriente $\mathbf{I}_r'$ tiene un efecto magnetizante respecto de $\mathbf{I}_1$, y de este modo la ecuación equivalente de (4.204) se puede escribir también así:

$$\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_r' = \mathbf{I}_\mu \tag{4.205}$$

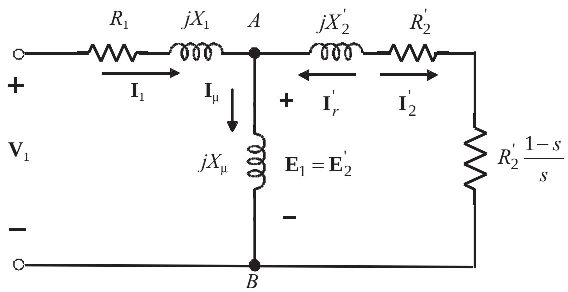


Figura 4.70. Circuito equivalente por fase de un motor asíncrono trifásico.

lo que significa que el efecto combinado de las corrientes del estátor y del rotor produce la corriente de imanación $\mathbf{I}_\mu$, que genera a su vez el flujo magnético en el entrehierro. En la Figura 4.71 se muestra un diagrama fasorial temporal en el que se han representado las variables más importantes que aparecen en el circuito equivalente de la Figura 4.70.

De acuerdo con el circuito equivalente de la Figura 4.70 y el diagrama fasorial de la Figura 4.71, la potencia que atraviesa el entrehierro P_a es la potencia activa total que absorbe el rotor, y se puede expresar así:

$$P_a = m_1 E_1 I_2' \cos \varphi_2 \tag{4.206}$$

y teniendo en cuenta la expresión (4.93), el par de rotación que produce la máquina será:

$$T = \frac{P_a}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} = \frac{m_1 E_1 I_2' \cos \varphi_2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} \tag{4.207}$$

pero si se tiene en cuenta que la velocidad de sincronismo es $n_1 = 60 f_1/p$ y que la pulsación de la tensión aplicada de red al estátor es $\omega_1 = 2\pi f_1$, la ecuación (4.207) se transforma en:

$$T = \frac{p\, m_1 E_1 I_2' \cos \varphi_2}{\omega_1} \tag{4.208}$$

ahora bien, del diagrama fasorial de la Figura 4.71 se cumple que $I_2' \cos \varphi_2 = I_1 \text{ sen } \delta_1$, por lo que (4.208) se transforma en:

$$T = \frac{p\, m_1 E_1 I_1 \text{ sen } \delta_1}{\omega_1} \tag{4.209}$$

igualmente, de acuerdo con (4.8) el valor de la f.e.m. E_1 es:

$$E_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} K_1 f_1 N_1 \Phi_m \tag{4.210}$$

En la ecuación anterior se ha tenido en cuenta que el factor 4,44 procede del cociente $2\pi/\sqrt{2}$ y que Φ_m representa el ***flujo magnético máximo en el entrehierro***. Al sustituir (4.210) en (4.209) resulta:

$$T = \frac{p}{\sqrt{2}} m_1 K_1 N_1 \Phi_m I_1 \text{ sen } \delta_1 \tag{4.211}$$

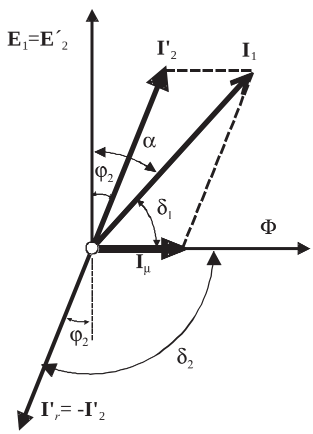


Figura 4.71. Diagrama de fasores temporales del circuito de la Figura 4.70.

pero de acuerdo con los resultados del ejemplo de aplicación 4.1, el valor de la ***f.m.m. máxima*** producida por las m_1 bobinas del estátor del motor que llevan una corriente eficaz I_1 es:

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} m_1 \frac{K_1 N_1 I_1}{p} \tag{4.212}$$

por lo que (4.211) se puede expresar, en función de la f.m.m. anterior, del siguiente modo:

$$T = \frac{\pi}{2} p^2 \Phi_m \mathcal{F}_1 \text{ sen } \delta_1 \tag{4.213}$$

expresión del par que coincide con la (2.140) demostrada en el epígrafe 2.10 del Capítulo 2 (en este caso existe un signo menos cuyo significado es que el par tiende a reducir el ángulo δ_1 que forman los fasores espaciales de flujo magnético y de f.m.m.). En definitiva, el lector puede comprobar de este modo que las expresiones del par motor de las ecuaciones (4.74) y (2.140) son equivalentes.

Con el fin de que el lector comprenda en profundidad los conceptos de interacción de las f.m.m.s del motor con el flujo común e incluso de interacción de las f.m.m.s entre sí, se han representado en la Figura 4.72 los fasores espaciales de f.m.m. que se producen en un motor asíncrono trifásico de dos polos en el mismo instante en que se ha realizado la composición de fasores temporales de la Figura 4.71.

En la Figura 4.72, para señalar el sentido de las corrientes en los conductores del estátor y del rotor se ha utilizado un punto (corriente saliente al plano de la hoja) y una cruz (corriente entrante al plano de la hoja). Las cruces y los puntos tienen diferente tamaño, para indicar que la corriente no tiene la misma magnitud en todos ellos sino que se distribuye como una capa de corriente sinusoidal a lo largo de los conductores tanto del estátor como del rotor (a mayor tamaño de cruces o puntos, mayor es la corriente en los conductores correspondientes).

Las corrientes del estátor producen un fasor espacial de f.m.m. $\mathcal{F}_1$ proporcional a la corriente I_1, definido por la ecuación (4.212), y que en el momento considerado tiene la orientación señalada en la Figura 4.72 y que se mueve a la velocidad de sincronismo n_1 en sentido contrario a las agujas del reloj. De un modo análogo, las corrientes en el rotor producen una f.m.m. resultante (reducida al circuito del estátor) que se ha denominado $\mathcal{F}_2'$ o $\mathcal{F}_r'$, según se considere su efecto desmagnetizante o magnetizante respectivamente. Esta f.m.m. $\mathcal{F}_r'$ se mueve respecto del rotor a velocidad $n_2 = n_1 - n$, pero como el rotor

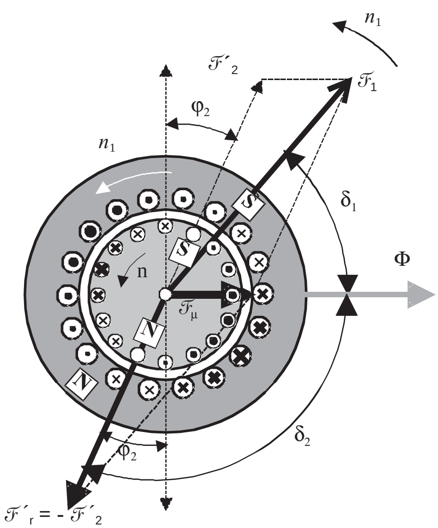


Figura 4.72. Diagrama de fasores espaciales de un motor asíncrono bipolar.

gira mecánicamente a velocidad n, la velocidad absoluta de la f.m.m. $\mathcal{F}_r'$ respecto a un referencial en reposo es también igual a n_1. En definitiva, las f.m.m.s. del estátor $\mathcal{F}_1$ y del rotor $\mathcal{F}_r'$ giran a la misma velocidad, es decir, ambas f.m.m.s. *están enclavadas eléctricamente*.

Es interesante que el lector compruebe las analogías geométricas existentes entre las Figuras 4.71 y 4.72. En la Figura 4.72 se han señalado también los polos norte y sur equivalentes a las f.m.m.s. producidas tanto por los devanados del estátor como los del rotor. Se observa que prácticamente la f.m.m. $\mathcal{F}_r'$ actúa casi en oposición a la f.m.m. $\mathcal{F}_1$ del estátor. Ambas f.m.m.s., sumadas geométricamente de una forma análoga a la ecuación (4.205), dan lugar a la f.m.m. de imanación $\mathcal{F}_\mu$:

$$\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_r' = \mathcal{F}_\mu \qquad (4.214)$$

La f.m.m. resultante anterior $\mathcal{F}_\mu$ debe vencer la reluctancia del circuito magnético para producir el flujo común Φ en el entrehierro de la máquina, que gira también a la velocidad de sincronismo n_1. Este flujo común es el que genera las f.e.m.s. en los conductores del rotor, cuyas corrientes originan a su vez la f.m.m. del rotor $\mathcal{F}_r'$. El que esta f.m.m. no se retrase 90° respecto del flujo común (en el sentido de la rotación), sino que ambos fasores espaciales formen un ángulo $\delta_2 = 90° + \varphi_2$, es debido al flujo de dispersión rotórico (en definitiva, lo que sucede es que el circuito del rotor no es resistivo puro y tiene una reactancia equivalente a ese flujo disperso, como lo señala el circuito eléctrico equivalente de la Fig. 4.70). Es decir, la corriente $\mathbf{I}_2'$ se retrasa φ_2 respecto de $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2'$.

De acuerdo con (4.213), el par electromagnético producido en función de la f.m.m. del estátor $\mathcal{F}_1$ es de la forma:

$$T = \frac{\pi}{2} p^2 \Phi_m \mathcal{F}_1 \text{ sen } \delta_1 = k_T \Phi_m \mathcal{F}_1 \text{ sen } \delta_1 \qquad (4.215)$$

donde se ha llamado *constante del par* k_T al cociente $\pi p^2/2$. La expresión anterior es una forma conveniente para comprender el ***control vectorial de los motores asíncronos trifásicos***, que se explica en el epígrafe 7.12.6. Sin embargo, se pueden obtener otras expresiones del par equivalentes a la anterior, y así, de acuerdo con la Figura 4.72, se observa que se cumple la siguiente igualdad:

$$\mathcal{F}_1 \text{ sen } \delta_1 = \mathcal{F}_r' \cdot \text{sen } \delta_2 = \mathcal{F}_2' \cdot \text{sen } (90° + \varphi_2) = \mathcal{F}_2' \cdot \cos \varphi_2 \qquad (4.216)$$

por lo que otra expresión equivalente a (4.215) es:

$$T = k_T \Phi_m \mathcal{F}_r' \text{ sen } \delta_2 = k_T \Phi_m \mathcal{F}_2' \cos \varphi_2 \qquad (4.217)$$

que es análoga a la señalada en la ecuación (2.140) del Capítulo 2.

Para comprender el significado de la ecuación anterior, téngase en cuenta que si la tensión de alimentación V_1 es constante y se desprecia la caída de tensión en el circuito del estátor, la f.e.m. E_1 en la rama central del circuito equivalente de la Figura 4.70 es constante, lo que significa que el flujo del motor es constante en todo momento y por consiguiente también la f.m.m. de imanación $\mathcal{F}_\mu$. Si el rotor pudiera girar a la velocidad de sincronismo n_1, los conductores del rotor no cortarían flujo magnético, por lo que no se generaría f.e.m. ni corriente en el rotor; esto es, $I_2' = \mathcal{F}_r' = 0$, y de acuerdo con (4.217) no puede haber par de rotación, es decir, *es imposible que el motor pueda girar por sí mismo a la velocidad de sincronismo.* Al aumentar el par resistente del motor, aumentan el deslizamiento s, la corriente del rotor y los ángulos δ_2 y φ_2. Para bajos deslizamientos del motor la corriente del rotor crece casi proporcionalmente con el deslizamiento, mientras que el ángulo φ_2 se mantiene casi constante en $\varphi_2 \approx 0°$, y el par de rotación generado de acuerdo (4.217) crecerá con la misma ley de aumento de la corriente, es decir, aumenta proporcionalmente con el deslizamiento. En esta situación el fasor $\mathcal{F}_r'$ de la Figura 4.72 se retrasa 90° respecto a $\mathcal{F}_\mu$, lo que representa, según indica la ecuación (4.216), una condición óptima de trabajo para un cierto flujo en el entrehierro y una determinada corriente en el rotor. Esta situación corresponde a la zona estable de la curva par-velocidad del motor señalada en la Figura 4.24 y se produce en la práctica para deslizamientos comprendidos entre el 0 y el 10 por 100.

Al aumentar el par resistente del motor, aumenta el deslizamiento y por consiguiente la corriente del rotor, pero también aumenta el ángulo φ_2. A pesar de que I_2 sigue creciendo (y por tanto la f.m.m. $\mathcal{F}_r'$), el par sólo puede aumentar ligeramente hasta llegar, por último, a un estado en que el aumento de la

corriente rotórica viene compensado por la disminución del cos φ_2 y el par alcanza su valor máximo (se ha llegado al punto *C* de la curva par-velocidad de la Fig. 4.24). Un nuevo incremento del deslizamiento a partir de este punto hace que la reducción del cos φ_2 sea superior al aumento de la corriente rotórica y el par generado se hace cada vez más pequeño hasta que se produce la parada de la máquina (esta situación corresponde a la zona *CD* de la curva de la Fig. 4.24).

Puede demostrar el lector, de acuerdo con la expresión (2.135) del Capítulo 2, que otra ecuación del par generado, equivalente a (4.215) y (4.216), en función de los fasores espaciales de f.m.m. de estátor y rotor, es:

$$T = \frac{\pi}{2} p \frac{\mu_0 \cdot \pi D \ell}{2g} \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_r' \text{ sen } \delta = K \mathcal{F}_1 \mathcal{F}_r' \text{ sen } \delta \qquad (4.218)$$

donde δ es el ángulo que forman $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_r'$ (y que es igual a $\delta_1 + \delta_2$). De acuerdo con esta ecuación, el par generado tiende a reducir el ángulo δ que forman las f.m.m.s. del estátor y del rotor, o de otro modo, las f.m.m.s. $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_r'$ tienden a alinearse, y ese esfuerzo de alineación, que simplemente se debe a la atracción de los polos correspondientes que se forman tanto en el estátor como en el rotor de la Figura 4.72, es la causa de que se produzca un par de rotación en el motor.

PROBLEMAS

4.1. La potencia absorbida por un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 50 Hz, es de 4,76 kW cuando gira a 1.435 r.p.m. Las pérdidas totales en el estátor son de 265 W y las de rozamiento y ventilación son de 300 W. Calcular: *a*) El deslizamiento; *b*) las pérdidas en el cobre del rotor. *c*) Potencia útil en el árbol del motor; *d*) rendimiento.

[Resp.: *a*) 4,33 %. *b*) 194,78 W. *c*) 4.000 W. *d*) 84 %.]

4.2. Un motor de inducción trifásico, de 8 polos, 10 CV, 380 V, gira a 720 r.p.m. a plena carga. Si el rendimiento y f.d.p. a esta carga es del 83 por 100 y 0,75, respectivamente, calcular: *a*) Velocidad de sincronismo del campo giratorio; *b*) deslizamiento a plena carga; *c*) corriente de línea; *d*) par en el árbol de la máquina. NOTA: f_1 = 50 Hz.

[Resp.: *a*) 750 r.p.m. *b*) 4 %. c) 17,9 A. *d*) 97,6 N.m.]

4.3. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, conectado en estrella, se alimenta por una red de 380 V, 50 Hz. La impedancia del estátor es igual a 0,1 + *j* 0,4 Ω/fase y la del rotor en reposo reducida al estátor vale 0,1 + *j* 0,3 Ω/fase. Calcular: *a*) Intensidad absorbida en el arranque; *b*) corriente a plena carga, si el deslizamiento es del 4 por 100; *c*) potencia y par nominal si se desprecian las pérdidas mecánicas; *d*) rendimiento en el caso anterior si las pérdidas en el hierro son iguales a 1.200 W.

[Resp.: *a*) 301,36 A; *b*) 81,56 A; *c*) 47,89 kW; 317,6 N.m; *d*) 90,2 %.]

4.4. Un motor trifásico de 4 polos, conectado en triángulo, se alimenta por una red de 220 V, 50 Hz. La impedancia del rotor en reposo es igual a 0,2 + *j* 1,6 Ω, siendo la impedancia del estátor despreciable. La relación de transformación es igual a 2 ($m_v = m_i$). Calcular: *a*) Intensidad absorbida de la red y su f.d.p. para un deslizamiento del 5 por 100; *b*) potencia y par en el eje en el caso anterior; *c*) velocidad a la cual se obtiene el par máximo y par máximo correspondiente; *d*) rendimiento del motor

cuando trabaja con par máximo. NOTA: Se desprecian las pérdidas mecánicas y en el hierro.

[Resp.: *a*) 22,10 A; 0,928. *b*) 7,43 kW; 49,8 N.m.; *c*) 1.312,5 r.p.m.; 72,2 N.m. *d*) 87,5 %.]

4.5. Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 10 CV, 220/380 V, 50 Hz, 4 polos, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = R_2' = 0{,}5\ \Omega$; $X_1 = X_2' = 3\ \Omega$; $P_{Fe} = P_m = 0$. El rotor está conectado en estrella y el número de espiras del rotor es igual al del estátor, con idénticos factores de devanado: *a*) Si la red es de 220 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el estátor del motor? Dibujar la placa de bornes con la disposición de los terminales, indicando sus letras de identificación; *b*) conectado el motor correctamente, de acuerdo con el apartado anterior, ¿cuál será el par de arranque del motor con tensión asignada? ¿Qué corriente absorberá el motor de la red en el arranque?; *c*) cuál será la velocidad del motor a plena carga, es decir, cuando desarrolla 10 CV?; *d*) determinar el par de plena carga y la capacidad de sobrecarga del motor. e) Calcular el valor de la resistencia que debe añadirse en serie con cada fase del rotor para obtener el par máximo de arranque.

[Resp.: *a*) Triángulo; *b*) 12,5 N.m; 62,65 A; *c*) 1.452,6 r.p.m.; *d*) 48,38 N.m; 1.465; *e*) 5,521 Ω.]

4.6. Un motor asíncrono trifásico conectado en estrella de 3.000 V, 24 polos, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros: $R_1 = 0$; $X_1 = 0$; $R_2' = 0{,}016\ \Omega$; $X_2' = 0{,}265\ \Omega$. Se obtiene el par de plena carga a la velocidad de 247 r.p.m. Calcular: *a*) velocidad para par máximo; *b*) capacidad de sobrecarga: $T_{\text{máx}}/T_n$.

[Resp.: *a*) 234,9 r.p.m. *b*) 2,61.]

4.7. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos, 25 CV, 380 V, 50 Hz, tiene un par de arranque de 322 N.m y un par de plena carga igual a 124 N.m. Determinar: *a*) El par de arranque cuando la tensión del estátor se reduce a 220 V. *b*) Tensión que debe aplicarse al estátor para obtener un par de arranque igual al par de plena carga.

[Resp.: *a*) 108 N.m. *b*) 235,81 V.]

4.8. Los parámetros de la rama serie de un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes conectado en estrella, 380 V, 4 polos, 50 Hz, son: $R_1 = R_2' = 1\ \Omega$; $X_{cc} = 4\ \Omega$. Calcular: *a*) Par de plena carga si el deslizamiento es el 4 por 100; *b*) resistencia que debe añadirse a cada fase del rotor, para obtener el par nominal, a la mitad de la velocidad de plena carga con los anillos cortocircuitados. La relación de transformación es $m_v = m_i = 2$, y las pérdidas mecánicas son despreciables.

[Resp.: *a*) 33,4 N.m. *b*) 3 Ω.]

4.9. Un motor asíncrono trifásico de anillos rozantes de 15 kW, 380 V, 50 Hz, 6 polos, tiene los siguientes parámetros (con los anillos deslizantes cortocircuitados): $R_1 = R_2' = 0{,}8\ \Omega$; $X_1 = X_2' = 2\ \Omega$. Los devanados del estátor y rotor están conectados en estrella y $m_v = m_i = 2$. Calcular: *a*) Par de arranque; *b*) par máximo y velocidad correspondiente; *c*) resistencia que debe conectarse en serie, por fase, en el rotor para obtener en el arranque los 2/3 del par máximo.

[Resp.: *a*) 59,4 N.m. *b*) 804 r.p.m.; 141,3 N.m. *c*) 2,71 Ω o 0,158 Ω.]

4.10. Un motor asíncrono trifásico de 6 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del rotor por fase de 0,2 Ω y un par máximo de 162 N.m a 875 r.p.m. Calcular: *a*) El par cuando el deslizamiento es el 4 por 100; *b*) la resistencia adicional que debe añadirse en el circuito del rotor para obtener los 2/3 del par máximo en el arranque. NOTA: Prescindir de la impedancia del estátor.

[Resp.: *a*) 94 N.m. *b*) 0,41 o 3,99 Ω.]

4.11. Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado de 6 polos, 50Hz, tiene una impedancia del estátor despreciable. Los devanados del estátor y del rotor están conectados en estrella y la impedancia del rotor en reposo es $\mathbf{Z}_2 = 0{,}2 + j0{,}8$ Ω/fase. Al conectar el estátor a una red trifásica y estar abierto el circuito del rotor, se ha medido entre dos anillos del mismo una tensión de 100 voltios: *a*) calcular la corriente de arranque del rotor con los anillos deslizantes cortocircuitados; *b*) si el motor gira a plena carga a 960 r.p.m., determinar la f.e.m. inducida por fase en el rotor y la frecuencia correspondiente; *c*) corriente en el rotor y par desarrollado en el caso anterior si están los anillos cortocircuitados; *d*) si con el par resistente calculado en el caso anterior se ha incluido en el rotor una resistencia en el reóstato de arranque para hacer que el par del motor sea máximo en el arranque ¿a qué velocidad se moverá el motor?

[Resp.: *a*) 70 A; *b*) 2,31 voltios; 2 Hz; *c*) 11,4A; 18,6 N.m; *d*) 840 r.p.m.]

4.12. Un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla, conectado en estrella, de 3,5 kW, 220 V, seis polos, 50 Hz, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos: *Ensayo de vacío o de rotor libre*: tensión compuesta aplicada: 220 V; corriente de línea del estátor: 3,16 A; potencia absorbida en el ensayo: 590 W. Se sabe también que las pérdidas mecánicas (rozamiento + ventilación) a velocidades cercanas a la asignada son de 312 W. (Se pueden despreciar en este ensayo las pérdidas en el cobre del estátor. El lector puede comprobar que representa una potencia de 7,2 W, que se puede considerar despreciable). *Ensayo de cortocircuito o de rotor bloqueado:* tensión compuesta aplicada: 34,3 V; corriente de línea: 14,5 A; potencia absorbida: 710 W. A la temperatura de funcionamiento, la resistencia entre dos terminales cualesquiera del estátor es de 0,48 ohmios. Si se conecta el motor a una red trifásica de 220 V de línea y se considera aceptable utilizar el circuito equivalente aproximado del motor, calcular: 1) Parámetros del circuito equivalente aproximado del motor reducido al primario (estátor). 2) Si el motor gira a 960 r.p.m., determinar: *a*) potencia mecánica útil en el eje suministrada por el motor; *b*) corriente de línea absorbida por el motor de la red y f.d.p. correspondiente; *c*) potencia eléctrica absorbida por el motor de la red; *d*) rendimiento del motor; *e*) par mecánico útil en el eje.

[Resp.: 1) $R_{Fe} = 174{,}7$ Ω; $X_\mu = 41{,}4$ Ω; $R_1 = 0{,}24$ Ω; $R_2' = 0{,}885$ Ω; $X_{cc} = 0{,}773$ Ω. 2) *a*) 1.744 W; *b*) 7,2 A; $\cos\varphi = 0{,}891$; *c*) 71,5 %; *d*) 2.440 W; *e*) 17,4 N.m.]

4.13. Un motor de inducción trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una resistencia del rotor por fase de 0,25 Ω, siendo la impedancia del estátor despreciable. El par máximo se obtiene para una velocidad de 1.200 r.p.m. Si la capacidad de sobrecarga es igual a 2,1, calcular: *a*) Velocidad a plena carga o asignada; *b*) relación par de arranque a par asignado o nominal.

[Resp.: *a*) 1.425 r.p.m. *b*) 0,8173.]

4.14. El circuito equivalente de un motor de inducción trifásico de 4 polos, conectado en estrella, presenta los siguientes valores: $R_1 = R'_2 = 0{,}85\ \Omega$; $X_{cc} = 5\ \Omega$. Si la red tiene una tensión de 380 V, 50 Hz, calcular: *a*) Corriente de arranque y de plena carga, si el deslizamiento en este último régimen es del 4 por 100; *b*) par de arranque y de plena carga; *c*) velocidad del motor cuando consume una corriente mitad de la de arranque y par electromagnético desarrollado por la máquina en ese instante. Prescíndase de la rama paralelo del circuito equivalente.

[Resp.: *a*) 41,54 A; 9,68 A. *b*) 28 N.m; 38 N.m. *c*) 1.350 r.p.m.; 69,5 N.m.]

4.15. Un motor trifásico de jaula de ardilla, tiene una impedancia del estátor despreciable. La capacidad de sobrecarga, $T_{\text{máx}}/T_n$, vale 2,5 y el cociente par de arranque a par nominal es igual a 1,5. Calcular el deslizamiento a plena carga y el deslizamiento al cual se obtiene el par máximo.

[Resp.: 6,96 %; 33,33 %.]

4.16. Un motor de inducción trifásico de 4 polos, 50 Hz, tiene una capacidad de sobrecarga de 2,5 y desarrolla su par máximo a 900 r.p.m. Calcular: *a*) Deslizamiento a plena carga; *b*) ¿cuál será la tensión mínima que debe aplicarse a la máquina, expresada en tanto por ciento de la asignada, para obtener el par de plena carga en el arranque? NOTA: Despreciar la impedancia del estátor.

[Resp.: *a*) 8,34 %. *b*) 76,15 %.]

4.17. Se tiene una estación de bombeo de agua que lleva una bomba centrífuga que tiene incorporado un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla de 15 CV, 380-220 V, 50 Hz, 6 polos, y que tiene los siguientes parámetros: $R_1 = R'_2 = 0{,}8$ ohmios; $X_1 = X'_2 =$ $= 2$ ohmios; $P_{Fe} = P_m = 0$ (se puede prescindir de la rama paralelo del circuito equivalente): *a*) Si la red es de 380 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el motor? Dibuje el cuadro de bornes. Indique el nombre correcto de los terminales; *b*) conectado el motor correctamente, de acuerdo con el apartado *a*), ¿cuál será el par de arranque del motor con tensión asignada? Si el par resistente por la bomba en el arranque es de 50 N.m, ¿arrancará el motor?; *c*) si en régimen permanente el par resistente es igual a 100 N.m, ¿cuál será la velocidad a la que girará el motor? (de las dos soluciones obtenidas tómese la más lógica); *d*) ¿qué corriente absorberá el motor en el caso anterior? ¿Cuánto valdrá la potencia desarrollada por el motor en el eje?; *e*) si el motor se alimenta por medio de un ***transformador ideal*** de relación 15 kV/380 V ± 5 por 100, conexión Dy11, a través de una línea trifásica de impedancia 0,1 + *j* 0,5 ohmios/fase, ¿arrancará el motor? (recuérdese que el par resistente en el arranque es de 50 N.m. En caso negativo, ¿qué procedimiento sería el más adecuado para que pueda arrancar el motor? NOTA: La línea está en el lado de B.T. del transformador y se conecta a la toma de 380 V del mismo.

[Resp.: *a*) Estrella. *b*) 59,44 N.m, y arrancará el motor, ya que 59,44 N.m > 50 N.m. *c*) 925 r.p.m. *d*) 18,08 A; 9,66 kW. *e*) Con 380 V el motor no arranca. Si se utiliza la toma +5 % del transformador, es decir, si la tensión secundaria es de 380 V + 5 % 380 = 399 V, se produce un par de 52,55 N.m, que es superior a 50 N.m, por lo que de este modo arrancará el motor.]

4.18. Un motor asíncrono trifásico de 4 polos y rotor devanado tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente por fase: R_1 = 0,1 ohm; X_1 = 0,5 ohm; R'_2 = 0,2 ohm; X'_2 = 1 ohm; $m_v = m_i = m = 2$. Se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y también las pérdidas mecánicas. El motor está conectado en triángulo y la tensión de la red es de 380 V, 50 Hz. Calcular: 1) Si la potencia mecánica desarrollada a plena carga por el motor es de 86 kW, ¿cuál será la velocidad del rotor?; 2) ¿cuál es la corriente que absorbe el motor de línea de alimentación y su f.d.p. cuando desarrolla la plena carga?; 3) ¿qué resistencia debe añadirse al rotor por fase para que la corriente de arranque no sea superior a dos veces la de plena carga?; 4) si estando el motor girando a plena carga (a la velocidad calculada en el apartado 1) se conmutan entre sí dos fases de la alimentación, ¿cuál será el par de frenado desarrollado en ese instante? (Se supone, para la resolución de este apartado, que no existe resistencia adicional en el rotor.)

[Resp. 1) 1.425 r.p.m. 2) 150,62 A; 0,94. 3) 0,321 Ω. 4) 123,46 N.m.]

4.19. Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 6 polos, 50 Hz, está conectado en estrella a una red de 380 V. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $R_1 = R'_2$ = 0,5 ohmios; $X_1 = X'_2$ = 2 ohmios; P_m = 0 (despréciese la rama paralelo del circuito equivalente del motor). El par resistente de la carga se supone que sigue una ley lineal de la forma:

$$T_r = 35 + 0{,}06n \text{ (par en N.m; } n\text{: velocidad en r.p.m.)}$$

Calcular: 1) Par de arranque y corriente de arranque del motor; 2) si la tensión de la red se reduce un 10 por 100, ¿podrá arrancar el motor? Justificar la respuesta; 3) con la tensión asignada de 380 V aplicada al motor, ¿a qué velocidad girará el motor con el par resistente señalado?; 4) ¿qué potencia desarrolla el motor en el eje en el caso anterior? NOTA: Para realizar el apartado 3 es preciso resolver una ecuación de tercer grado en función del deslizamiento s. (Sugerencia: el valor de s está comprendido entre el 3 y el 4 por 100).

[Resp.: 1) 40,56 N.m; 53,2 A. 2) No arrancará el motor. 3) 960,4 r.p.m. 4) 9,31 kW.]

4.20. Se dispone de un motor asíncrono trifásico de rotor devanado (con anillos), de 10 kW, 220/380 V, 4 polos, 50 Hz. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $I_{Fe} = I_\mu = 0$; P_m = 0 (pérdidas mecánicas); $R_1 = R'_2$; $X_1 + X'_2$ =1,5 ohm; $m_v = m_i = m = 2$. Se sabe además que el motor da el par máximo (con los anillos cortocircuitados) a una velocidad de 1.200 r.p.m. La tensión de alimentación de la red trifásica es de 220 V, 50 Hz: 1) ¿Cómo se deberá conectar el motor? Dibujar la placa de bornes, señalando las letras de identificación de terminales; 2) calcular la resistencia R_1 por fase del estátor; 3) conectado el motor correctamente como se indica en el apartado 1, calcular la intensidad de línea que absorbe el motor en el momento del arranque con los anillos deslizantes cortocircuitados y par de arranque correspondiente; 4) si el motor desarrolla una potencia mecánica en el eje de 10 kW (plena carga o asignada), ¿cuál será la velocidad de rotación correspondiente? (los anillos están cortocircuitados); 5) determinar en el caso anterior la corriente de línea que absorbe el motor y el f.d.p. con el que trabaja la máquina; 6) si el rotor se conecta en estrella, ¿cuál será la resistencia adicional que debe añadirse al rotor por fase en el arranque para que la

intensidad de arranque sea como máximo tres veces la asignada determinada en el apartado 5 y qué par de arranque tendrá la máquina entonces?

[Resp.: 1) Triángulo. 2) 0,306 Ω. 3) 235,19 A; 107,77 N.m. 4) 1.465,74 r.p.m. 5) 27,59 A; 0,994. 6) 0,935 Ω; 176,5 N.m.]

4.21. Un motor asíncrono trifásico con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V, 4 polos, 50 Hz, tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente aproximado: $R_1 = R_2' = 0{,}2\ \Omega$; $X_{cc} = 0{,}3\ \Omega$. Se consideran despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. Si se conecta el motor a una red trifásica de 380 V de tensión compuesta, 50 Hz: *a*) ¿Cómo se conectará el motor? Dibujar la caja de bornes, indicando los nombres normalizados de los terminales y la disposición de los puentes de conexión; *b*) Potencia mecánica útil y par mecánico desarrollado para la velocidad asignada de 1.425 r.p.m; *c*) calcular, en las condiciones nominales del apartado anterior, la corriente absorbida por el motor de la línea, f.d.p. con el que trabaja y rendimiento; *d*) estando girando el motor con el par nominal, ¿hasta qué porcentaje se podrá reducir la tensión de alimentación sin que se pare el motor?; *e*) ¿cuál debe ser la tensión mínima para arrancar el motor si mueve un par resistente igual al nominal?

[Resp.: *a*) Estrella; *b*) 30,94 kW; 207,36 N.m; *c*) 52,1 A; 0,997; 90,51 %; *d*) 49,7 % de reducción; *e*) 201,78 V.]

4.22. Un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 220/380 V, 4 polos, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 220 V de línea, 50 Hz. La corriente de línea de plena carga es de 90 A y se observa que si se realiza el arranque cortocircuitando los anillos, la corriente de arranque es 6,6 veces la asignada o de plena carga, desarrollando un par en esas condiciones que es 2,2 veces el nominal. La resistencia por fase del estátor R_1 es igual a la reducida del rotor R_2'. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente. Se pide: 1) Conexión del motor. Dibújese la placa de bornes con las letras normalizadas de identificación de los terminales; 2) velocidad del motor a plena carga y valores de los parámetros del circuito equivalente: R_1, R_2' y X_{cc}; 3) potencia mecánica desarrollada por el motor a plena carga, par producido y rendimiento correspondiente; 4) par máximo desarrollado por el motor con los anillos cortocircuitados y corriente absorbida de la red con su factor de potencia en esas condiciones; 5) ¿qué resistencia habrá que añadir en el rotor por fase para limitar la corriente de arranque a un valor de 300 A de línea? ¿Qué par de arranque producirá el motor en esta situación? NOTA: $m_v = m_i = 2$.

[Resp.: 1) Triángulo. 2) 1.424,25 r.p.m.; 0,202 Ω; 0,202 Ω; 0,499 Ω. 3) 30,76 kW; 206,25 N.m.; 90,38 %. 4) 624,29 N.m; 426,7 A; 0,83. 5) 0,191 Ω; 553,51 N.m.]

4.23. Un motor asíncrono con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V, 50 Hz, 6 polos, tiene el circuito equivalente por fase mostrado en la Figura P.4.1*a*. (Se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralelo.) El motor se conecta correctamente para trabajar en una red de 380 V de línea: *a*) Si el motor lleva acoplada una caja de engranajes (véase Fig. P.4.1*b*), con una demultiplicación de relación 10:1 (es decir, la velocidad se reduce 10 veces, o de otro modo, el par aumenta 10 veces) y mueve un tambor de 50 cm de diámetro sobre el que va arrollando un cable que levanta un peso de 250 kg, ¿cuál será el valor de la velocidad lineal con la que sube el peso de

250 kg? (supóngase que la caja de engranajes no ofrece par resistente alguno, sino que únicamente adapta el par del tambor al par en el eje del motor); *b*) ¿cuál es el rendimiento del motor en el caso anterior?

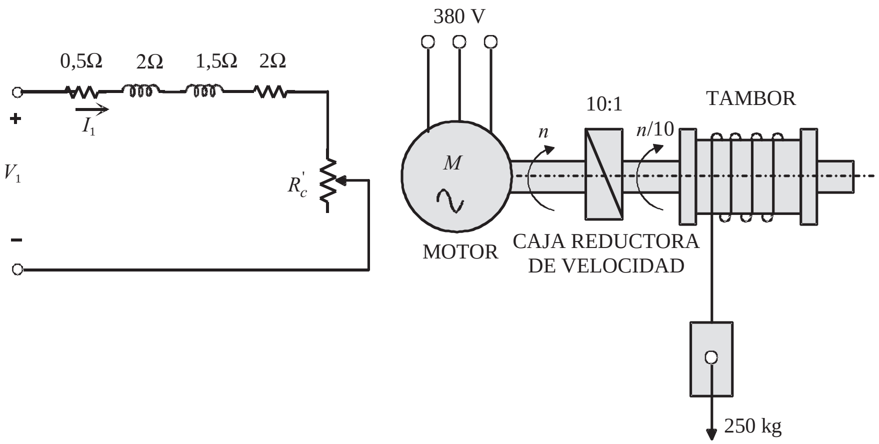


Figura P.4.1.

[Resp.: *a*) 2,428 m/s. *b*) 90,56 %.]

4.24. Un motor asíncrono trifásico con rotor devanado de 19 kW, 220/380 V, 4 polos, 50 Hz, se conecta correctamente a una red trifásica de 380 V, 50 Hz. Se consideran despreciables: la impedancia del estátor ($R_1 = X_1 = 0$), las pérdidas mecánicas y la corriente de vacío (no considerar la rama paralelo del circuito equivalente). Se sabe que cuando el motor tiene cortocircuitados los anillos (es decir la resistencia del reóstato de arranque es nula), las pérdidas en el cobre del rotor con par máximo son 8 veces las que tiene con par nominal (plena carga) con un deslizamiento del 3 por 100. Calcular: *a*) Velocidad del motor para par máximo; *b*) Corriente que absorbe el motor de la red cuando trabaja a plena carga, par de plena carga y rendimiento del motor en estas condiciones; *c*) Resistencia que debe añadirse al rotor por fase (mediante el reóstato de arranque) para que la corriente de arranque sea como mucho igual a dos veces la asignada o nominal. Se sabe que $m_v = m_i = 2$; *d*) Si la resistencia adicional calculada en el apartado anterior permanece fija en el reóstato de arranque, ¿a qué velocidad girará el motor con un par resistente igual al nominal? ¿Qué corriente absorberá el motor de la red en estas condiciones?

[Resp.: *a*) 1.325,72 r.p.m. *b*) 30,78 A; 124,7 N.m; 96,87 %. *c*) 0,72 Ω; *d*) 830,12 r.p.m.; 30,71 A.]

4.25. Un motor de inducción trifásico de rotor devanado de 35 kW, 380/220 V, 4 polos, 50 Hz, desarrolla su potencia de salida asignada a 1.455 r.p.m. cuando trabaja a la tensión y frecuencia asignadas, estando cortocircuitados sus anillos rozantes. El par máximo que puede desarrollar a la tensión y frecuencia citadas es del 200 por 100 del de plena carga. La resistencia del devanado del rotor por fase es de 0,1 ohmios. La impedancia del estátor es despreciable ($R_1 = X_1 = 0$). Se suponen nulas las pérdidas mecánicas y se puede omitir en los cálculos la rama paralelo del circuito equiva-

lente. Las relaciones de transformación cumplen la igualdad $m_v = m_i = m$. El rotor está conectado en estrella. La red de alimentación es de 380 V, 50 Hz, estando el estátor conectado en estrella. 1) Calcular la relación de transformación m (tómese la más alta de las dos que se obtienen) y reactancia del rotor a 50 Hz; 2) calcular la velocidad del motor para par máximo; 3) resistencia que debe añadirse en serie con cada fase del rotor para obtener el par máximo en el arranque; 4) si ahora se alimenta el motor a la frecuencia de 60 Hz, ajustando la tensión aplicada de tal forma que el flujo en el entrehierro tenga el mismo valor que a 50 Hz, calcular la tensión que debe aplicarse a 60 Hz; 5) calcular en el caso anterior la velocidad a la que el motor desarrolla un par de valor igual al de plena carga a 50 Hz, estando los anillos en cortocircuito.

[Resp.: 1) m = 1,058; X_2 = 0,893 Ω. 2) 1.332 r.p.m. 3) 0,793 Ω. 4) 456 V. 5) 1.755,20 r.p.m.]

4.26. Se tiene un motor asíncrono trifásico con un rotor en jaula de ardilla, que tiene los siguientes datos en su placa de características: 10 kW, 220/380 V, 50 Hz, 19 A, 1.425 r.p.m., cos φ = 0,90. Se conecta a una red de 380 V, 50 Hz. Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas y no es necesario considerar la rama paralelo del circuito equivalente. Calcular: *a*) Parámetros R_1, R_2' y X_{cc} del motor; *b*) par de arranque y par de plena carga del motor. ¿Qué tipo de par resistente debe tener el motor para que pueda arrancar?; *c*) rendimiento del motor con par máximo; *d*) velocidad que deberá darse al motor por medio de un motor primario externo para que la máquina asíncrona funcione como generador entregando su potencia asignada a la red. (Tomar la velocidad más pequeña de las dos posibles).

[Resp. *a*) 0,68 Ω; 0,486 Ω; 5,02 Ω. *b*) 16,82 N.m; 67 N.m; par tipo cuadrático. *c*) 79,7 %. *d*) 1.555,6 r.p.m.]

4.27. Un motor asíncrono trifásico de rotor en jaula de ardilla tiene una placa de características en la que se leen únicamente los datos siguientes: 380/660 V, 50 Hz, 585 r.p.m. Los parámetros del circuito equivalente del motor son: $I_{Fe} = I_\mu = 0$; $P_m = 0$ (pérdidas mecánicas); $R_1 = 0{,}5\ \Omega$; $R_2' = 0{,}7\ \Omega$; $X_1 = X_2' = 3\ \Omega$. Si se conecta el motor a una red de 380 V trifásica, 50 Hz, indicar: 1) Forma de conexión del estátor del motor y dibujo de la placa de bornes correspondiente; 2) conectado el motor correctamente, del modo que resulte de acuerdo con el apartado anterior, calcular: si el motor gira a plena carga a 585 r.p.m., el valor de la corriente absorbida por el motor en la línea, factor de potencia del motor en estas condiciones y la potencia absorbida por el motor de la red; 3) potencia desarrollada por el motor en las condiciones del apartado anterior, par mecánico en el eje y rendimiento del motor; 4) si girando la máquina como motor a 585 r.p.m. se intercambian súbitamente dos fases de la red de alimentación, ¿cuál será en esos momentos el par de frenado desarrollado por la máquina?; 5) si la máquina se hace girar a 615 r.p.m. movida por un motor diesel acoplado a su eje, en el mismo sentido que funcionaba como motor y sin cambiar la secuencia de fases, calcular la potencia mecánica absorbida y la potencia eléctrica que la máquina entrega a la red. (Funcionamiento como generador asíncrono).

[Resp.: 1) Triángulo. 2) 22,6 A; 0,979; 14,56 kW. 3) 13,95 kW; 227,68 N.m; 95,79 %. 4) 66,42 N.m. 5) 15,69 kW; 15,04 kW.]

4.28. Los parámetros del circuito equivalente de un motor asíncrono trifásico en jaula de ardilla, utilizado en una bomba centrífuga para suministro de agua a una fábrica, son los siguientes: $R_1 = R_2' = 0{,}5$ ohmios; $X_1 = X_2' = 0{,}75$ ohmios (se desprecia la rama paralelo del circuito equivalente y las pérdidas mecánicas). La placa de características del motor señala los siguientes datos: 220/380 V; 8 CV; 975 r.p.m. El motor se alimenta por medio de una línea de cobre de 10 mm^2 de sección de una red de 380 V de línea y 50 Hz situada a 3 km de distancia (la resistividad del cobre es de 0,01730 ohmios-mm^2/m): 1) ¿Cómo deberá conectarse el motor? Dibujar la placa de bornes; 2) si el par resistente de la bomba es igual a 55 N.m y se supone constante en un amplio margen de velocidad, calcular la velocidad de giro del motor (tómese la más elevada de las dos posibles); 3) en las condiciones del apartado anterior, calcular la corriente absorbida por el motor de la red y la tensión de línea en bornes del motor; 4) se observa que durante el funcionamiento expresado en los apartados 2 y 3 el motor absorbe una corriente superior a la esperada, mientras que la cantidad de agua suministrada era menor a la prevista. Para corregir este defecto se decide plantear una solución práctica para compensar la caída de tensión en la línea de 3 km. Para ello se decide alimentar el motor (a principio de línea por medio de un transformador ideal, de modo que la tensión de alimentación sea ahora de 450 V. Si el par de la bomba sigue siendo de 55 N.m, determinar la nueva velocidad del motor, la corriente absorbida y la tensión de línea que llegará al motor. NOTA: Despréciese la reactancia de la línea.

[Resp.: 1) Estrella. 2) 952,2 r.p.m. 3) 13,53 A; 259,24. 4) 977,5 r.p.m.; 9,29 A; 366,41 V.]

4.29. Se dispone de un motor asíncrono trifásico en rotor de la jaula de ardilla de 4 polos, 220/380 V, 50 Hz, que tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente: $R_1 = 2$ ohmios; $X_1 = 5$ ohmios; $R_2' = 1{,}5$ ohmios; $X_2' = 6$ ohmios; se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralela del circuito equivalente. El motor mueve una carga cuyo par resistente es constante y vale 10 N.m: *a*) Si la red es de 220 V, 50 Hz, ¿cómo se conectará el motor? Dibujar el esquema de la caja de bornes, indicando el nombre normalizado de los terminales; *b*) ¿a qué velocidad girará el motor con el par resistente de 10 N.m? ¿Cuál será el rendimiento del motor en estas condiciones; *c*) si el motor funciona en régimen permanente en las condiciones del apartado anterior y se va reduciendo progresivamente la tensión de alimentación, ¿cuál será la mínima tensión necesaria en la alimentación antes de que se pare el motor?; *d*) si se pretende arrancar el motor con el par resistente de 10 N.m, ¿cuál será la mínima tensión necesaria en la red para que pueda arrancar la máquina?

[Resp.: *a*) Triángulo. *b*) 1.474,14 r.p.m.; 96,1 %. *c*) 117,48 V. *d*) 215,67 V.]

4.30. La Figura P.4.2 muestra el esquema de una red de alimentación a dos grúas idénticas de un puerto, representadas por un único motor (el de elevación de carga). Los motores empleados son asíncronos trifásicos, con rotor en jaula de ardilla de 220/380 V, 6 polos, 50 Hz, conectados en estrella, cuyos parámetros del circuito equivalente (despreciando las pérdidas mecánicas y la rama paralelo) son: $R_1 = R_2' = 0{,}2$ ohmios, $X_1 = X_2' = 0{,}6$ ohmios. Se indican también en la figura las impedancias de las redes de distribución de las grúas. La alimentación se hace al principio de la línea por medio de una red trifásica de 380 V, 50 Hz: *a*) Inicialmente arranca la grúa número 1. ¿Qué

par de arranque dará el motor? Si mueve una carga cuyo par resistente es de 100 N.m, ¿cuál será la velocidad final a la que girará el motor? ¿Qué tensión de línea tendrá en bornes el motor?; *b*) estimando que el motor de la grúa número 1 gira a velocidad constante (en el valor calculado en el apartado anterior, se arranca el motor de la grúa número 2, moviendo un par de 80 N.m), en el momento del arranque, ¿cuáles serán las tensiones en bornes de ambos motores? ¿Arranca el motor de esta grúa?; *c*) una vez que ha arrancado la grúa número 2 (debe demostrarlo en el apartado anterior), ¿cuál será la velocidad final de régimen permanente que tomará el motor número 2, suponiendo que el par resistente sigue siendo de 80 N.m y que la grúa número 1 sigue girando a la velocidad calculada en el apartado *a*)? ¿Cuál será la tensión compuesta en bornes del motor número 2?

[Resp. *a*) 134,53 N.m; 984,4 r.p.m; 374,04 V. *b*) 335,4 V; 271,2 V; T_{a2} = 87,52 N.m arranca el motor 2. *c*) 986,8 r.p.m.; 362,49 V.]

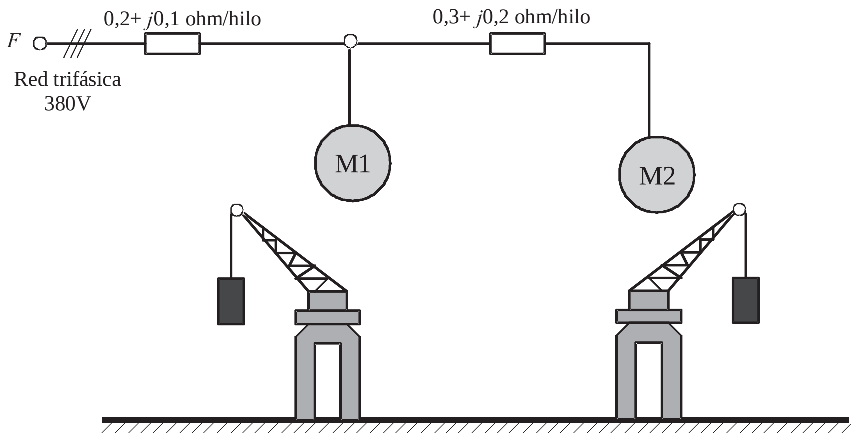


Figura P.4.2.

Biografías

ALGER, Philip L. (1894-1979). Ingeniero americano. Se graduó como ingeniero eléctrico en el MIT (1915), Master por la Union College, Schenectady (1920). Trabajó como ingeniero en la *General Electric* durante 40 años (entre 1919 y 1959). Su labor más destacada en la empresa fue en el departamento de máquinas eléctricas, estando al frente del departamento de diseño de motores y generadores de inducción. Fue Instructor en el MIT (1915-1916). Desde 1958 a 1970 fue profesor adjunto de ingeniería eléctrica y consultor en el Politécnico de Rensselaer. Escribió numerosos artículos técnicos en relación con el comportamiento de las máquinas eléctricas. Su libro más famoso fue *The Nature of Polyphase Induction Machines*, que es considerado como cita obligada para el estudio de estas máquinas. Escribió varios libros y artículos biográficos sobre dos grandes ingenieros de la GE: Charles Proteus Steinmetz y Gabriel Kron, con los que trabajó en la vida profesional y cuyos trabajos tanto han influido en los estudios de ingeniería eléctrica. Pertenecía a numerosas sociedades científicas: *Fellow IEEE* (1930), *Fellow del ASME*, Asociación americana de amigos de las ciencias y *Fellow del IEE*. Medalla Lamme en 1959 por sus contribuciones al comportamiento de las máquinas de inducción. Premio Steinmetz (1969). Director del AIEE. Tenía varios Doctorados Honoris Causa: St. John's College (1915), Universidad de Colorado (1969).

Arago, Dominique François Jean (1786-1853). Físico francés. En 1804 ingresó en la Escuela Politécnica y al salir de ella fue agregado en calidad de secretario al Bureau des Longitudes, prosiguiendo con Biot la tarea comenzada por Delambre y Mechain de medir el arco de meridiano desde Dunquerque a Barcelona. Profesor de la Escuela Politécnica (1810) y Director del Observatorio Astronómico (1830). Miembro de la Academia de Ciencias de París a los veintitrés años. Arago, por contribuir en media docena de campos de la ciencia, no pudo emplear su talento a fondo para alcanzar proeza alguna de verdadera importancia en ninguno de estos campos en especial. Trabajó con Biot en óptica hasta 1816, descubriendo la polarización rotatoria magnética, la polarización cromática y el polariscopio. Cuando Arago tuvo conocimiento del experimento de Oersted, dio un avance a las propiedades magnéticas de las corrientes eléctricas y explicando el origen de las fuerzas magnéticas. Se distinguía por su gran facilidad de palabra, una gran potencia de asimilación y un gran talento para hacerse inteligible por todo el auditorio. Fue un profesor modelo, a cuya cátedra acudían presurosos gran número de alumnos; daba consejos utilísimos a los que se dedicaban al estudio orientándoles en sus investigaciones y sugiriéndoles métodos nuevos. Poseía una prodigiosa memoria que le permitía recordar pasajes enteros que sólo había leído una vez. Arago también gastó energías en la política, siendo decididamente republicano, y en 1840 llegó a desempeñar el Ministerio del Interior y más tarde el de Marina.

Bailey, Benjamin Franklin (1875-1954). Ingeniero americano. Se graduó y doctoró en Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Michigan (1898 y 1907, respectivamente). En 1898 ingresó en la GE como ingeniero del Departamento de Ensayos. En 1910 fue profesor ayudante de Ingeniería Eléctrica en su Universidad y catedrático en 1913. Desde 1925 hasta su retiro en 1945 combinó sus trabajo docente como Director del Departamento de Ingeniería Eléctrica con el ingeniero consultor, trabajando para las empresas: *Fairbanks Morse, Howell Electric Motors*, etc. Fundó la empresa *Bailey Electric* en Michigan. Autor de cinco libros de texto y muchos artículos técnicos. Se le atribuyen diferentes patentes en relación con sistemas de encendido eléctrico para automóviles, equipos especiales de encendido para lámparas eléctricas y variaciones al motor monofásico de arranque por condensador.

Behrend, Bernard Arthur (1875-1932). Ingeniero suizo. Estudió en Berlín, París y Londres. Trabajó en Inglaterra como ayudante de Gisbert Kapp. En 1896 ingresó en la Compañía suiza de maquinaria eléctrica Oerlikon, como ayudante del ingeniero jefe; estuvo encargado del laboratorio de ensayos y participó en el diseño de todos los tipos de máquinas eléctricas, tanto de c.c. como de c.a., verificando todos sus cálculos teóricos con los modelos reales. Uno de sus primeros descubrimientos fue encontrar la relación entre la magnitud y fase de la corriente primaria en un transformador con alta dispersión, aplicando más tarde sus resultados a los motores de inducción, sentando las bases del diagrama de círculo usado universalmente en la actualidad; el trabajo lo publicó en la revista *Elektrotechnische Zeitschrift* en enero de 1896, después de comprobar su teoría con los ensayos en un motor real (otros ingenieros como Blondel, Ossanna y Heyland hicieron estudios similares, pero parece que Behrend fue el que contrastó mejor los resultados). En 1898 se trasladó a los Estados Unidos, donde dio clases de máquinas eléctricas en la Universidad de Wisconsin. En 1900 se incorporó a la empresa Bullock de Cincinnati como director de ingeniería; esta Compañía, que hasta entonces solamente había fabricado máquinas de c.c., comenzó con la ayuda de Behrend a construir todo tipo de máquinas de c.a.: alternadores de polos salientes y motores de inducción. Cuando en 1904 la empresa Bullock fue absorbida por Allis-Chalmers, Behrend continuó en su puesto en la nueva empresa. En 1908 pasó como ingeniero a la Compañía Westinghouse. Fue miembro de un gran número de sociedades científicas y profesionales de Europa y América. Le concedieron el título de Doctor Honoris Causa por la Universidad de Darmstadt en 1931.

Dolivo-Dobrowolsky, Mijail Osipowitsch (1861-1919). Ingeniero eléctrico ruso. Trabajó como Director de Ingeniería en la Compañía alemana AEG (*Allgemeine Electrizitäts-Gesellschaft*), siendo el responsable del diseño de todas las máquinas eléctricas que construía la compañía. Inventor del rotor de doble jaula de ardilla para los motores de inducción. Entre 1889 y 1890 efectuó un estudio completo de los transformadores y de las redes trifásicas. Dobrowolsky distinguía los mon-

tajes en circuito abierto (*montaje en estrella*) con tres conductores principales y un conductor de retorno común que se podía suprimir si el consumo era equilibrado, y el montaje en circuito cerrado (*montaje en triángulo*), con tres conductores solamente. Fue el artífice, junto con Oskar Von Miller (fundador del Museo de la Ciencia de Munich), de la primera instalación de transporte de energía a gran distancia entre Lauffen y Frankfurt; constaba de un alternador de 32 polos que producía una tensión con fuerza de 86 V y que con ayuda de un transformador elevaba a 14.000 V; la línea tenía una longitud de 175 km y se construyó para la Exposición Internacional de 1891. Se le deben también inventos específicos con dinamos trifilares.

KENNEDY, Alexander Blackie William (1847-1928). Ingeniero inglés. Estudió en la Escuela de Minas de Londres. Fue catedrático de ingeniería civil y mecánica en *University College* (1874), creando el primer laboratorio de ensayo de máquinas, preocupado por dar enseñanzas prácticas a los estudiantes. Sus primeros trabajos se refieren a cinemática y dinámica de máquinas. A partir de 1899 se dedicó a la ingeniería eléctrica. Trabajó en la *Westminster Electric Supply Co.* y diseñó numerosas centrales eléctricas y sistemas de distribución de muchas ciudades inglesas. También proyectó instalaciones de tracción eléctrica. Fue presidente de las siguientes instituciones: Ingenieros Mecánicos (1894), Ingenieros Civiles (1906) y miembro de la Institución de Ingenieros Eléctricos. Elegido *Fellow de la Royal Society* en 1887. Recibió el Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Glasgow (1894), Birmingham (1909) y Liverpool (1913).

LANGDON-DAVIES, Walter (1867-1924). Ingeniero inglés. Estudió en la Escuela de Minas de Londres. Inventó en 1891 el motor asíncrono monofásico. Se trasladó más tarde a Vancouver para trabajar como ingeniero consultor de la *British Columbia*. A su vuelta a Inglaterra creó la empresa Daysohms Welding para construir equipos dedicados a la soldadura eléctrica y desarrollar parte de sus inventos. Tenía una gran pasión por los descubrimientos eléctricos; sus métodos de investigación no eran muy ortodoxos y se dejaba llevar por su instinto e intuición que la mayor parte de las veces era el camino correcto: construía un prototipo y a continuación hacía pruebas experimentales; entonces corregía su teoría y adaptaba el modelo a los resultados. Fue miembro del IEE desde 1919.

MCALLISTER, Addams Stratton (1875-1946). Ingeniero americano. Se graduó en ingeniería eléctrica en la Universidad de Pennsylvania (1901). En este mismo año obtuvo el título de ingeniero mecánico en la Universidad de Cornell, alcanzando el grado de Doctor en esta Universidad en el año 1905. Fue profesor ayudante de Física en Cornell desde 1901 a 1904, compartiendo en este último año el puesto anterior con el de ayudante de ingeniería eléctrica. Desde 1905 a 1913 se hizo cargo de la dirección de la misma. Desde 1915 hasta su jubilación en 1944 ocupó diferentes puestos de responsabilidad en la *National Bureau of Standards* de Washington, compartiendo este trabajo con el de profesor asociado de ingeniería eléctrica de la Universidad de Pennsylvania. Escribió varios libros de texto entre los que cabe mencionar el que lleva por título *Alternating Current Motors*, que le dio fama mundial por haberse tomado como libro básico en muchas universidades del mundo. Fue vicepresidente del IEEE entre 1917 y 1918. Perteneció a gran número de organizaciones científicas: Sociedad Alumbrado, ASME y otras.

STURGEON, William (1783-1850). Físico inglés. Se educó en el ejército. En 1823 puso en práctica la noción de solenoide expuesta por Ampère. Su propia aportación fue quizá accidental y consistió en enrollar alrededor de un núcleo de hierro el hilo conductor, observando que aumentaba la fuerza magnética. Sturgeon había inventado el electroimán, aunque más tarde Henry mejoraría el diseño. Inventó también un nuevo tipo de galvanómetro y fundó el primer diario inglés dedicado a la electricidad.

THOMSON, Elihu (1853-1937). Ingeniero americano. Thomson nació en Manchester pero cuando él tenía cinco años su familia se trasladó a Philadelphia. En Estados Unidos transcurrió toda su carrera profesional. Estudio en la *Central High School* y al acabar su formación ingresó en la empresa de E. J. Houston, que era profesor de su Escuela; allí desarrolló un sistema de alumbrado eléctrico por arco y más tarde fundaron ambos la compañía *Thomson-Houston*, que en 1892 se asoció con la Edison General Electric Co. para formar la hoy conocida multinacional *General Electric*. Thomson

permaneció como ingeniero consultor en esta empresa el resto de su vida. Dotado de una gran inventiva, Thomson obtuvo patentes por sus mejoras en el diseño de motores de c.a. y transformadores. Inventó un generador de alta frecuencia, etc. Hizo contribuciones importantes en radiología, mejorando los tubos de rayos X y siendo pionero en hacer radiografías estereoscópicas. Se le atribuyen más de 700 patentes en todos los campos de la ingeniería eléctrica. Fue Rector del *Massachusetts Institute of Technology* entre 1921 y 1923.

Veinott, Cyril G. (1905-2001). Ingeniero americano. Se graduó en la Universidad de Vermont (1926). Trabajó en la compañía Westinghouse, dedicándose al diseño y desarrollo de motores eléctricos de pequeña potencia. En 1953 ingresó en la *Reliance Electric Co.*, donde fue pionero en la aplicación de los ordenadores al diseño de motores fraccionarios. Autor de numerosos artículos sobre máquinas eléctricas. Escribió varios libros sobre diseño de motores fraccionarios y sobre cálculo y construcción de motores de inducción. Fellow del IEEE en 1948. En 1951 se le otorgó el Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Vermont. Recibió en 1977 la medalla Tesla del IEEE y en el año 2000 la medalla de honor.

Referencias

Alger, P. L.: *Nature of Polyphase Induction Machines.* J. Wiley, New York, 1951.

Cochran, P.: *Polyphase Induction Motors: Analysis, Design, and Application.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1989.

Colli Lanzi, C.: *Ejes eléctricos: accionamientos y automatismos.* Ed. Técnicas Rede, Barcelona, 1964.

Cogdell, J. R.: *Fundamentos de Máquinas Eléctricas*. Pearson Educación, México, 2002.

Cortes, M.: *Curso Moderno de Máquinas Eléctricas Rotativas,* tomo III. Ed. Técnicos Asociados, Barcelona, 1973.

Chapman, S. J.: *Máquinas Eléctricas.* McGraw-Hill Latinoamericana, S. A. Bogotá, Colombia, 1987.

Chatelain, J.: *Machines Électriques. Traité d'électricité,* Vol. X. Ed. Georgi, Lausanne, 1983.

Chilikin, M.: *Accionamientos eléctricos.* Ed. Mir, Moscú, 1972.

Dagneaux, J; Lully, R.: *Electrotecnia. Teoría general y máquinas de corriente continua y de corriente alterna. Tomo II.* Editorial Dossat, S.A., Madrid, 1962.

Del Toro, V.: *Electric Machines and Power Systems.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.

Draper, A.: *Electrical Machines*. Longman Group, London, 1971.

Engelman, R. H.: *Static and Rotating Electromagnetic Devices.* Marcel Dekker, Inc., New York, 1982.

Fitzgerald, A. E.; Kingsley, Ch.; Umans, S. D.: *Electric Machinery*, Fourth Ed. (S. I.). McGraw-Hill Book Co., New York, 1985.

Fouillé, A.: *Électrotechnique a l'usage des ingénieurs. Tome 2: Machines Électriques*. *Huitième Édition;* Paris, 1969.

González-Llanos, J. M.: *Curso de Máquinas Eléctricas. Tomo II.* Editorial Litografía e Imprenta Roel, La Coruña, 1955.

Ivanov-Smolensky, A. V.: *Electric Machines,* tomo 2. Mir Publishers, Moscow, 1982.

Kosow, I.: *Electric Machinery and Transformers.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

Kostenko, M. P.; Piotrovski: *Máquinas Eléctricas,* tomo II. Ed. Mir, Moscú, 1975.

Kovacs, P. K.: *Transient Phenomena in Electrical Machines.* Elsevier, Akademiai Kiadó, Budapest, 1984.

LAITHWAITE, E. R.: *Máquinas de Inducción Especiales.* Ed. Labor, Barcelona, 1976.

LANGSDORF, A. S.: *Teoría de las máquinas de C.A.* Ed. Castillo, Madrid, 1967.

LLADONOSA, V.: *Arranque de motores mediante contactores. Parte III: por conmutación estrella-triángulo resistencias-triángulo*. Marcombo Boixareu Editores. Barcelona, 1987.

MABLEKOS, V. E.: *Electric Machine Theory for Power Engineers.* Harper & Row Pub., New York, 1980.

MATSCH, L. W.: *Máquinas Electromagnéticas y Electromecánicas.* Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A., México, 1972.

MCPHERSON, G.: *An Introduction to Electrical Machines and Transformers.* John Wiley & Sons, New York, 1981.

MOELLER, F.; KUBLER, E.; WERR, TH.: *Electrotecnia general y aplicada,* tomo II, 1.ª parte. Ed. Labor, Barcelona, 1961.

NAGRATH, I. J.; KOTHARI, D. P.: *Electric Machines.* Tata McGraw-Hill Pub., New Delhi, 1985.

O'KELLY, D.: *Performance and Control of Electrical Machines*. McGraw-Hill Book Co., London, 1991.

RAMSHAW, R.; VAN HEESWIJK, R. G.: *Energy Conversion, Electric Motors and Generators.* Saunders College Publishing, A Division of Holt, Rinehart and Winston, Philadelphia, 1990.

RAP, J.: *Teoría y cálculo de los bobinados eléctricos.* Editorial Vagma, Bilbao, 1973.

RAWCLIFFE, G. H.; BURBIDGE, R. F.; FONG, W.: *Induction motor speed changing by pole-amplitude modulation.* Proceeding IEE, 105A, pp. 411-419, (1958); *Speed-changing induction motors further development in p.a.m., Ibid,* 107A,pp. 513-528, (1960).

SAY, M. G.: *Alternating Current Machines.* Pitman Pub Co., London, 1976.

SEGUIER, G.; NOTELET, F.: *Electrotechnique Industrielle,* Technique et Documentation, París, 1977.

Siemens: *Manual de Baja Tensión. Indicaciones para la selección de aparatos de maniobra, instalaciones y distribuciones*. Siemens Aktiengesellschaft, Berlin, 1984.

SLEMON, G. R.; STRAUGHEN, A: *Electric Machines.* Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1980.

SMEATON, R. W.: *Motor Application and Maintenance Handbook.* McGraw-Hill, New York, 1969.

SOLARI, C.: *Macchine Elettriche (funzionamento e prove). Volume secondo. Macchine a corrente alternate.* Editores Ulrico Hoepli, Milano, 1947.

STEIN, R.; HUNT, W. T.: *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines.* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.

THALER, E. J.; WILCOX, M. L.: *Máquinas eléctricas: Estado dinámico y permanente.* Ed. Limusa-Wiley S.A., México, 1969.

VEINOTT, C. G.: *Motores Eléctricos de Potencia Fraccionaria y Subfraccionaria.* Ed. Marcombo, Barcelona, 1978.

WILDI, TH.: *Tecnología de los Sistemas Eléctricos de Potencia.* Ed. Hispano Europea S.A., Barcelona, 1983.

YAMAMURA, S.: *Theory of Linear Induction Motors.* Halsted Press Book J. Wiley, New York, University of Tokyo, 1972.

CAPÍTULO 5

Máquinas síncronas

5.1. INTRODUCCIÓN

Las máquinas síncronas son máquinas eléctricas cuya velocidad de rotación n (r.p.m.) está vinculada rígidamente con la frecuencia f de la red de corriente alterna con la cual trabaja, de acuerdo con la expresión:

$$n = \frac{60\,f}{p} \tag{5.1}$$

donde p es el número de pares de polos de la máquina.

Las máquinas síncronas, como cualquier otro convertidor electromecánico de la energía, están sometidas al principio de reciprocidad electromagnética, pudiendo funcionar tanto en régimen generador como en régimen motor. Sin embargo, en la práctica de las instalaciones eléctricas es más frecuente su empleo como generadores, para producir energía eléctrica de corriente alterna (**alternadores**) en las centrales eléctricas a partir de fuentes primarias de energía hidráulica, térmica o nuclear. Las frecuencias industriales de las tensiones generadas oscilan entre los 50 Hz en Europa y 60 Hz en gran parte de América. En aplicaciones especiales, como es el caso de la aeronáutica, se utilizan frecuencias más elevadas, del orden de los 400 Hz, lo que trae como consecuencia una reducción del tamaño y peso de los equipos de a bordo.

En la generación de energía eléctrica a pequeña escala se emplean alternadores acoplados a motores de combustión interna (que se denominan *grupos electrógenos*), que se utilizan como equipos de emergencia en hospitales, aeropuertos, salas de ordenadores, centrales telefónicas, etc., y que entran en servicio en el momento que falta la tensión de la red. También se utilizan estos grupos en el suministro de energía a instalaciones remotas o aisladas, alejadas de las redes de distribución de energía eléctrica, como es el caso de obras civiles y en ciertas aplicaciones rurales: regadíos, granjas, etc.

Como ya se ha indicado antes, las máquinas síncronas son susceptibles de funcionar también convirtiendo la energía eléctrica en mecánica, lo que da lugar al régimen de marcha como **motor síncrono**. Estos motores se emplean en aquellos accionamientos industriales que requieren velocidades de transmisión constantes, teniendo además la ventaja frente a los motores asíncronos de poder regular simultáneamente el f.d.p. con el cual trabaja, lo que es de gran importancia en cierto tipo de industrias: cemento, metalúrgicas, etc., ya que se evita la colocación de condensadores para reducir la potencia reactiva absorbida por la instalación. Cuando la máquina síncrona trabaja con f.d.p. capacitivo se dice que funciona como compensador o **condensador síncrono**. Las centrales eléctricas de bombeo constituyen un ejemplo

singular de funcionamiento de las máquinas síncronas en sus dos formas básicas. Estas centrales están constituidas por un grupo binario: turbina y máquina síncrona. Por el día se aprovecha el salto hidráulico para mover la turbina que hace girar el alternador, generándose energía eléctrica. Por la noche o, en general, en las horas de menor consumo, coincidiendo con el valle de la curva de demanda, la máquina síncrona funciona como motor, aprovechando la energía eléctrica sobrante de otros tipos de centrales (generalmente térmicas y nucleares), de tal forma que por medio de la turbina se bombea agua de un embalse situado aguas abajo de la presa de la central hasta otro embalse superior, provocando un aumento del nivel de este último, que permite en horas de mayor consumo tener un remanente mayor de energía acumulada, lo que mejora el rendimiento general de toda la instalación. En este modo de funcionamiento, el motor puede trabajar también como condensador síncrono, mejorando el f.d.p. de la red.

En este capítulo, dedicado al estudio de las máquinas síncronas, comenzamos analizando los aspectos constructivos de las mismas, en sus dos versiones clásicas: de **polos salientes**, empleadas en las centrales hidráulicas, y de polos lisos o **rotor cilíndrico**, que se utilizan en las centrales térmicas (convencionales o nucleares). Se citan también los procedimientos de refrigeración utilizados para evacuar las pérdidas que se producen. Se dan esquemas de los circuitos de excitación que emplean estas máquinas y el modo en que se realiza la regulación de tensión. Continúa el capítulo con el estudio del principio de funcionamiento de un alternador. Primeramente se analiza el comportamiento en vacío, demostrando la expresión de la f.e.m. inducida y recordando la influencia de los factores de devanado en la obtención de una buena forma de onda de la tensión de salida (que ya se adelantó en el Capítulo 2). Se explica luego el funcionamiento en carga, analizando con detalle el fenómeno de la reacción de inducido, tan importante en estas máquinas.

A continuación, se construye el diagrama fasorial del alternador, que constituye el método general de cálculo de la f.m.m. necesaria en la excitación para conseguir un funcionamiento con una tensión de salida para una determinada magnitud y f.d.p. de la carga. Se define el concepto de regulación de tensión y se aplica el diagrama para determinar su valor. Se hace más tarde un análisis lineal del alternador, cuyo objetivo está en conseguir un circuito equivalente de estas máquinas. Se explica para ello el método de Behn-Eschenburg o de la **impedancia síncrona**, que permite traducir las f.m.m.s. en f.e.m.s. proporcionales, lo que simplificará más tarde el tratamiento analítico del comportamiento del alternador. Se describen luego los tipos de ensayos necesarios para la determinación de la impedancia síncrona. En la pregunta siguiente se hace un análisis no lineal del alternador para tener en cuenta la saturación de la máquina. Se introduce el concepto de triángulo de Potier, que permite calcular simultáneamente la reactancia de dispersión y la f.m.m. de reacción de inducido. Los métodos anteriores se aplican a máquinas de rotor cilíndrico. Es por ello que se introduce luego el análisis de las máquinas de polos salientes, en las que se deben considerar las reacciones tanto en el eje de los polos (**eje directo**) como en un eje a 90° de aquél (**eje cuadratura** o transversal). Se explica un método gráfico para determinar la orientación final del fasor de f.e.m.

Continuamos después con el estudio del funcionamiento de un alternador en una red aislada, explicando con detalle el mecanismo de actuación del regulador de velocidad (*governor*). Se explica la conexión de un alternador a la red: las condiciones que se deben cumplir y la forma de realizar la maniobra del acoplamiento con un sincronoscopio de lámparas. Se dan fórmulas de la potencia activa y reactiva que produce la máquina. Más tarde se analiza con detalle el funcionamiento de una máquina síncrona conectada a una red de potencia infinita, explicando los efectos que se obtienen al variar la excitación y al variar la entrada de potencia mecánica actuando sobre el regulador de velocidad. De esta forma se construyen diagramas

fasoriales que permiten comprobar los modos de funcionamiento de la máquina tanto como generador o como motor y compensador síncrono.

Se analiza luego el funcionamiento en paralelo de alternadores de potencias similares para explicar el procedimiento de variación de las potencias activas suministradas en función de las curvas de estatismo de los reguladores de velocidad. Se explica más tarde las características del motor síncrono y sus aplicaciones. Y se comenta la necesidad de incluir devanados amortiguadores en los polos para mejorar el comportamiento transitorio. El capítulo finaliza explicando la construcción de un ábaco que define los límites de funcionamiento de la máquina síncrona, lo que es de gran interés para los técnicos que están al frente de las centrales eléctricas y también se hace un análisis simplificado del cortocircuito transitorio del alternador para definir los conceptos de reactancia transitoria y subtransitoria, que tanta importancia tienen en el análisis dinámico.

5.2. ASPECTOS CONSTRUCTIVOS

Las máquinas síncronas, al igual que los demás tipos de máquinas eléctricas, están constituidas por dos devanados independientes:

a) *Un devanado inductor, construido en forma de arrollamiento concentrado o bien distribuido en ranuras, alimentado por corriente continua, que da lugar a los polos de la máquina.*
b) *Un devanado inducido distribuido formando un arrollamiento trifásico recorrido por corriente alterna.*

En las máquinas pequeñas, para potencias que no superan los 10 kVA, el devanado inductor se coloca normalmente en el estátor, en forma concentrada, sobre expansiones magnéticas denominadas polos salientes, estando situado el inducido en el rotor, formando generalmente tres fases, las cuales tienen salida al exterior por medio de tres anillos, como se muestra en la Figura 5.1.

En las máquinas síncronas grandes, que para el caso de alternadores pueden llegar a 1.000-1.500 MVA, la colocación de los devanados es inversa a la anterior, de tal forma que los polos quedan situados en el rotor y el devanado trifásico en el estátor. En esta situación la estructura del rotor se fabrica en dos versiones distintas, ya sea en forma de **polos salientes**

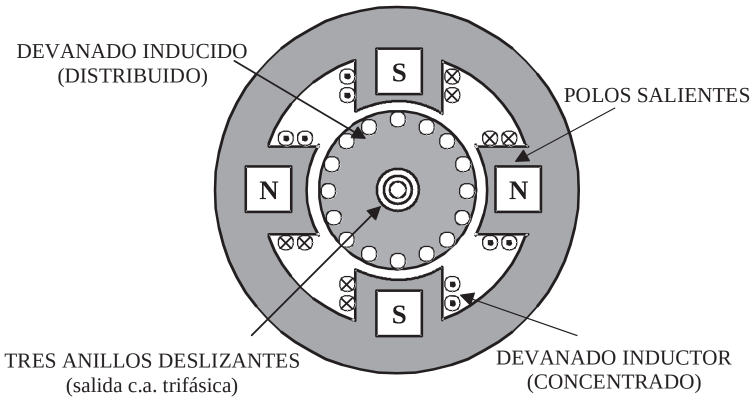


Figura 5.1. Máquina síncrona de baja potencia con el inducido en el rotor.

(Fig. 5.2*a*), ya sea en forma de **polos lisos** o rotor cilíndrico (Fig. 5.2*b*); en el primer caso los devanados de los polos son concentrados, mientras que para el rotor cilíndrico el devanado que se coloca en los polos (generalmente 2 o 4 polos) está distribuido en ranuras, cubriendo una parte de la circunferencia del rotor. La alimentación del devanado inductor se realiza por medio de dos anillos colocados en la parte móvil de la máquina por los que se introduce una corriente continua exterior.

La adopción de las formas constructivas indicadas en la Figura 5.2 para máquinas de gran potencia presenta diversas ventajas frente a la forma mostrada en la Figura 5.1. Por una parte, un inducido giratorio (Fig. 5.1) requiere tres anillos (caso de máquinas trifásicas) para recoger la tensión generada y enviarla al circuito exterior; estos anillos deben estar más o menos descubiertos y son difíciles de aislar, especialmente para las tensiones elevadas de 6.600 a 30.000 V a las que funcionan normalmente las máquinas síncronas; además, estos anillos suelen producir perturbaciones debidas a chispas, cortocircuitos, etc.; sin embargo, un inducido fijo (Fig. 5.2) no necesita anillos y sus conductores pueden llevar un aislamiento continuo desde las espiras hasta las barras del cuadro de salida. Debe tenerse en cuenta también que es más difícil aislar los conductores en un inducido giratorio que en un inducido fijo, debido a la fuerza centrífuga y a las vibraciones que produce la rotación. Cuando el inductor se sitúa en el rotor, la corriente que lo alimenta debe llegar hasta él por intermedio de dos anillos; como quiera que la tensión de alimentación del inductor raras veces sobrepasa los 1.000 V, y teniendo en cuenta que la potencia que absorbe es poco importante, los anillos en este caso no producen problemas graves.

Otro aspecto a considerar dentro de estas máquinas es la diferencia constructiva del rotor en sus dos formas básicas mostradas en la Figura 5.2. A este respecto se puede decir que la elección entre ambos tipos viene impuesta por la velocidad de rotación de la máquina, la cual depende a su vez del tipo de motor primario que la hace girar, y así, se distinguen los turbogeneradores, hidrogeneradores y los generadores diesel (más claramente se diría en estos últimos: generadores acoplados a motores diesel).

Los turbogeneradores están movidos por turbinas de vapor, las cuales tienen gran rendimiento si se mueven a velocidades elevadas. Estos alternadores tienen un rotor cilíndrico (Fig. 5.2*b*) devanado generalmente para dos polos, lo que corresponde a una velocidad síncrona, de acuerdo con (5.1), de 3.000 r.p.m. a 50 Hz. El eje turbina-alternador es horizontal y se

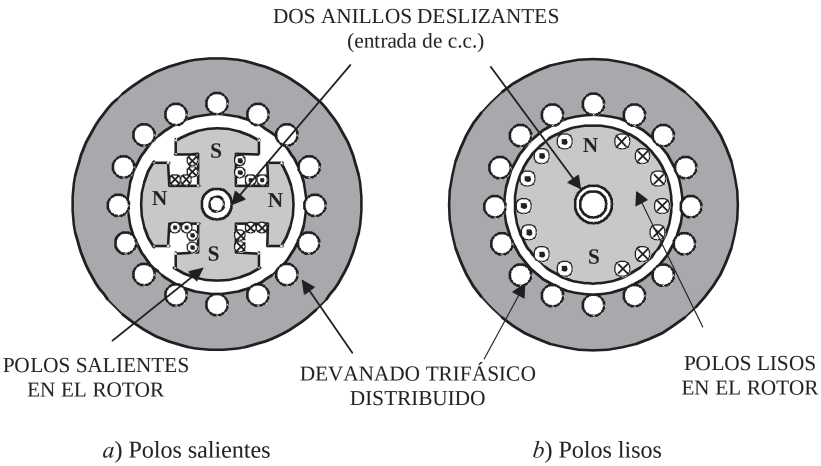


Figura 5.2. Tipos constructivos de máquinas síncronas.

construyen unidades con potencias hasta de 1.000 MVA. En el caso de turbogeneradores empleados en las centrales nucleares, debido a que las temperaturas y presión de vapor en la caldera son menores que en las centrales térmicas convencionales, los generadores son más económicos si se construyen con rotor cilíndrico pero formando cuatro polos (lo que representa una velocidad de sincronismo de 1.500 r.p.m. a 50 Hz); por otra parte, como el rendimiento económico global de estas centrales se eleva esencialmente aumentando la potencia del reactor nuclear e instalando para cada uno de ellos un grupo de turboalternadores de potencia adecuada, éste ha sido el estímulo principal para el rápido desarrollo y crecimiento de las potencias de estas máquinas, que se espera que en los próximos años superen los 2.000 MVA. Los hidrogeneradores están movidos por turbinas hidráulicas cuyo tipo y velocidad de giro dependen de las características del salto. En saltos de gran altura se emplean **turbinas Pelton** que impulsan grupos de eje horizontal que giran a velocidades comprendidas entre 750 y 375 r.p.m. En saltos medios se utilizan **turbinas Francis** con una disposición vertical del grupo, de tal forma que las velocidades de sincronismo utilizadas son menores que con alturas elevadas, pudiéndose llegar a valores cercanos a las 150 r.p.m. En saltos de pequeña altura (<30 m) se emplean **turbinas Kaplan** con el eje vertical, donde la velocidad del grupo es generalmente inferior a 100 r.p.m. Las potencias medias de los generadores hidráulicos oscilan entre 150 y 300 MVA y se han llegado a construir unidades de 750 MVA. Debido a las velocidades de giro tan reducidas en comparación con los turbogeneradores, se construyen en forma de polos salientes (Fig. 5.2*a*) con un gran número de ellos, generalmente entre 20 y 40 polos, aunque se han realizado unidades cercanas a los 100 polos. (La central de Bonneville, en Estados Unidos, tiene alternadores de 60 MVA, 15 kV, 96 polos, 60 Hz, 75 r.p.m.). Los generadores diesel están movidos por medio de motores de combustión interna a velocidades que no superan las 1.500 r.p.m., habiéndose construido unidades con potencias próximas a los 20 MVA.

Como quiera que la potencia asignada de una máquina es proporcional a su volumen, los turbogeneradores, al ser de gran velocidad, se construyen con un pequeño diámetro y una gran longitud axial, y de esta forma se reducen las fuerzas centrífugas a que están sometidos los devanados del rotor. Por ejemplo, un alternador de este tipo puede tener de 1 a 2 m de diámetro de rotor y de 10 a 12 m de longitud axial total. (Las velocidades lineales en la periferia del rotor oscilan entre los 125-145 m/s en las máquinas tetrapolares y 170-185 m/s en los turboalternadores bipolares de gran potencia). Los generadores hidráulicos, como son de menor velocidad, tienen un gran diámetro y una pequeña longitud axial. Por ejemplo, un alternador de 200 MVA tiene un diámetro total entre 5-7 m y una longitud axial de 2 a 3 m, pero se han construido unidades con cerca de 20 m de diámetro.

Las tensiones generadas por los alternadores no superan los 15 kV para potencias inferiores a 200 MVA; para potencias superiores las tensiones se elevan a 25-30 kV con objeto de reducir el volumen de cobre empleado en la construcción del inducido. Las corrientes de cada fase pueden llegar a 20 kA, por lo que es imprescindible la utilización de devanados con circuitos en paralelo. Las corrientes de excitación pueden alcanzar los 2,5 kA a 1 kV para generadores de 750 MVA. Las pérdidas que estas corrientes producen por su efecto Joule en los devanados deben evacuarse de una forma adecuada para evitar dañar los aislamientos*. En las pequeñas unidades y de baja velocidad es suficiente una refrigeración por aire que se

* Un turbogenerador de 1.000 MVA tiene un rotor de 1,25 m de diámetro y 7 m de longitud. El estátor pesa 300 Tm y el rotor 80 Tm. Las pérdidas totales a plena carga son del orden de 15 MW, lo que representa una energía calorífica de 13.106 kcal/hora, que debe evacuar al exterior.

mueve por convección natural; en unidades mayores es preciso recurrir a intercambiadores de calor aire-agua colocados en el exterior de la estructura del estátor. En las máquinas de potencias más elevadas empleadas en los turboalternadores se puede utilizar agua o hidrógeno. Las ventajas del hidrógeno frente al aire son varias, pero se deben destacar las siguientes: *a*) el hidrógeno tiene una densidad 1/14 veces la del aire, lo que reduce las pérdidas por ventilación y ruido; *b*) tiene un calor específico 14 veces el del aire, lo que supone una mayor capacidad de almacenamiento de calor; *c*) la conductividad térmica es 7 veces superior, lo que reduce los gradientes de temperatura. Al mismo tiempo, la ausencia de oxígeno hace incrementar la vida de los aislantes. Como consecuencia de todo ello, una refrigeración por hidrógeno a 1, 2 y 3 kp/cm^2 ($\approx$ de 1, 2 y 3.10^5 pascales) hace que la potencia asignada de estas máquinas pueda elevarse en un 15, 30 y 40 por 100, respectivamente, con relación a una refrigeración por aire.

5.3. SISTEMAS DE EXCITACIÓN

En el epígrafe 5.2 se ha señalado que los devanados que forman los polos de una máquina síncrona se alimentan con corriente continua; esta c.c. procede en los sistemas tradicionales de una dinamo excitatriz del tipo shunt que está montada en el eje del grupo y cuya salida se aplica al rotor del alternador por medio de unos anillos deslizantes con sus correspondientes escobillas. La **excitatriz** es un generador de c.c. convencional, en el que a veces se sustituye toda o parte de su excitación por una excitatriz piloto con objeto de mejorar la rapidez de respuesta.

En la Figura 5.3 se da una versión de este sistema, donde pueden apreciarse cada uno de estos elementos. (La línea de puntos indica que las tres máquinas están situadas en el mismo eje mecánico.) Las máquinas síncronas más pequeñas no suelen tener excitatriz piloto y la excitatriz principal trabaja en forma de derivación (*shunt*), alimentando directamente el inductor o campo del alternador.

Debido a las dificultades de conmutación en las dinamos cuando éstas giran a grandes velocidades, y en general para evitar la presencia del colector de delgas de las mismas, se han desarrollado desde hace algunos años excitatrices de c.a. que con ayuda de rectificadores de silicio alimentan con c.c. los polos del alternador. El campo de estas excitatrices proviene generalmente de otra excitatriz de c.a. con imán permanente cuya salida se ha rectificado previamente, como se indica en la Figura 5.4. Generalmente las excitatrices piloto producen una c.a. de una frecuencia cercana a los 400 Hz, mientras que la excitatriz principal es de 50 Hz.

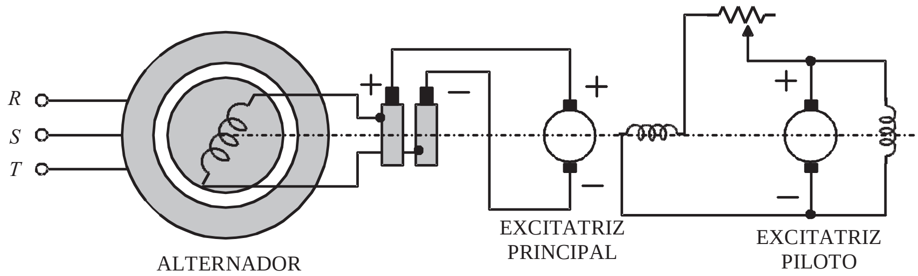


Figura 5.3. Sistema de excitación con dinamo excitatriz.

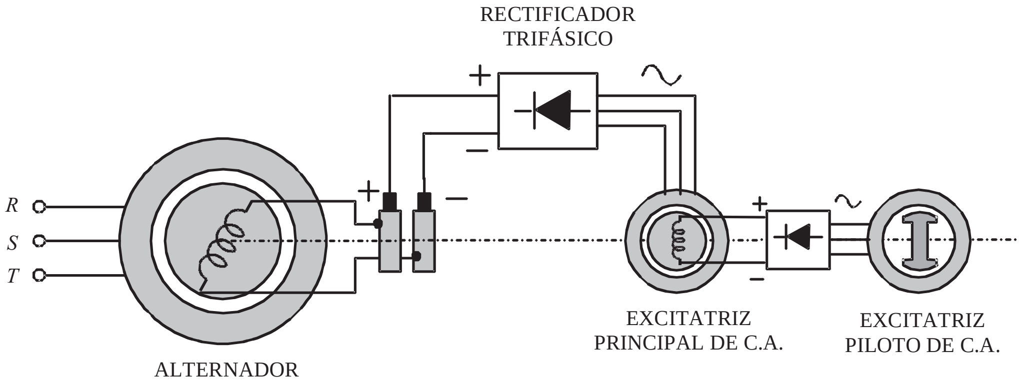


Figura 5.4. Sistema de excitación electrónico.

Modernamente se emplea un **sistema de excitación sin escobillas**. El esquema es similar al de la Figura 5.4 pero en el cual la excitatriz principal tiene una disposición inversa a la que aquí se presenta. En este caso el devanado trifásico de la excitatriz está colocado en el rotor y su devanado inductor en el estátor. La salida de c.a. de la excitatriz se convierte en c.c. por medio de rectificadores montados en el eje y que alimentan directamente el rotor del alternador sin necesidad de anillos ni escobillas (rectificadores giratorios). La regulación de tensión de los alternadores se realizaba en los albores de la electricidad por medio de reóstatos intercalados en el circuito de campo de la excitatriz principal, que eran maniobrados a mano; más tarde se construyeron reguladores automáticos (tipo Tirrill) que modificaban automáticamente la resistencia del circuito de excitación. También se utilizaron máquinas especiales para la regulación de tensión, como las amplidinas y rototroles, que eran esencialmente máquinas rotativas de c.c. amplificadoras, que disponían de un número de escobillas doble que el de las dinamos convencionales. En la década de 1940-1950 se utilizaron también amplificadores magnéticos. Hoy día la regulación de tensión es electrónica y se realiza por medio de tiristores o rectificadores controlados de silicio que permiten obtener una c.c. de amplitud variable sin que existan pérdidas apreciables, a base de actuar sobre un electrodo auxiliar denominado **puerta** (*gate*). En los alternadores modernos empleados en los grupos electrógenos para suministro de energía eléctrica a instalaciones aisladas se recurre a la autoexcitación del alternador, que consiste en obtener la c.c. necesaria para los polos de la propia salida del generador, que luego se rectifica. El *cebado* de la máquina se realiza merced al magnetismo remanente existente en los polos. En cualquier caso, los generadores disponen de sistemas realimentados que permiten estabilizar la tensión de salida de la máquina, aunque ésta trabaje con cargas variables, lo que da una gran autonomía y seguridad al servicio.

5.4. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO DE UN ALTERNADOR

5.4.1. Funcionamiento en vacío

Consideremos el esquema simplificado de la máquina síncrona de polos salientes mostrado en la Figura 5.5. Al girar el rotor a la velocidad *n*, se inducen f.e.m.s. en los arrollamientos de

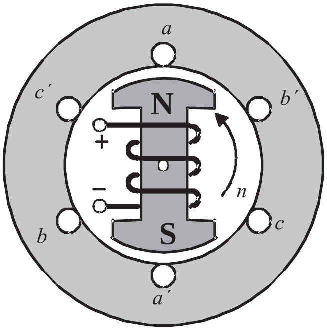


Figura 5.5. Máquina síncrona trifásica. Principio de funcionamiento.

las tres fases del estátor, que van desfasadas en el tiempo 120°, que corresponden a la separación espacial (en grados eléctricos) existente entre las bobinas del estátor.

Si consideramos que las N espiras de cada fase están concentradas, y que el flujo concatenado por las mismas varía entre los límites $+\Phi_m$ y $-\Phi_m$, el valor medio de la f.e.m. inducida en cada fase, en el transcurso de medio período de la corriente alterna, será:

$$E_{med} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} e dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}\left(-N\frac{d\Phi}{dt}\right)dt \qquad (5.2)$$

es decir:

$$E_{med} = -\frac{2}{T}N\int_{+\Phi_m}^{-\Phi_m} d\Phi = 4\,fN\Phi_m \qquad (5.3)$$

Como quiera que el valor eficaz de la f.e.m. es igual al valor medio multiplicado por el coeficiente de forma K_f de la onda producida, la f.e.m. eficaz E tendrá una magnitud:

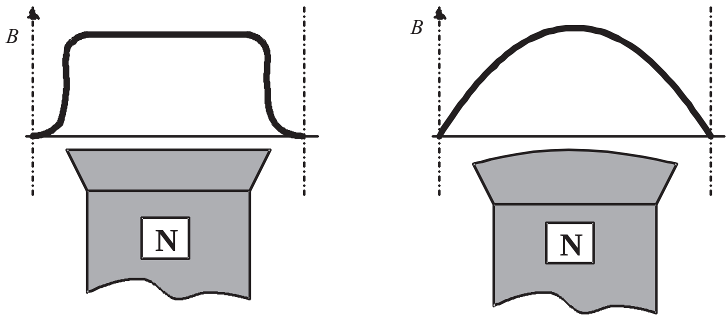
$$E = 4\,K_f\,fN\Phi_m \qquad (5.4)$$

Teniendo además en cuenta que las espiras de cada fase están distribuidas sobre la periferia del estátor, pudiendo existir al mismo tiempo acortamientos en cada bobina, la f.e.m. resultante vendrá afectada por los coeficientes de devanado analizados en el Capítulo 2. En consecuencia, la expresión (5.4) se convertirá en:

$$E = 4\,K_f K_d K_a\,fN\Phi_m \qquad (5.5)$$

que es la ecuación general de la f.e.m. inducida en un alternador y que coincide con la (2.112) ya demostrada en el Capítulo 2, donde K_d representa el coeficiente de distribución y K_a el coeficiente de acortamiento de los devanados del inducido.

La variación con el tiempo de la f.e.m. anterior debe ser sinusoidal; sin embargo, ha de tenerse en cuenta que la forma de la misma es una imagen del modelo de distribución de la componente radial de la inducción B a lo largo del entrehierro, de acuerdo con la expresión $e = Blv$. En consecuencia, para obtener una f.e.m. sinusoidal en los devanados del estátor es necesaria una distribución sinusoidal de la inducción a lo largo de la periferia del rotor. Si el entrehierro es de espesor constante, dicha distribución debe considerarse más bien de forma trapecial (Fig. 5.6*a*), es decir, constante debajo de cada polo y rápidamente decreciente hasta las líneas interpolares. Para conseguir que la distribución de B sea sinusoidal, habrá que aumentar el entrehierro desde el centro del polo hasta uno de sus extremos, ya que de esta



a) Entrehierro uniforme *b*) Entrehierro variable (sinusoidal)

Figura 5.6. Distribución de inducción en el entrehierro.

forma aumenta la reluctancia gradualmente, lo que conduce a una forma de *B* que se acerca más a la sinusoidal. En general, no se llegará a la senoide perfecta y, por tanto, la f.e.m. resultante contendrá armónicos. Estos armónicos se reducen por las leyes del devanado del inducido, por medio de la distribución y acortamiento de las bobinas que lo componen, como ya se demostró en el epígrafe 2.9 del Capítulo 2. En las máquinas con rotor cilíndrico, la obtención de una forma de *B* sinusoidal se logra por una adecuada distribución del arrollamiento de excitación a lo largo de la periferia del rotor.

Una característica importante del funcionamiento en vacío de la máquina síncrona, la constituye la curva $E_0 = f(I_e)$, que expresa la f.e.m. en bornes de la máquina estando desconectada la carga en función de la corriente de excitación o, en definitiva, de los amperios-vuelta/polo que recorren los devanados inductores. La determinación de esta curva se realiza por vía experimental, para lo cual es necesario hacer girar la máquina a la velocidad de sincronismo por medio del motor primario: turbina, diesel, etc., y entonces se debe cambiar gradualmente la corriente de excitación desde cero hasta un cierto valor máximo correspondiente a la saturación y desde este último nuevamente hasta cero. Los valores medidos de la f.e.m. E_0 en función de la corriente de excitación I_e se representan mediante dos ramas, una ascendente y otra descendente, de la característica. Sin embargo, esta divergencia es pequeña y depende de la influencia de la histéresis en los polos y en el yugo de la máquina. La característica en vacío representa la curva media entre ambas ramas y tiene la forma indicada en la Figura 5.7.

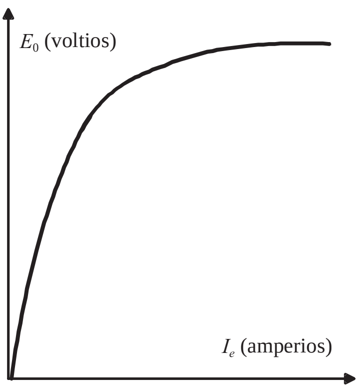


Figura 5.7. Curva de vacío de un alternador.

Se observa que la característica anterior es similar a la curva de magnetización del hierro, conclusión lógica si se tiene en cuenta que la curva de vacío corresponde a la solución experimental del circuito magnético de la máquina, en la que se ha sustituido la f.m.m. por una magnitud proporcional que es la corriente de excitación y donde se ha intercambiado el flujo por la f.e.m. de acuerdo con la relación (5.5).

5.4.2. Funcionamiento en carga. Reacción del inducido

Si estando funcionando un alternador en vacío, con una determinada corriente de excitación, se cierra el circuito del inducido conectando una impedancia de carga a sus terminales, se obtiene una tensión V en bornes de la máquina inferior al valor que presentaba en vacío E_0.

La reducción en la tensión de salida del generador es debida a la aparición de una corriente en el inducido que provoca una caída de tensión en este circuito a la par que produce una f.m.m. que reacciona con la del inductor modificando el flujo del entrehierro de la máquina. La caída de tensión en el circuito del inducido se debe a la impedancia que presentan los arrollamientos de este devanado. Por una parte existe la resistencia R del bobinado, que provoca una caída de tensión muy pequeña (del 1 al 2 por 100 en los grandes generadores) y que en la mayoría de los casos se suele despreciar. Se debe considerar también la reactancia del inducido, que se debe al flujo de dispersión del estátor que no interacciona con el flujo del rotor. Este flujo es el que se desarrolla en las cabezas de las bobinas (Fig. 5.8) y dentro de las ranuras donde se sitúa este devanado. Este flujo de dispersión permite definir un coeficiente de autoinducción L_σ, que multiplicado por la pulsación de la corriente, da lugar a la **reactancia de dispersión** del estátor:

$$X_\sigma = L_\sigma \omega = L_\sigma 2\pi f \tag{5.6}$$

En esta reactancia tiene lugar la caída de tensión inductiva de la máquina síncrona, cuya magnitud a plena carga puede alcanzar valores del 10-15 por 100 de la tensión asignada del inducido. Más difícil de analizar es el efecto que provoca la f.m.m. del inducido sobre la f.m.m. del inductor, modificando el flujo del entrehierro de la máquina. Este fenómeno se conoce con el nombre de **reacción del inducido** y sobre él tiene influencia tanto la magnitud como la fase de la corriente del estátor. Cuando se trata de alternadores trifásicos, las corrientes del inducido al circular por devanados desfasados 120° en el espacio producen una f.m.m. de reacción que gira en el espacio a la velocidad de sincronismo, es decir, a la misma veloci-

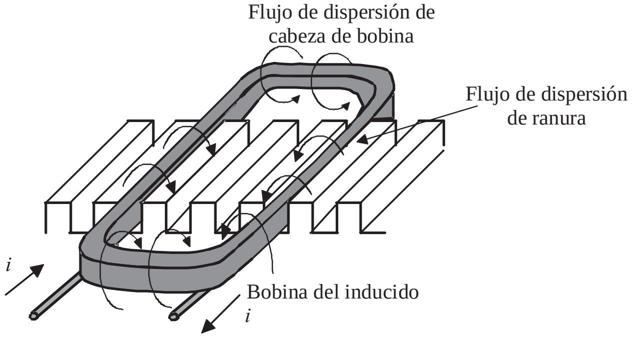


Figura 5.8. Flujos de dispersión en el devanado del inducido.

dad que el rotor. Esta f.m.m. influye sobre la f.m.m producida por el devanado inductor y puede deformar, reducir o ampliar el campo de excitación de la máquina, dependiendo de la fase de las corrientes que recorren el inducido. Para estudiar este fenómeno con más detalle, considérese el esquema de la Figura 5.9*a*, en la que se muestra una parte del desarrollo de una máquina síncrona con polos salientes en el rotor, con un devanado inducido de doble capa (dos ramas de bobina en cada ranura). Si se prescinde de los armónicos, las distribuciones de f.m.m. podrán considerarse sinusoidales. Vamos a analizar la composición de las f.m.m.s. del inductor y del inducido según sea la carga resistiva, inductiva o capacitiva:

a) Carga resistiva

Si la carga es resistiva pura, el f.d.p. es la unidad, y si se prescinde de la impedancia del inducido se podrá considerar que el desfase entre la f.e.m. y la corriente es $\varphi = 0$. Para calcular el sentido y magnitud de las f.e.m.s. inducidas en los conductores habrá que aplicar la ley de Faraday en la forma : $e = \mathbf{L}\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, donde **v** indica un vector velocidad, contrario al sentido de giro del rotor e igual a su velocidad periférica, lo cual es el resultado de tener en cuenta el movimiento relativo entre ambos circuitos (es como considerar una máquina síncrona de inductor fijo e inducido móvil). Las f.e.m.s. serán máximas cuando los lados de las espiras se encuentren exactamente frente a los centros de los polos, es decir, en el instante representado en la Figura 5.9*a*. Como el desfase entre la f.e.m. y la corriente es nulo, este instante coincide también con los valores máximos de la intensidad, cuyos sentidos serán entrantes al plano de la figura para los conductores situados en ese momento frente a un polo

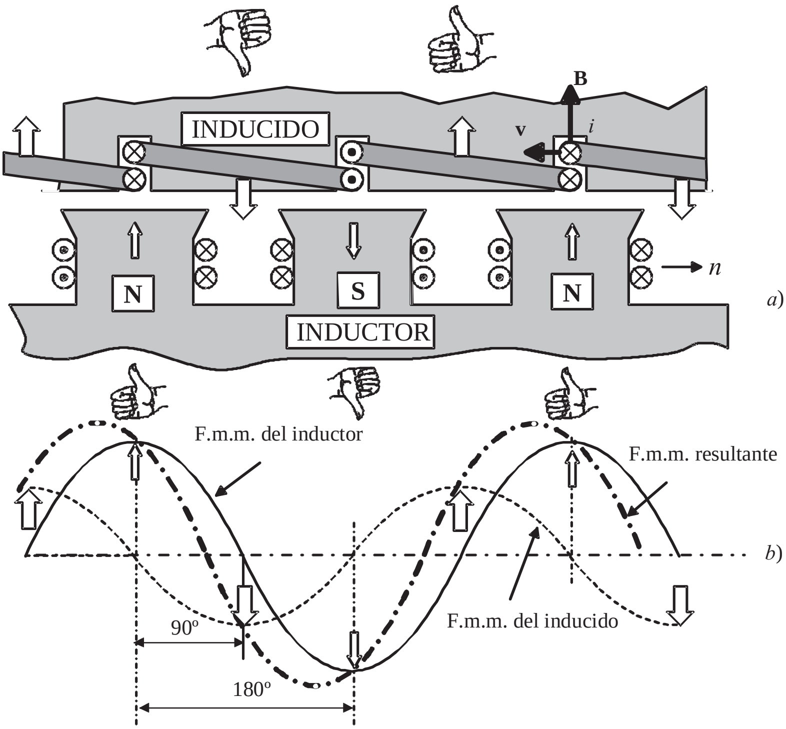


Figura 5.9. Reacción de inducido con carga resistiva.

norte. En la Figura 5.9*b* se muestra la composición de las f.m.m.s. de ambos circuitos, que sería la misma que la de los flujos que resultarían en la situación ideal de que el entrehierro fuera uniforme y se prescindiera de la saturación magnética. **Se observa que para una carga resistiva, la reacción de inducido es transversal**, es decir, está desplazada 90° de la f.m.m. del inductor, lo que conduce a una distribución asimétrica de la f.m.m. resultante debajo de los polos, de tal forma que la inducción que aparece debajo de la arista posterior de la zapata polar aumenta, mientras que disminuye en la parte anterior respecto a los valores que la máquina presentaba en vacío, cuando no existía reacción de inducido.

b) Carga inductiva

Cuando la carga es inductiva pura, el desfase entre la f.e.m. y la corriente es de 90°. En este caso, el máximo de las corrientes estará desplazado en el espacio respecto del máximo de las f.e.m.s. en un ángulo de 90° en sentido contrario al del giro del rotor. Como quiera que las f.e.m.s. son máximas cuando los lados de las espiras están en el centro de los polos, las corrientes serán máximas en el instante representado en la Figura 5.10*a* (es decir, cuando el polo norte del rotor se halle adelantado 90° eléctricos respecto a la posición de máxima f.e.m). En la Figura 5.10*b* se muestra la composición de f.m.m.s.; se observa que la f.m.m. de reacción del inducido se opone a la f.m.m. del inductor, lo que significa **que una carga inductiva pura produce una reacción antagonista o desmagnetizante,** que tiende a reducir la f.m.m. resultante, haciendo disminuir el flujo en el entrehierro, provocando en consecuencia una reducción de la f.e.m. inducida.

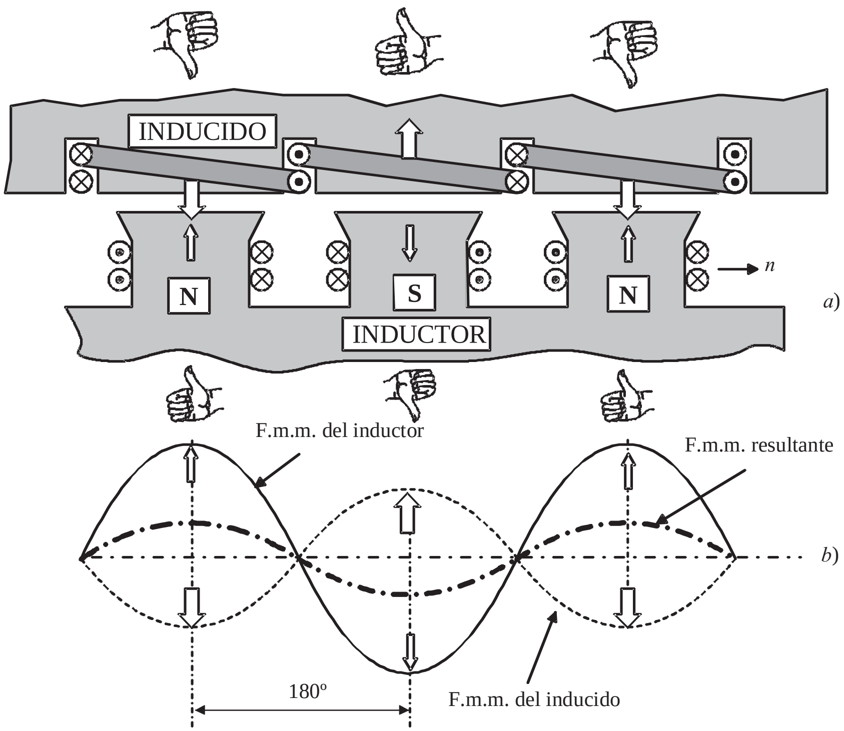


Figura 5.10. Reacción de inducido con carga inductiva.

c) Carga capacitiva

Cuando la carga es capacitiva pura, la corriente del estátor alcanzará su máximo, 90° eléctricos antes de que el polo se enfrente a los conductores que forman las espiras del inducido, que es el momento en que es máxima la f.e.m. La situación es similar a la descrita en el caso anterior y se muestra en la Figura 5.11. Obsérvese que en esta ocasión se produce un refuerzo de la f.m.m. del inductor, lo que significa que las cargas capacitivas ayudan a la acción del campo de los polos provocando un **efecto magnetizante** sobre los mismos.

Cuando las cargas no son puras, presentan un desfase comprendido entre −90° y +90° y resultan unas reacciones del inducido que tienen componentes transversales o de eje cuadratura debidas a las componentes activas de las corrientes y otras longitudinales o de eje directo que actúan sobre los polos debidas a las componentes reactivas de las intensidades, y cuyo efecto es desmagnetizante o magnetizante dependiendo de si la componente es inductiva o capacitiva, respectivamente.

De esta manera en las máquinas síncronas, tanto de polos salientes como de rotor cilíndrico, la reacción del inducido provoca una variación de la f.m.m. resultante que actúa sobre el circuito magnético y que hace variar a su vez la magnitud del flujo en el entrehierro y en consecuencia el valor de la f.e.m. que se obtiene en el inducido.

Para obtener una f.e.m. en el estátor de forma sinusoidal es preciso que el flujo que produce la f.m.m. resultante sea también sinusoidal; para ello es necesario que las f.m.m.s. tanto del estátor como del rotor tengan también esta distribución. Esta condición se cumple con bastante precisión en las máquinas con rotor cilíndrico pero no así en las que tienen polos salientes, ya que en éstas la variación de reluctancia del rotor provoca una reacción del indu-

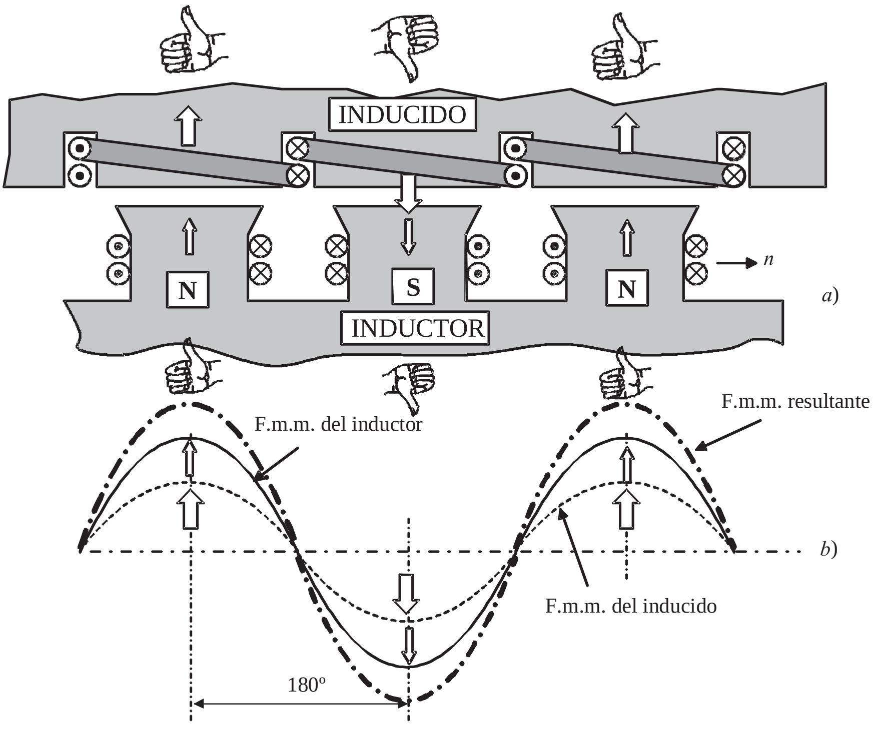


Figura 5.11. Reacción de inducido con carga capacitiva.

cido que se aleja de la forma senoidal. Por ello debe reducirse la influencia de esta reacción frente al campo inductor, lo que se consigue aumentando la reluctancia del circuito magnético de la máquina, para lo cual es preciso aumentar el entrehierro de la misma, aunque no excesivamente para no tener que elevar demasiado la f.m.m. que entonces sería necesaria en el inductor.

5.5. DIAGRAMA FASORIAL DE UN ALTERNADOR. REGULACIÓN DE TENSIÓN

El diagrama fasorial de un alternador determina de forma gráfica la relación existente entre la f.e.m. y la tensión en los diversos regímenes de funcionamiento de la máquina, estudiando al mismo tiempo la interacción entre las f.m.m.s. de excitación y de inducido que conducen a la f.m.m. resultante que origina el flujo en el entrehierro. En principio, para analizar este diagrama fasorial se va a considerar una **máquina síncrona con entrehierro uniforme** (rotor cilíndrico), ya que entonces la reacción del inducido no depende de la posición del rotor por ser la reluctancia idéntica en todas las posiciones. Se supondrá también que la reactancia de dispersión X_σ es constante, y que se pueden despreciar las pérdidas por histéresis en el hierro. Esta última condición equivale a decir que la f.m.m. resultante está en fase con el flujo que ella produce.

Consideremos una máquina síncrona funcionando en régimen generador con una tensión por fase **V**, que lleva una corriente inductiva en el inducido con un desfase de φ grados. Para determinar la f.e.m. resultante habrá que añadir a la tensión terminal las caídas de tensión producidas en la resistencia y reactancia de dispersión, tal como se muestra en el circuito de la Figura 5.12*a*, resultando:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{V} + R\mathbf{I} + jX_\sigma\mathbf{I} \tag{5.7}$$

cuya composición fasorial se muestra en la Figura 5.12*b*, donde se ha tomado la tensión terminal como referencia en el eje real. El flujo que se necesita para producir la f.e.m. anterior estará adelantado 90° respecto al fasor $\mathbf{E}_r$*, y si se prescinde de la histéresis, la dirección del

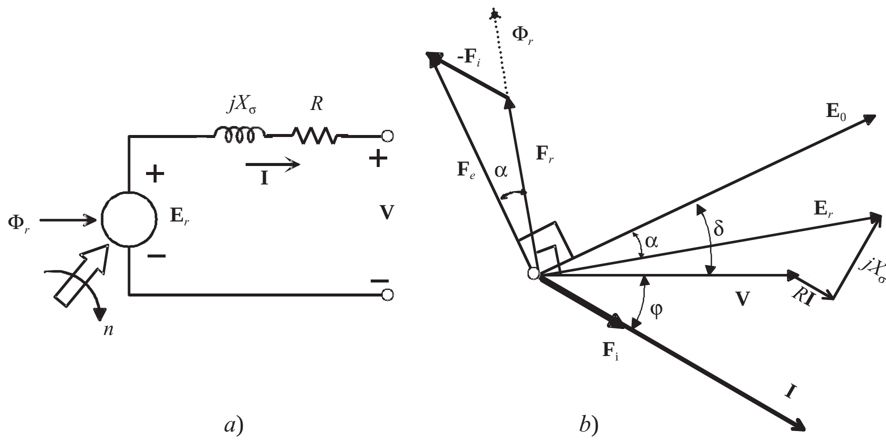


Figura 5.12. Circuito equivalente de un alternador. Diagrama fasorial.

* Téngase en cuenta que en el dominio temporal, la f.e.m. instantánea es: $e_r = -Nd\Phi/dt$ (siendo N el número de espiras por fase del inducido), por lo que en el campo fasorial el flujo magnético Φ_r se adelanta 90° a la f.e.m. $\mathbf{E}_r$.

flujo será también la que corresponde a la f.m.m. resultante $\mathbf{F}_r$. Ahora bien $\mathbf{F}_r$ es la suma de la f.m.m. de excitación o inductora $\mathbf{F}_e$ y la correspondiente a la reacción de inducido $\mathbf{F}_i$, es decir:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i \qquad (5.8)*$$

En consecuencia, la f.m.m. de excitación se obtiene sumando vectorialmente $\mathbf{F}_r$ y $-\mathbf{F}_i$, y teniendo en cuenta que esta última va en fase con la corriente del inducido que la origina, resulta la composición fasorial mostrada en la Figura 5.12*b*.

Si con esta excitación representada por la f.m.m. $\mathbf{F}_e$ se deja la máquina en vacío, al no existir reacción de inducido, es decir, se tiene $\mathbf{F}_i = 0$, la f.m.m. $\mathbf{F}_e$ se convierte en excitación resultante $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r$ y el flujo en el entrehierro aumenta colocándose en fase con $\mathbf{F}_e$ (Fig. 5.12*b*) y se determinará por medio de la curva de vacío de la máquina síncrona. El proceso anterior constituye el **método general** para calcular la f.m.m. necesaria en la excitación cuando la máquina suministra una corriente **I** a una tensión **V** determinada. Realmente el proceso físico es inverso, ya que partiendo de la f.m.m. de excitación y conociendo las características de la carga, se obtendrá una **V** y una **I** de salida. En la Figura 5.13 se muestra un esquema ilustrativo de las relaciones funcionales que se producen y que incluyen un lazo de realimentación (la salida interfiere con la entrada). Inicialmente se parte de una corriente de excitación $\mathbf{I}_e$ que produce una f.m.m. $\mathbf{F}_e$ y al girar el rotor se genera una f.e.m. que al conectar una carga en el inducido da lugar a una corriente de salida **I**. Realmente esta corriente **I**, mostrada en el esquema de la Figura 5.12*b*, representa la intensidad de una fase (por ejemplo, la fase *R*). Existen verdaderamente tres corrientes, $\mathbf{I}_R$, $\mathbf{I}_S$, $\mathbf{I}_T$, en el inducido de módulo *I*, que al estar desfasadas en el tiempo 120° eléctricos y recorrer devanados desfasados 120° eléctricos en el espacio dan lugar a una f.m.m. giratoria $\mathbf{F}_i$ de reacción de inducido que gira en sincronismo con la f.m.m. $\mathbf{F}_e$ de la excitación. Estas dos f.m.m.s. interaccionan (al girar a la misma velocidad) y dan lugar a una f.m.m. resultante $\mathbf{F}_r$ que a través de la curva de imanación del hierro de la máquina, que es **no lineal**, produce un flujo final Φ_r, que es el que origina la f.e.m. resultante $\mathbf{E}_r$ en el devanado del inducido (en cada fase). Debido después a la existencia de la resistencia *R* y reactancia de dispersión X_σ de las bobinas del estátor, se obtendrá una tensión **V** algo inferior a $\mathbf{E}_r$.

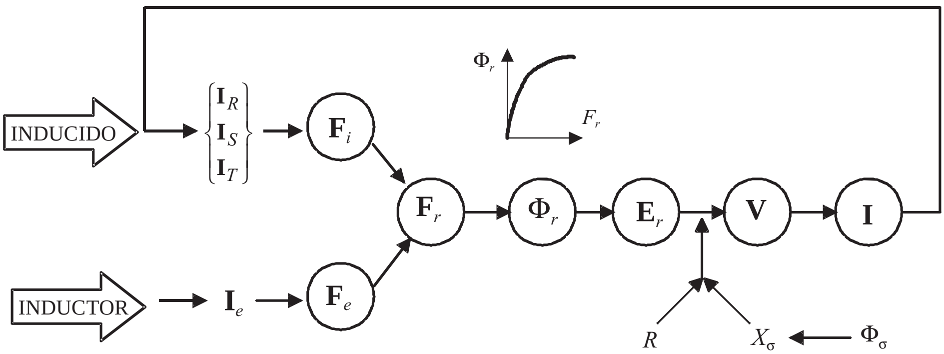


Figura 5.13. Relaciones funcionales entre las diversas variables de una máquina síncrona.

---

* Estas f.m.m.s. se calculan por polo. Si el inductor tiene N_e espiras/polo recorridas por una corriente I_e, la f.m.m. F_e será igual a N_eI_e. Sin embargo, la f.m.m. **máxima** producida en el inducido por polo vendrá expresada por la ecuación (4.47), tomando $m = 3$ para un alternador trifásico.

Se define la regulación de tensión de una máquina síncrona al cociente:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} \cdot 100\,\% \qquad (5.9)$$

que expresa el cambio en la tensión de bornes del generador de vacío a plena carga para una determinada excitación en los polos. Como se observa en la construcción fasorial de la Figura 5.12*b*, la regulación depende de la magnitud de la resistencia y reactancia de dispersión del inducido y también del valor de la f.m.m. de reacción que produce este devanado, que como se ha demostrado en el epígrafe 5.4.2 está íntimamente ligada con el f.d.p. de la carga. Con cargas resistivas y sobre todo con cargas inductivas, debido al efecto desmagnetizante de la f.m.m. de inducido, resulta una disminución de la tensión conforme crece la corriente de salida, lo que conduce a valores de la regulación positivos. Para cargas capacitivas, al tener la f.m.m. del inducido un efecto magnetizante, la tensión en carga es superior a la de vacío, lo que conduce a un valor de la regulación negativo.

La curva que representa la tensión en bornes del alternador en función de la corriente de la carga se denomina característica exterior. En la Figura 5.14*a* se representan tres de estas curvas, que corresponden, respectivamente, a factores de potencia resistivo, inductivo y capacitivo. Se ha partido para su construcción de un valor de la excitación tal, que se obtiene en vacío la tensión asignada en bornes. Se observa claramente que para cargas resistivas e inductivas la tensión va disminuyendo conforme crece la corriente de la carga. Para cargas capacitivas la tensión aumenta con la intensidad; sin embargo, para corrientes elevadas muy superiores a la asignada aparece también una reducción de la tensión debido a que las caídas de tensión internas (en la resistencia y reactancia de dispersión del inducido) son muy superiores al efecto magnetizante que produce la reacción de inducido. Todas las curvas cortan al eje de abscisas en un mismo punto I_{cc} que corresponde a la corriente de cortocircuito permanente.

Si se desea mantener constante la tensión en bornes de la máquina al variar la corriente del inducido, será preciso variar de forma adecuada la correspondiente excitación. Las curvas que muestran las relaciones entre las corrientes de excitación y las corrientes de carga para una tensión de salida constante se indican en la Figura 5.14*b* para diversos factores de potencia (estos gráficos se denominan curvas o característica de regulación). En estas curvas I_{e0} representa la corriente de excitación necesaria para producir la tensión asignada en vacío. En

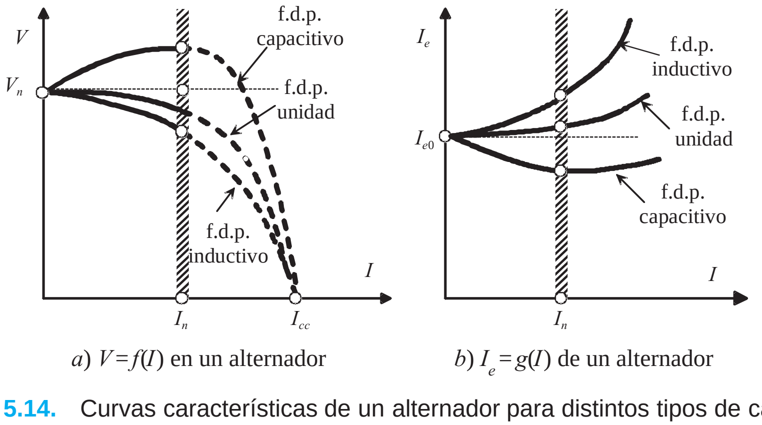


Figura 5.14. Curvas características de un alternador para distintos tipos de cargas.

consecuencia con la Figura 5.14*b*, se observa que con cargas inductivas se requieren excitaciones cada vez mayores a medida que crece la carga, y para con cargas capacitivas ocurre el fenómeno contrario, debido al efecto magnetizante de la f.m.m. del inducido.

Ejemplo de aplicación 5.1

Un alternador trifásico conectado en estrella de rotor cilíndrico 3.000 kVA, 6.600 V, 50 Hz y 2 polos, tiene una resistencia del inducido de 0,07 Ω y una reactancia de dispersión de 0,7 Ω/fase. La curva de vacío viene expresada por la ecuación:

$$E = \frac{5.800 F_e}{F_e + 9.300}$$

donde E es la f.e.m. por fase generada por la máquina y F_e es la f.m.m. de excitación del inductor en A.v/polo. La f.m.m. de reacción del inducido a plena carga es de 13.000 A.v/polo. Si el alternador funciona a plena carga con factor de potencia 0,8 inductivo, calcular: 1) F.e.m. resultante E_r; 2) f.m.m. total F_e necesaria en la excitación; 3) Si manteniendo fija la f.m.m. anterior se desconecta la carga, ¿cuál será el valor de la f.e.m. E_0 que aparecerá en los terminales de la máquina?

Solución

1. La tensión asignada por fase en bornes del alternador vale:

$$V = \frac{6.600}{\sqrt{3}} = 3.810{,}5 \text{ V}$$

y la corriente de plena carga del alternador es:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot V_L} = \frac{3.000.000}{\sqrt{3} \cdot 6.600} = 262{,}4 \text{ A}$$

Si se toma la tensión como referencia de fases, las expresiones fasoriales de tensión y corriente serán:

$$\mathbf{V} = 3.810{,}5 \angle 0° \quad ; \quad \mathbf{I} = 262{,}4 \angle -36{,}87°$$

ya que el arcos 0,8 = 36,87° y la carga es inductiva. Por consiguiente y de acuerdo con (5.7), la f.e.m. resultante $\mathbf{E}_r$ valdrá:

$$\mathbf{E}_r = 3.810{,}5 \angle 0° + (0{,}07 + j\,0{,}7)\, 262{,}4 \angle -36{,}87° = 3.942{,}2 \angle 1{,}9° \text{ V}$$

que corresponde a un módulo de la f.e.m. resultante de línea de: $3.942{,}2 \sqrt{3} = 6.828{,}15$ V.

2. Para producir la f.e.m. anterior se requerirá una f.m.m resultante F_r determinada por la curva de vacío, es decir:

$$3.942{,}2 = \frac{5.800 F_r}{F_r + 9.300} \quad \Rightarrow \quad F_r \approx 19.734 \text{ A.v/polo}$$

y como quiera que esta f.m.m. debe estar adelantada 90° respecto a E_r (véase Fig. 5.11*b*), la expresión fasorial correspondiente será:

$$\mathbf{F}_r = 19.734 \angle 91{,}9° \text{ A.v/polo}$$

Ahora bien, según el enunciado de la f.m.m. de reacción de inducido a plena carga, vale 13.000 A.v/polo y tiene que estar en fase con la corriente de inducido, por lo que su expresión fasorial será:

$$\mathbf{F}_i = 13.000 \angle -36{,}87° \text{ A.v/polo}$$

y en consecuencia la f.m.m. total necesaria en la excitación, de acuerdo con (5.8), será:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i = 19.734 \angle 91{,}9° - 13.000 \angle -36{,}87° = 29.660 \angle 112°$$

es decir, F_e es igual a 29.660 A.v/polo.

3. Si dejando fija la f.m.m. anterior, se abre el inducido, la tensión simple que aparecerá en bornes de la máquina se deducirá de la curva de vacío:

$$E_0 = \frac{5.800 \cdot 29.660}{29.660 + 9.300} = 4.415{,}5 \text{ V}$$

que corresponde a un valor compuesto: $E_0 = 4.415{,}5\sqrt{3} \approx 7.648$ V.

5.6. ANÁLISIS LINEAL DE LA MÁQUINA SÍNCRONA: EL CIRCUITO EQUIVALENTE

5.6.1. Generalidades

Como ya se ha explicado en el epígrafe anterior, para estudiar el comportamiento de la máquina síncrona es necesario tener en cuenta el efecto de la reacción de inducido en estas máquinas, lo que requiere, según se observa en la Figura 5.12, el uso simultáneo de magnitudes eléctricas: f.e.m., tensión y corriente, con magnitudes magnéticas: f.m.m.s. y flujo. Este procedimiento de análisis, que responde a la denominación de **método general**, reproduce fielmente los fenómenos físicos implicados, pero tiene el inconveniente de que al manejar dos tipos de magnitudes no quede más remedio que recurrir al uso de diagramas fasoriales como el de la Figura 5.11*b* para poder explicar las relaciones que intervienen entre las diferentes variables involucradas. Con objeto de simplificar la labor de análisis de la máquina síncrona, nos interesa conseguir un circuito eléctrico equivalente que refleje el comportamiento de aquélla de un modo simple y en el que intervengan parámetros que puedan determinarse fácilmente por ensayos indirectos que consuman poca energía. Otro aspecto a destacar en relación con el diagrama fasorial de la Figura 5.12*b* es que los valores de $\mathbf{F}_i$ y X_σ son desconocidos *a priori**, por lo que resultaría del todo inabordable poder predecir las magnitudes de las diversas variables que entran en juego.

En el transcurso de la ingeniería eléctrica se han ideado diversos métodos para poder predeterminar el comportamiento de la máquina síncrona y en particular poder calcular la regulación de tensión para diferentes cargas. Debe destacarse que la determinación de la regulación en las máquinas síncronas es de vital importancia para diseñar correctamente el equipo de regulación automática de tensión que controla la excitación. Además, la magnitud de la regulación determina el valor de las corrientes de cortocircuito y en consecuencia el tamaño y poder de corte que deben tener los disyuntores de maniobra del grupo. Los diferentes métodos propuestos tienen en cuenta si la máquina es de polos salientes o de rotor cilíndrico, si existe o no saturación, etc.

En este epígrafe y en el siguiente 5.7 se van a explicar los métodos de análisis de las máquinas síncronas con rotor cilíndrico (polos lisos). Primeramente se va a realizar un estudio lineal de la máquina, que nos va a permitir obtener un circuito equivalente, y más tarde se

* En realidad se pueden determinar a partir de los datos de diseño, pero este procedimiento da lugar solamente a aproximaciones muy burdas.

harán correcciones para tener en cuenta la no linealidad de la curva de imanación. En el epígrafe 5.8 se hará un estudio de las máquinas de polos salientes.

5.6.2. Método de Behn-Eschenburg. Impedancia síncrona

Este método, propuesto en la primera década del siglo XX por el ingeniero Behn-Eschenburg, de los talleres suizos Oerlikon, tuvo como objetivo inicial poder predeterminar la caída de tensión de un alternador. Se aplica a **máquinas con rotor cilíndrico que trabajan en régimen lineal**, lo que significa que los flujos son proporcionales a las f.m.m.s. y en consecuencia puede utilizarse el principio de superposición. La ventaja de este método es que permite obtener un circuito eléctrico equivalente de la máquina síncrona, con las ventajas analíticas que supone.

Como ya se ha señalado en el epígrafe 5.5, se sabe que en realidad existe un flujo único en el entrehierro de la máquina síncrona que, como se muestra en la Figura 5.12, es producido por la acción conjunta de las f.m.m.s. de excitación $\mathbf{F}_e$ y de reacción de inducido $\mathbf{F}_i$. Sin embargo, resulta más cómodo considerar que cada f.m.m. produce un flujo independiente que crea a su vez su correspondiente f.e.m. inducida. De esta forma se trabaja únicamente con f.e.m.s. y magnitudes eléctricas, dejando a un lado las magnitudes magnéticas. En la Figura 5.15 se representa esta idea. Obsérvese que están implicados tres flujos, a saber:

a) **El flujo de dispersión** Φ_σ que se obtiene en las cabezas de bobina, que está en fase con la corriente del inducido y que da lugar a una caída de tensión en la reactancia del mismo nombre X_σ y que ya se consideró en la construcción del diagrama fasorial de la Figura 5.11, representada por un valor:

$$+ jX_\sigma \mathbf{I} \tag{5.10}$$

es decir, la **caída de tensión** producida por la reactancia de dispersión se adelanta 90° respecto a la corriente del inducido.

b) **El flujo de excitación** Φ_e producido por la f.m.m. $\mathbf{F}_e$ y en fase con ella, que es el causante de la f.e.m. producida en vacío E_0. Esta f.e.m., de acuerdo con la ley de Faraday, estará retrasada 90° respecto al flujo Φ_e.

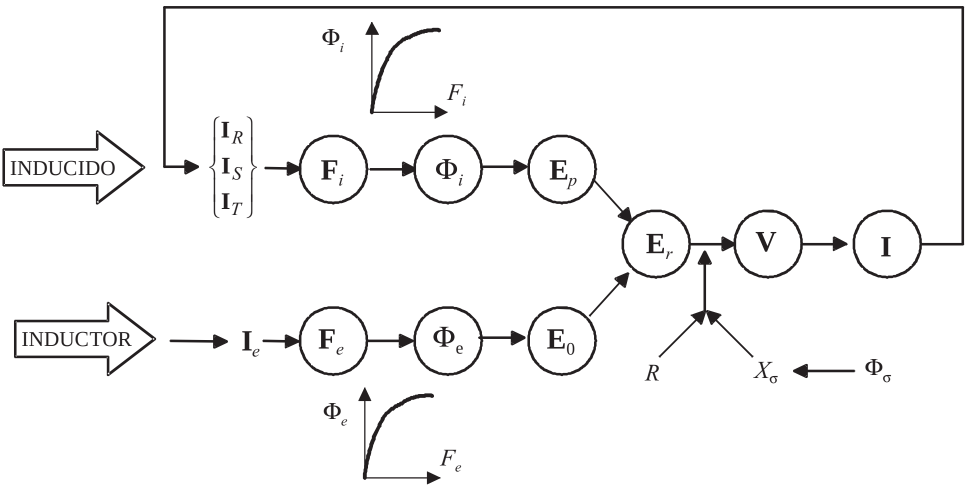


Figura 5.15. Relaciones funcionales entre las diversas variables de una máquina síncrona.

c) **El flujo de reacción de inducido** Φ_i producido por la f.m.m. $\mathbf{F}_i$ y en fase con la corriente, lo que da lugar a una f.e.m. $\mathbf{E}_p$ retrasada 90° respecto de Φ_i y, por tanto, de la corriente del inducido, que se puede expresar así:

$$\mathbf{E}_p = -jX_p\mathbf{I} \quad (5.11)$$

El factor complejo $(-j)$ en la ecuación anterior indica el retraso de 90° de $\mathbf{E}_p$ respecto de $\mathbf{I}$; el término X_p expresa el factor de proporcionalidad entre ambas magnitudes y que se denomina **reactancia de reacción de inducido.**

En la Figura 5.16 se muestra el nuevo diagrama fasorial que se obtiene y en el que se incluyen las f.e.m.s. que se acaban de definir. Se ha dibujado también la composición fasorial de las f.m.m.s de un modo análogo al que se hizo en la Figura 5.12*b*. De este modo el lector podrá apreciar más claramente el significado del esquema de la Figura 5.15.

En definitiva, lo que se ha conseguido con este artificio es sustituir el triángulo rayado de la Figura 5.16 de f.m.m.s. por otro triángulo semejante de f.e.m.s. en virtud de la proporcionalidad entre ambas magnitudes a consecuencia de considerar el circuito magnético lineal. O de otro modo, la ecuación original (5.8), que expresaba la resultante de f.m.m.s.:

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i \quad (5.12)$$

se ha sustituido por la ecuación proporcional de f.e.m.s.:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p \quad (5.13)$$

y teniendo en cuenta (5.11), la expresión anterior se puede escribir así:

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_0 - jX_p\mathbf{I} \quad (5.14)$$

y sustituyendo el valor anterior de $\mathbf{E}_r$ en la ecuación general (5.7) resulta:

$$\mathbf{E}_0 - jX_p\mathbf{I} = \mathbf{V} + R\mathbf{I} + jX_\sigma\mathbf{I} \quad (5.15)$$

que reordenando términos conduce a la expresión:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + R\mathbf{I} + jX_\sigma\mathbf{I} + jX_p\mathbf{I} \quad (5.16)$$

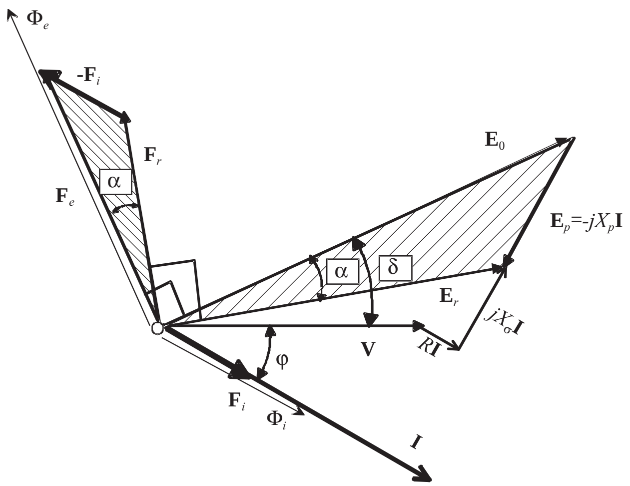


Figura 5.16. Diagrama fasorial de tensiones y f.m.m.s. de un alternador.

lo que indica que la f.e.m. inducida en vacío $\mathbf{E}_0$, debida a la f.m.m. de excitación $\mathbf{F}_e$, se puede considerar como la resultante de añadir a la tensión **V** en bornes de la máquina las **caídas de tensión** por resistencia: $R\mathbf{I}$; en la reactancia de dispersión: $jX_\sigma\mathbf{I}$, y en la reactancia de reacción de inducido: $jX_p\mathbf{I}$. En la Figura 5.17 se muestra el circuito eléctrico que resume el significado de las ecuaciones (5.13) a (5.16).

El esquema final de la Figura 5.17*b* representa el circuito eléctrico equivalente por fase de la máquina síncrona. Las dos reactancias en serie $X_p + X_\sigma$ dan lugar a la denominada **reactancia síncrona** X_s:

$$X_s = X_p + X_\sigma \tag{5.17}$$

Esta reactancia es una magnitud **ficticia** que representa en un único término los efectos combinados de dispersión y de reacción de inducido, y que para una máquina no saturada (régimen lineal) tiene una magnitud constante. De este modo, teniéndose en cuenta (5.17), se puede expresar (5.16) así:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + R\mathbf{I} + jX_s\mathbf{I} = \mathbf{V} + (R + jX_s)\mathbf{I} \tag{5.18}$$

en el que la suma $R + jX_s$ se define como impedancia síncrona:

$$\mathbf{Z}_s = R + jX_s \tag{5.19}$$

En definitiva, la Figura 5.17*b* representa un circuito equivalente tipo Thévenin, constituido por un generador de tensión $\mathbf{E}_0$ en serie con la impedancia síncrona de la máquina.

Para hacerse una idea de los valores comparativos de las magnitudes R, X_σ y X_s se acostumbra en ingeniería eléctrica a definirlas en valores por unidad (p.u.) en función de una impedancia base tomada como referencia. Si se considera un alternador conectado en estrella con una tensión asignada simple V_n y una corriente asignada I_n, la impedancia base se define así:

$$Z_b = \frac{V_n}{I_n} \tag{5.20}$$

y los valores por unidad de R, X_σ y X_s serían:

$$R\,(\text{p.u.}) = \frac{R}{Z_b} \quad ; \quad X_\sigma(\text{p.u.}) = \frac{X_s}{Z_b} \quad ; \quad X_s(\text{p.u.}) = \frac{X_s}{Z_b} \tag{5.21}$$

La ventaja de definir las magnitudes en valores p.u. es que resulta más simple comparar las características de diferentes máquinas, ya que los valores reales de las impedancias de

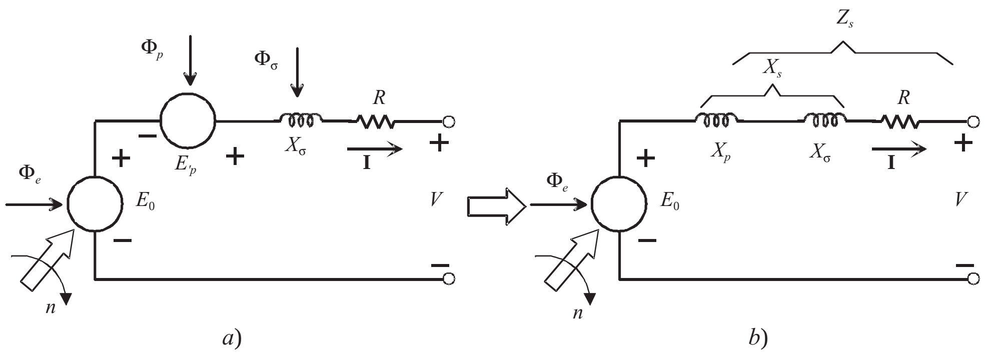


Figura 5.17. Desarrollo del circuito equivalente de una máquina síncrona.

máquinas de potencias muy dispares son muy desiguales. Sin embargo, los valores p.u. varían en un margen más estrecho. En una máquina síncrona se observa que el valor de la resistencia del inducido es generalmente del orden de 0,01 p.u., lo que significa que la caída de tensión en esta resistencia a la corriente asignada es del 1 por 100 de la tensión asignada. La reactancia de dispersión varía entre 0,1 y 0,2 p.u., mientras que la reactancia síncrona tiene una magnitud cercana a 1 p.u. Teniendo en cuenta estos valores, se observa que la reactancia síncrona es del orden de cien veces la resistencia R del inducido, y es por esta razón por la cual se desprecia el valor de R en el circuito equivalente de la máquina síncrona de la Figura 5.17*b*; de este modo la impedancia síncrona se convierte en una reactancia síncrona, lo que es norma habitual en el estudio de sistemas eléctricos de potencia.

5.6.3. Características de vacío y cortocircuito de la máquina síncrona. Determinación de la impedancia síncrona

Como se ha demostrado en el epígrafe 5.6.2, la red de la Figura 5.17*b* representa el circuito equivalente de la máquina síncrona. Para estudiar el comportamiento de esta máquina será necesario determinar los parámetros que se incluyen en este circuito: $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{Z}_s$. Como en cualquier circuito equivalente de Thévenin, y de acuerdo con la ecuación general (5.18), el valor de E_0 se podrá obtener mediante un **ensayo de vacío**, ya que en estas circunstancias se cumplirá:

Vacío:

$$I = 0 \quad \Rightarrow \quad E_0 = V \text{ (vacío)} \tag{5.22}$$

es decir, la f.e.m. E_0 es la tensión en los terminales de la máquina cuando es nula la corriente del inducido. El cálculo de la impedancia síncrona requiere una prueba adicional, denominada **ensayo de cortocircuito**. En este caso la ecuación (5.18) nos da:

Cortocircuito:

$$V = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_0 = (R + jX_s)\mathbf{I}_{corto} = \mathbf{Z}_s\mathbf{I}_{corto} \tag{5.23}$$

de donde resulta el valor modular de la impedancia síncrona:

$$Z_s = \frac{E_0}{I_{corto}} \tag{5.24}$$

es decir, la impedancia síncrona es el cociente entre la tensión y la corriente de cortocircuito; se advierte al lector que los valores de todas las magnitudes anteriores deben expresarse **por fase**. Debe tenerse en cuenta además un aspecto adicional: que tanto E_0 como I_{corto} dependen de la corriente de excitación de la máquina y por consiguiente también su cociente.

En la Figura 5.18 se muestra el esquema eléctrico para realizar ambas pruebas. En el ensayo de vacío se mueve la máquina a la velocidad de sincronismo accionada por un motor primario externo y se deja abierto el interruptor D. Se alimenta el inductor por una fuente auxiliar regulable de c.c. y se van midiendo simultáneamente la corriente de excitación y la tensión de salida. (En el caso de la Figura 5.18 se está midiendo la tensión compuesta de vacío, por lo que el valor de E_0 será igual a la lectura del voltímetro dividida por $\sqrt{3}$.) Estas medidas dan lugar a la característica de vacío: $E_0 = f(I_e)$, que ya se representó en la Figura 5.7 y que se volverá a dibujar más adelante.

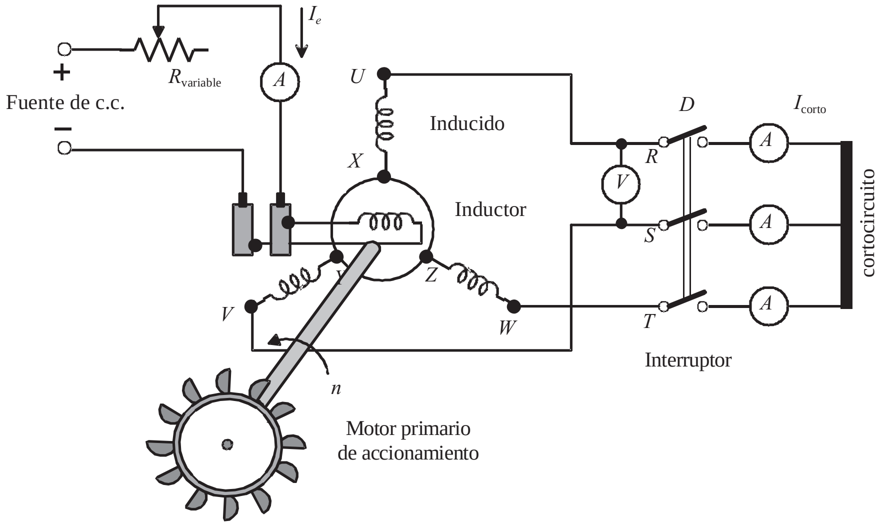


Figura 5.18. Esquema eléctrico para la realización de los ensayos del alternador.

En el ensayo de cortocircuito se mueve el alternador a la velocidad de sincronismo, se mantiene el rotor desexcitado ($I_e = 0$) y se cierra el interruptor *D* de la Figura 5.18. A continuación se va elevando gradualmente la corriente de excitación hasta que los amperímetros del inducido lleguen al 130 por 100 de la corriente asignada. (Teóricamente los tres amperímetros deben señalar la misma corriente en virtud de la simetría de los devanados del inducido. En caso contrario, significa que existe una pequeña asimetría en los devanados, por lo que la corriente de cortocircuito se tomará como la media aritmética de las lecturas de los tres amperímetros.) La curva que representa $I_{cc} = \varphi(I_e)$ se denomina **característica de cortocircuito** y es prácticamente una línea recta, debido a que en estas condiciones el circuito magnético no está saturado porque tanto la excitación resultante como el flujo son de un valor bajo. No es difícil demostrar lo anterior si se tiene en cuenta el circuito equivalente de la máquina en estas condiciones.

En la Figura 5.19*a* se representa este circuito, donde por simplicidad se ha considerado $R = 0$. Recuérdese que el flujo en el entrehierro es el que crea la f.e.m. resultante E_r, por lo que analizando el posible valor de E_r podemos tener una idea de cuál es el valor del flujo. En el esquema de la Figura 5.19*a*, si la corriente I_{corto} es del orden de la asignada y como se ha indicado anteriormente X_s es del orden de 1 p.u., entonces E_0 será del orden de la tensión asignada. Ahora bien, X_σ varía entre 0,1 y 0,2 p.u., por lo que E_r tendrá un valor comprendido entre el 10 y el 20 por 100 de la tensión asignada y el flujo correspondiente tendrá un valor de ese orden, trabajando por consiguiente la máquina en la zona lineal de la curva de imanación.

Otra forma más gráfica de comprobar lo anterior es construir el diagrama fasorial de la máquina tal como se muestra en la Figura 5.19*b*. Si se parte de la $\mathbf{I}_{corto}$ en el eje imaginario negativo, la f.e.m. $\mathbf{E}_0$ estará situada entonces en el eje real y es del orden de la tensión asignada. La f.m.m. necesaria para crear $\mathbf{E}_0$ será la $\mathbf{F}_e$, que está adelantada 90° respecto a $\mathbf{E}_0$. Como quiera que la f.m.m. de reacción de inducido $\mathbf{F}_i$ va en fase con la corriente de cortocircuito, se comprueba en esta figura que el módulo de la f.m.m. resultante $\mathbf{F}_r$ es la diferencia aritmética entre $\mathbf{F}_e$ y $\mathbf{F}_i$ y tiene un valor reducido; el flujo correspondiente será entonces de escaso valor y es el que genera $\mathbf{E}_r$. En definitiva, lo que sucede es que en cortocircuito y de

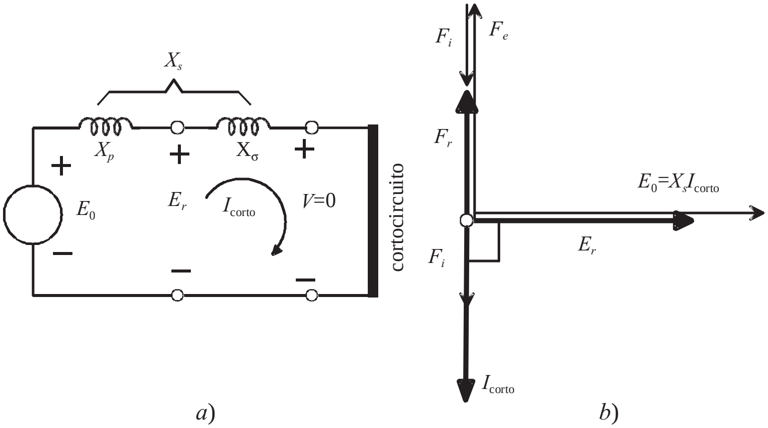


Figura 5.19. Circuito equivalente en cortocircuito y diagrama fasorial correspondiente.

acuerdo con el esquema de la Figura 5.19*b*, y tal como se adelantaba en el epígrafe 5.4.2, al ser el circuito totalmente inductivo, la f.m.m. de reacción de inducido $\mathbf{F}_i$ es totalmente **desmagnetizante** y se opone a la f.m.m. de excitación $\mathbf{F}_e$, lo que provoca una $\mathbf{F}_r$ final muy baja.

Debe destacarse también que una ventaja de estos ensayos: vacío y cortocircuito, es que consumen muy poca energía. Téngase en cuenta que en vacío, al no existir corriente de circulación, el motor primario deberá vencer únicamente las pérdidas mecánicas (de rozamiento y ventilación) y las del hierro de la máquina, mientras que en cortocircuito, al ser el flujo muy reducido, las pérdidas en el hierro serán de pequeño valor y el motor primario tendrá que vencer solamente las pérdidas mecánicas y las del cobre del inducido ($3RI^2$). Teniendo en cuenta el rendimiento de estas máquinas (98 al 99 por 100), el motor primario deberá tener una potencia del orden del 2 por 100 de la potencia asignada del alternador a ensayar, lo que facilita la realización de estos ensayos en el laboratorio.

En la Figura 5.20 se han representado simultáneamente las características de vacío y de cortocircuito de la máquina síncrona. Obsérvese el efecto de saturación de la curva de vacío y el carácter lineal de la característica de cortocircuito (realmente esta recta tiende a saturarse para valores de la corriente de cortocircuito del orden de 1,2 a 1,3 veces la corriente asignada). Se ha dibujado también la denominada **recta del entrehierro**, que es una recta tangente a la curva de vacío y que coincide con ella en la parte lineal. Esta recta del entrehierro representaría en cierto modo el comportamiento en vacío de la máquina si se prescindiera de la saturación del hierro (en definitiva, si la única reluctancia a considerar fuera la del entrehierro, y de ahí procede su denominación).

De acuerdo con (5.24), la impedancia síncrona se obtiene como cociente entre la f.e.m. E_1, tomada de la curva de vacío, y de la corriente I_{corto}, tomada de la característica de cortocircuito, para cada valor de la corriente de excitación, lo que da lugar a la curva de trazo discontinuo de la Figura 5.20. Obsérvese que Z_s varía ampliamente debido a la saturación de la máquina.

Para excitaciones pequeñas la impedancia síncrona Z_s es constante, ya que la característica de vacío coincide con la recta del entrehierro y da lugar a la denominada **impedancia síncrona no saturada**, cuyo valor sería en la Figura 5.20:

$$Z_s\ (\text{no saturada}) = \frac{Od}{O'e} \tag{5.25}$$

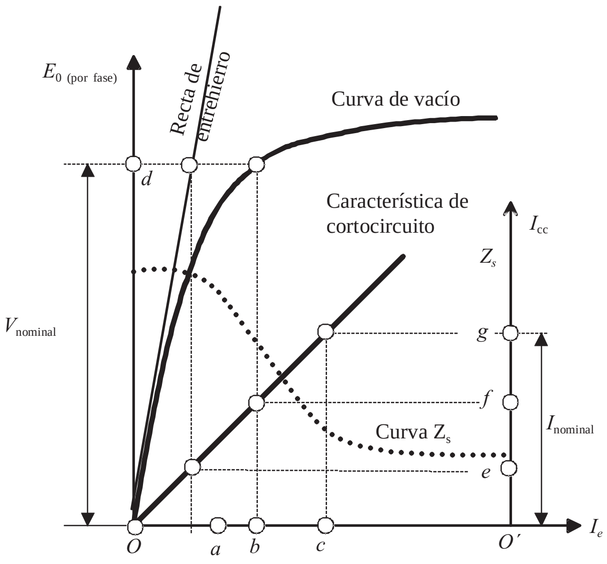


Figura 5.20. Características de vacío y cortocircuito de un alternador. Cálculo de la impedancia síncrona.

Como quiera que generalmente, para reducir el tamaño de la máquina, se requiere que el circuito magnético trabaje en el codo de la curva de vacío (que es en definitiva la curva de imanación), el comportamiento de la máquina, utilizando la impedancia síncrona anterior, diferiría grandemente del valor real en las condiciones normales de funcionamiento. Es por ello que debe utilizarse otro valor más adecuado de la impedancia síncrona. Pero ¿cuál elegir que se adapte mejor a las condiciones reales? En las diferentes Normas e Instrucciones propuestas por las comisiones electrotécnicas de los diferentes países se acostumbra a tomar la denominada **impedancia síncrona saturada** (o ajustada), que consiste en partir de la tensión asignada *Od*, a la que corresponde una corriente de excitación *Ob* y que produciría una corriente en el inducido *O′f*, y de este modo se tiene:

$$Z_s \text{ (saturada)} = Z_s = \frac{Od}{O'f} \tag{5.26}$$

Partiendo de este valor, la reactancia síncrona sería igual a:

$$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R^2} \tag{5.27}$$

En realidad, y aun empleando el valor de la impedancia síncrona saturada (5.26), al obtener el valor de E_0 mediante (5.18) resultaría un valor de la f.e.m. muy superior al real, dando lugar a regulaciones (5.9) demasiado grandes (**método pesimista**). Esto es debido a que la impedancia síncrona real es inferior a la de partida. Desde un punto de vista estricto, para resolver el problema correctamente deberían repetirse los cálculos nuevamente partiendo de un valor de Z_s que corresponda a una mayor excitación, con reserva de verificar si el valor de E_0 al cual se llega corresponde a la I_e de la cual se ha partido. Mientras no se diga lo contrario, en este texto se resuelven los problemas partiendo de (5.26) sin necesidad de realizar nuevas

iteraciones de cálculo. No obstante, en el ejemplo de aplicación 5.2 el lector podrá analizar un problema que utiliza un método iterativo para determinar un mejor valor de Z_s.

Los ingenieros que se dedican al proyecto y construcción de alternadores utilizan con profusión un parámetro denominado **relación de cortocircuito SCR** (*Short-Circuit Ratio*). Esta relación se define como el cociente entre las corrientes de excitación necesarias para producir la tensión asignada (o nominal) en vacío y la corriente asignada en cortocircuito. De acuerdo con la Figura 5.20, *Ob* es la corriente de excitación que produce la tensión asignada en la curva de vacío, mientras que *Oc* es la corriente de excitación correspondiente a la corriente asignada en la característica de cortocircuito. Por consiguiente, la relación o razón de cortocircuito será:

$$\text{SCR} = \frac{Ob}{Oc} \tag{5.28}$$

Vamos a ver que la SCR está ligada íntimamente con el valor de la impedancia síncrona saturada, pues obsérvese que según (5.26) se tiene:

$$Z_s = \frac{Od}{O'f} = \frac{V_n}{O'f} \tag{5.29}$$

que expresada en valores por unidad, tomando como impedancia base la definida en (5.20), (V_n es la tensión asignada **simple**), resulta ser:

$$Z_s\,(\text{p.u.}) = \frac{Z_s}{Z_b} = \frac{V_n}{O'f} \cdot \frac{I_n}{V_n} = \frac{O'g}{O'f} \tag{5.30}$$

es decir:

$$\frac{1}{Z_s\,(\text{p.u.})} = \frac{O'f}{O'g} \tag{5.31}$$

y debido al carácter no lineal de la característica de cortocircuito, se cumplirá, teniendo en cuenta la Figura 5.20 y la expresión (5.28):

$$\frac{1}{Z_s\,(\text{p.u.})} = \frac{O'f}{O'g} = \frac{Ob}{Oc} = \text{SRC} \tag{5.32}$$

ecuación que nos indica que **la relación de cortocircuito es la inversa de la impedancia síncrona saturada expresada en valores por unidad**.

Sin embargo el factor SCR tiene un significado mucho más profundo que el que aquí se señala, ya que representa en cierto modo una medida del tamaño físico de una máquina síncrona. Veámoslo:

Según (5.5), la f.e.m. generada en vacío por la máquina síncrona es proporcional al producto del número de espiras por fase del inducido por el flujo. Si en vacío se induce la tensión asignada se cumplirá:

$$E_0 = V_n = K_1 N \Phi_m = \text{constante} \tag{5.33}$$

Ahora bien, el flujo en vacío es el cociente entre la f.m.m. de excitación (proporcional al segmento *Ob* de la Figura 5.20) y la reluctancia del circuito magnético. Si se considera despreciable la reluctancia del hierro, la única reluctancia existente es la del entrehierro, que

según la definición (1.16) del Capítulo 1 es proporcional al espesor del mismo, g, y por tanto se cumplirá:

$$V_m = K_1 N \Phi_m = K_2 N \frac{[Ob]}{g} \tag{5.34}$$

de donde se deduce que el segmento $[Ob]$ vale:

$$[Ob] = K_3 \frac{g}{N} \tag{5.35}$$

Ahora bien, el segmento $[Oc]$ de la Figura 5.20 equivale a una f.m.m. de excitación que según la característica lineal de cortocircuito será proporcional a la f.m.m. del inducido para corriente asignada, es decir:

$$[Oc] = K_4 NI = K_4 NI_n = K_5 N \tag{5.36}$$

Por consiguiente, el factor SCR definido en (5.28), teniendo en cuenta (5.35) y (5.36) será igual a:

$$\text{SCR} = \frac{Ob}{Oc} = K_6 \frac{g}{N^2} \tag{5.37}$$

es decir, la SCR es directamente proporcional al espesor del entrehierro e inversamente proporcional al cuadrado del número de espiras por fase del inducido.

El factor SCR puede, en consecuencia, aumentarse a base de hacer mayor el entrehierro y reduciendo el número de espiras del estátor. Esta reducción de espiras obliga, según (5.33), a que aumente el flujo en el entrehierro. Si se fija el valor de la inducción magnética en un valor constante correspondiente al codo de la curva de imanación del material magnético, el único modo de aumentar el flujo es aumentar la longitud axial L del inducido. Así, si se dispone de un alternador de rotor cilíndrico y con un alto factor SCR, tendrá un entrehierro grande, pocas espiras en el estátor y una longitud axial grande en comparación con otras máquinas. En definitiva, una alto SCR incrementa el tamaño, peso y coste de una máquina síncrona. Generalmente, las máquinas síncronas de gran potencia tienen un alto factor SCR en virtud de requerir un mayor entrehierro para dejar suficiente holgura mecánica para que gire el rotor. En cambio, las máquinas pequeñas tienen un factor SCR menor. Los valores típicos del SCR para turbogeneradores (alternadores con rotor cilíndrico) son de 0,5 a 0,8, mientras que para los generadores hidráulicos (alternadores de polos salientes) es del orden de 1,5.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Interpretación de la placa de características de un generador síncrono

El fabricante de alternadores tiene la obligación de señalar en la placa de características de la máquina, una serie de valores asignados entre los que cabe destacar: frecuencia, velocidad, tensión en bornes, conexión del inducido, potencia aparente (en kVA), factor de potencia, tensión de la excitatriz y corriente de excitación. El ingeniero debe interpretar con soltura estas magnitudes. Así, en el caso de la frecuencia, el valor asignado será de 50Hz en Europa y 60 Hz en Estados Unidos y en gran parte del continente americano. Conocida la frecuencia de funcionamiento y la velocidad de giro, la expresión (5.1) permite determinar el número de polos que

tiene el inductor del alternador. La tensión del generador es el valor asignado de la tensión compuesta del inducido, (cuyo devanado suele estar conectado en estrella), y que debe suministrar la máquina en las condiciones asignadas de funcionamiento. Este valor de la tensión impone el tipo de aislamiento de las bobinas del inducido para que soporten el campo eléctrico máximo correspondiente, para que se no se produzcan descargas dielectricas en este devanado.

La potencia asignada al alternador por el fabricante se expresa en forma de potencia aparente y no como potencia activa, ya que ésta depende del f.d.p. con el que trabaje la máquina. Téngase en cuenta que conocida la potencia aparente asignada y definida la tensión compuesta entre fases, se puede calcular el valor de la corriente a plena carga de la máquina, ya que se cumple:

$$I_L = \frac{S}{\sqrt{3}V_L} \tag{1}$$

A partir de este valor de la corriente, el fabricante tuvo que calcular en la fase de diseño del generador, la sección necesaria de los conductores del inducido, prefijando para ello un valor de la densidad de corriente y que suele tomarse entre 2,5 y 4 A/mm^2 (y que depende del tipo de refrigeración de la máquina). Las pérdidas por efecto Joule en el inducido son función de la corriente anterior (¡es decir es independiente del factor de potencia con el que trabajará la máquina!). El tipo de aislamiento del devanado inducido debe soportar la temperatura que alcance este devanado al circular la corriente asignada y calculada en (1).

Por otro lado el fabricante asigna al alternador un f.d.p. mínimo de trabajo, lo cual requiere una explicación. Obsérvese en la construcción fasorial de la Figura 5.16 y en la ecuación (5.18), que la f.e.m. que debe generar el alternador no solamente depende de la tensión terminal y de la corriente que suministra el generador, sino que para una determinada impedancia síncrona de la máquina, depende también del f.d.p. con el que funcione el generador. Es decir, el f.d.p. asignado en la placa de características está indicando de un modo indirecto el valor máximo de la f.e.m. E_0 que debe generar la máquina, y por ende la f.m.m. F_e necesaria en los polos del inductor según se muestra en la Figura 5.16 (que define a su vez la corriente asignada de excitación). Debe aclararse aquí que el generador síncrono puede funcionar con f.d.p. menores al asignado, pero siempre que trabaje con una corriente de carga para la cual la corriente requerida por la excitación en esas condiciones no supere el valor de la corriente asignada del inductor, lo que se traduce en la práctica en una reducción de la potencia aparente con la que puede trabajar el generador.

Ejemplo de aplicación 5.2

Un alternador trifásico conectado en estrella de 165 kVA, 950 V tiene una resistencia del inducido de 0,3 Ω. Una corriente de excitación de 15 A produce una corriente en el inducido de 200 A en cortocircuito y una f.e.m. de línea de 780 V en circuito abierto. Calcular: a) impedancia y reactancia síncrona; b) regulación a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo.

Solución

a) La impedancia síncrona, al estar conectado el alternador en estrella, vale:

$$Z_s = \left[\frac{780/\sqrt{3}}{200}\right] = 2{,}25\ \Omega$$

y la reactancia síncrona será: $X_s = \sqrt{Z_s^2 - R^2} = \sqrt{2{,}25^2 - 0{,}3^2} = 2{,}23\ \Omega$.

b) Para calcular la regulación a plena carga habrá que determinar previamente [según (5.9)] la f.e.m. E_0, y según (5.18), se tiene:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + (R + j\,X_s)\mathbf{I}$$

Ahora bien, la corriente de plena carga o asignada del alternador, de acuerdo con sus características, vale:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot V_L} = \frac{165.000}{\sqrt{3} \cdot 950} = 100{,}3 \text{ A}$$

Si se toma la tensión simple como referencia, los valores fasoriales de tensión y corriente serán:

$$V = \frac{950}{\sqrt{3}} \angle\, 0° = 450{,}33 \angle\, 0° \quad ; \quad \mathbf{I} = 100{,}3 \angle -36{,}87°$$

de donde se deduce, aplicando (5.18), un valor de f.e.m.:

$$\mathbf{E}_0 = 450{,}33 \angle\, 0° + (0{,}3 + j\,2{,}23)\; 100{,}3 \angle -36{,}87° = 629{,}5 \angle\, 14{,}8°$$

que corresponde a una magnitud de línea de $629{,}5\sqrt{3} = 1.090{,}33$ V y a una regulación, según (5.9):

$$\varepsilon = \frac{1.090{,}33 - 950}{950} \cdot 100 = 14{,}77\,\%$$

Ejemplo de aplicación 5.3

Un alternador trifásico conectado en estrella de 1.000 kVA, 1.500 V, ha dado los resultados mostrados en la tabla, en unos ensayos de vacío y cortocircuito (la tensión se mide entre dos fases).

E_0 (V)	500	900	1.250	1.500	1.680	1.820	1.920	2.000	2.060	2.100
I_{cc} (A)	150	300	450	600	750	—	—	—	—	—
I_e (A)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

La resistencia del inducido por fase es de 0,15 Ω. Calcular: a) F.e.m. necesaria en vacío en el generador cuando trabaja a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; b) regulación de tensión correspondiente; c) corriente de excitación necesaria en el inductor.

NOTA: Comenzar el cálculo con la impedancia síncrona correspondiente a la tensión asignada. Repetir el cálculo con una magnitud de Z_s que sea autoconsistente con la corriente de excitación resultante.

Solución

a) En la Figura 5.21 se han dibujado a escala las curvas de vacío, cortocircuito e impedancia síncrona. Para la tensión asignada de 1.500 V corresponde una $I_e = 40$ A y para esta excitación la impedancia síncrona obtenida como cociente entre la f.e.m. de **vacío por fase** y la corriente de cortocircuito tiene un valor: $(1.500/\sqrt{3})/600 = 1{,}44\ \Omega$; por tanto la reactancia síncrona correspondiente será:

$$X_s = \sqrt{1{,}44^2 - 0{,}15^2} \approx 1{,}43\ \Omega$$

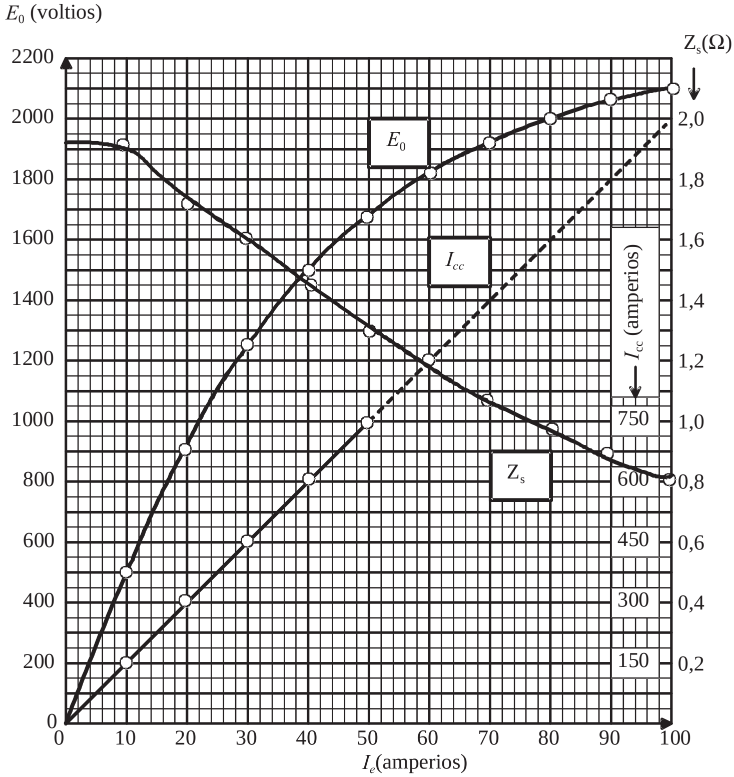


Figura 5.21.

La corriente de plena carga del alternador es:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot V} = \frac{1.000.000}{\sqrt{3} \cdot 1.500} \approx 385 \text{ A}$$

Si se toma la tensión simple del alternador como referencia, los valores fasoriales de la tensión y la corriente serán:

$$V = \frac{1.500}{\sqrt{3}} \angle 0° = 866 \angle 0° \quad ; \quad I = 385 \angle -36{,}87°$$

y aplicando (5.18) se obtiene una f.e.m. $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E}_0 = 866 \angle 0° + (0{,}15 + j\,1{,}43)\; 385 \angle -36{,}87° \approx 1.307 \angle 18{,}08° \text{ V}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea de $1.307\sqrt{3}$ = 2.264 V, que por extrapolación de la curva de vacío de la Figura 5.21 corresponde a una corriente de excitación de $I_e \approx$ 130 A, para la cual Z_s = 0,67 Ω, que es muy inferior al valor tomado como referencia.

Si se parte, como segunda iteración, de este valor de la impedancia síncrona que corresponde a una reactancia de 0,653 Ω, resulta una nueva f.e.m. E_0:

$$\mathbf{E}_0 = 866 \angle 0° + (0{,}15 + j\,0{,}653)\; 385 \angle -36{,}87° \approx 1.076 \angle 8{,}79° \text{ V}$$

La f.e.m. anterior corresponde a un valor de línea de $1.076\sqrt{3}$ = 1.863,7 V. Para generar esta f.e.m. se requiere, según la Figura 5.21, una corriente de excitación de 63 A, para la cual la impedancia síncrona es de 1,1 Ω, que es superior al valor tomado como referencia.

Deberá efectuarse, en consecuencia, otro nuevo intento para hacer consistente el valor tomado como referencia de la impedancia síncrona y el resultante de la excitación correspondiente. El lector puede comprobar que elegida una $Z_s = 0{,}94\ \Omega$, que corresponde a $X_s \approx \approx 0{,}93\ \Omega$, se obtiene una f.e.m. de línea de 2.000 V, a la que corresponde $I_e = 80$ A, para la cual $Z_s = 0{,}94\ \Omega$; es decir, coincide con la magnitud elegida y en consecuencia el resultado es válido.

b) La regulación correspondiente será:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} \cdot 100 = \frac{2.000 - 1.500}{1.500} \cdot 100 = 33{,}33\,\%$$

c) La corriente de excitación necesaria se obtiene de la curva de vacío para $E_0 = 2.000$ V, que corresponde a $I_e = 80$ A.

5.7. ANÁLISIS NO LINEAL DE LA MÁQUINA SÍNCRONA: MÉTODO DE POTIER O DEL F.D.P. NULO. CÁLCULO DE LA REGULACIÓN

El método Potier* se aplica a las máquinas síncronas de rotor cilíndrico que trabajan en la zona de saturación. En estas máquinas saturadas la aplicación del método de Behn-Eschenburg conduce a errores apreciables, ya que las f.e.m.s. no son ahora proporcionales a las f.m.m.s. debido a la no linealidad de la zona del circuito magnético en que trabaja.

El método de Potier determina el valor de la caída en la reactancia de dispersión $X_\sigma I$ y la f.m.m. que produce la reacción de inducido, de tal forma que el cálculo de la regulación se basa en la construcción fasorial general explicada en el epígrafe 5.5.

Para calcular la regulación por el método de Potier es preciso conocer la curva de vacío que representa la f.e.m. E_0 en función de la f.m.m. de excitación F_e, y además es necesario realizar un ensayo con carga inductiva pura, representando en un gráfico la curva tensión de salida respecto a la f.m.m. de excitación, para una **corriente de inducido constante** e igual a la intensidad asignada. En la Figura 5.22 se muestra el diagrama de conexiones de este ensayo con carga reactiva o de factor de potencia nulo.

En el supuesto de despreciar la resistencia del inducido frente a su reactancia, el diagrama fasorial general de la Figura 5.12*b* aplicado a la máquina síncrona cuando tiene carga inductiva (Fig. 5.22) da lugar a la construcción mostrada en la Figura 5.23*a*.

Se observa que los fasores $\mathbf{V}$, $X_\sigma\mathbf{I}$ y $\mathbf{E}_r$ están en fase e igualmente las f.m.m.s $\mathbf{F}_e$, $\mathbf{F}_r$ y $-\mathbf{F}_i$; en consecuencia, se tiene las siguientes relaciones entre **magnitudes**:

$$F_e = F_i + F_r \quad ; \quad E_r = V + X_\sigma I \tag{5.38}$$

Se deduce de la Figura 5.23 que la reacción de inducido es contraria a la f.m.m. de excitación, lo que era de esperar al ser la carga inductiva, ya que produce un efecto desmagnetizante. En la Figura 5.23*b* se ha representado la característica reactiva junto con la de vacío. Se observa que las dos curvas son semejantes, lo cual es lógico, ya que en ambas el circuito magnético es el mismo. El desplazamiento entre ambas curvas se debe a la f.m.m. de reacción de inducido y a la f.m.m. necesaria para compensar la caída de tensión por reactancia de dispersión.

* A. Potier: *Sur la réaction d'induit de alternateurs.* Revue d'Électricité. July 28, 1900, págs. 133-141.

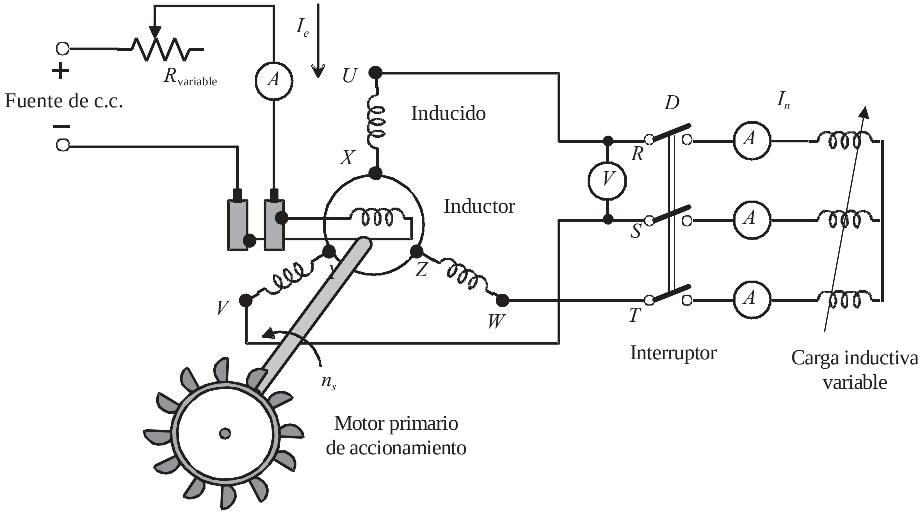


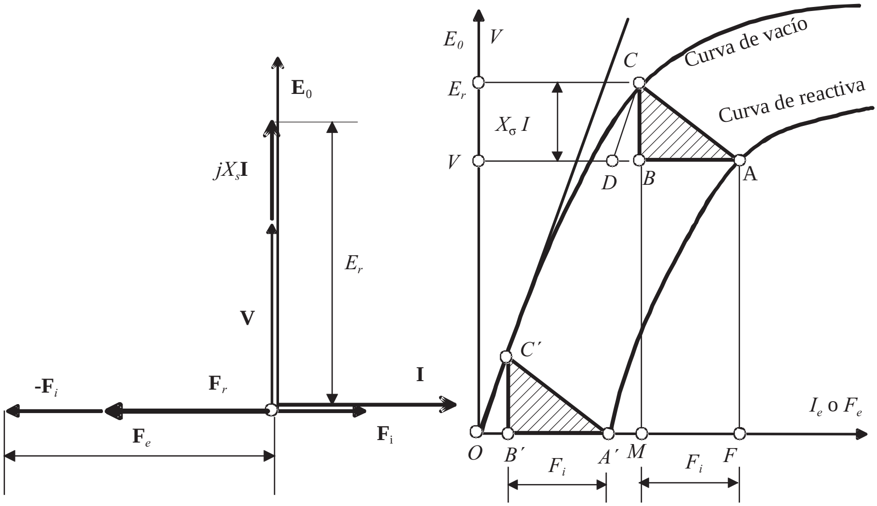
Figura 5.22. Ensayo con carga inductiva pura (f.d.p. nulo) del alternador.

De la curva reactiva se deduce que cuando se tiene la tensión asignada en bornes V, la f.m.m. necesaria en la excitación F_e es igual a OF; si MF indica la f.m.m. de reacción de inducido F_i, la f.m.m. resultante F_r, de acuerdo con la 1.ª ecuación de (5.38), corresponderá al segmento OM. Esta f.m.m. induce una f.e.m. resultante $E_r = MC$. Teniendo en cuenta la 2.ª relación de (5.38) y la representación de la Figura 5.23*b*, se deduce que la caída de tensión por reactancia de dispersión viene definida por el segmento CB. Si se supone constante la reactancia X_σ (independiente de la saturación de la máquina) y la corriente de carga I, se pueden obtener los demás puntos de la característica reactiva, desplazando paralelamente el triángulo ABC, denominado **triángulo de Potier**, de tal forma que si el vértice C recorre la curva de vacío, el vértice A describirá la curva reactiva. En particular, cuando la base del triángulo se apoya en el eje de abscisas se obtiene el punto A' de la curva de carga. Este punto tiene una gran importancia, ya que corresponde a la excitación OA' necesaria para que circule la corriente de plena carga en cortocircuito, por lo que la magnitud OA' puede obtenerse de la característica de cortocircuito.

Esta propiedad geométrica permite resolver el problema inverso, que es deducir la caída $X_\sigma I$ y la f.m.m. F_i a la tensión asignada, sin necesidad de conocer la característica completa de cortocircuito. En efecto, conociendo únicamente los puntos A y A' puede construirse el triángulo ABC, que permite determinar las dos magnitudes citadas. Si en la Figura 5.23*b* se traza en la ordenada correspondiente a la tensión asignada, desde el punto A, el segmento $AD = A'O$ (determinado por la característica de cortocircuito para el valor dado de la corriente I) y se traza la línea DC paralela a la recta del entrehierro, entonces se obtiene el punto C de intersección con la de vacío. De esta construcción se observa que:

$$CB = X_\sigma I \quad ; \quad AB = F_i \tag{5.39}$$

Conocidas estas magnitudes, podrá construirse el diagrama fasorial del alternador de forma análoga a la indicada en el epígrafe 5.5, para deducir posteriormente la regulación de la máquina y la f.e.m. E_0. Desde el punto de vista riguroso, el segmento CB no da realmente la caída de tensión en la reactancia de dispersión, sino en una nueva reactancia denominada



a) Diagrama fasorial *b*) Curvas de vacío y con carga reactiva

Figura 5.23. Determinación de la reactancia de Potier.

reactancia de Potier, que es algo superior a X_σ. Esto se debe a que la curva de vacío que expresa en general la relación $E_0 = f(F_e)$ no es la misma que la que define la f.e.m. resultante E_r en función de F_r y que se han considerado idénticas. Esta divergencia se explica por el aumento del flujo de dispersión del rotor a medida que aumenta la corriente de excitación. La diferencia entre la reactancia de dispersión y de Potier no es muy grande en las máquinas de rotor cilíndrico, y este método da resultados bastante correctos en los turboalternadores. Inclusive, la experiencia demuestra que el empleo de este diagrama de Potier en máquinas con polos salientes da resultados bastante aceptables, si se efectúa la construcción del triángulo de Potier para valores de la excitación correspondientes a 1,2-1,3 veces la tensión asignada. Por ello este método que teóricamente sólo es exacto para las máquinas de rotor cilíndrico, se aplica en la práctica también a las máquinas con polos salientes.

Ejemplo de aplicación 5.4

Un alternador trifásico conectado en estrella de 45 kVA, 220 V, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y f.d.p. nulo:

Tensión de línea (E_0, V)	0	120	200	220	240	260	300
I_{exc} en circuito abierto	0	1,44	2,6	3	3,5	4,1	5,9
I_{exc} con f.d.p. cero y corriente asignada	2,2	3,64	5,2	5,8	6,56	7,5	—

Determinar: a) reactancia de dispersión por fase; b) corriente de excitación equivalente a la reacción de inducido a plena carga; c) corriente de excitación necesaria en el inductor para desarrollar la plena carga a la tensión asignada con f.d.p. 0,8 inductivo; d) regulación de tensión. NOTA: Despreciar la resistencia del inducido.

Solución

a) En la Figura 5.24 se muestran las curvas resultantes de los ensayos. Al construir el triángulo de Potier se obtienen los siguientes resultados:

$$X_\sigma I = \frac{260 - 220}{\sqrt{3}} = 23{,}1 \text{ V} = BC \quad ; \quad F_i = I_i = 1{,}7 \text{ A} = AB$$

Como quiera que la corriente reactiva del ensayo fue la asignada:

$$I = \frac{45.000}{\sqrt{3} \cdot 220} = 118 \text{ A}$$

la reactancia de dispersión será:

$$X_\sigma = \frac{23{,}1}{118} = 0{,}196 \ \Omega$$

b) La f.m.m. de reacción de inducido expresada en amperios del inductor, de acuerdo con la construcción de la Figura 5.24, es:

$$F_j = I_j = AB = 1{,}7 \text{ A}$$

c) Para calcular la excitación necesaria en el inductor se ha de construir el diagrama fasorial del alternador. En la Figura 5.25 se muestra esta representación, donde se ha tomado como referencia de fases la tensión asignada simple del alternador. Los fasores correspondientes serán:

$$\mathbf{V} = \frac{220}{\sqrt{3}} \angle 0° \approx 127 \angle 0° \quad ; \quad \mathbf{I} = 118 \angle -36{,}87°$$

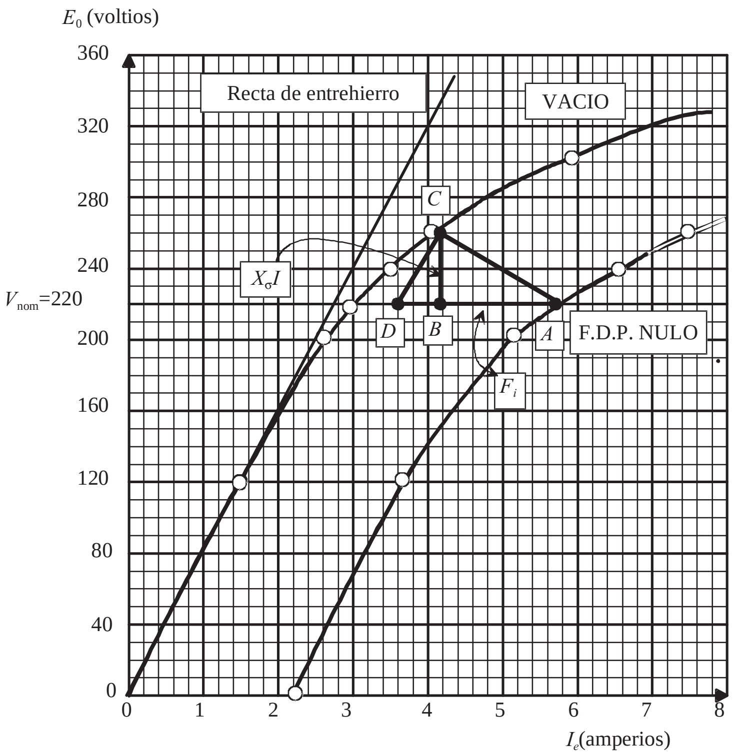


Figura 5.24.

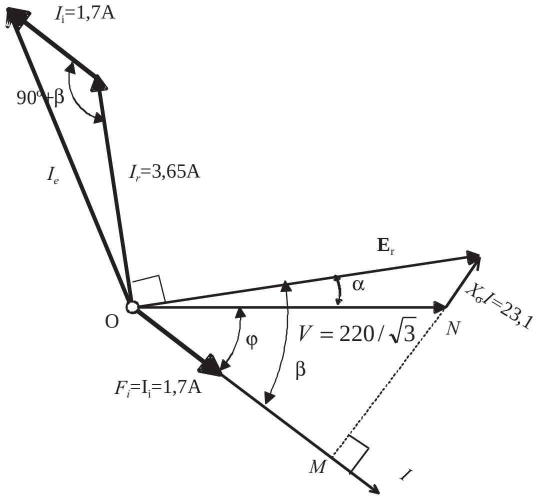


Figura 5.25.

y en consecuencia, la f.e.m. resultante por fase, según (5.7), será:

$$\mathbf{E}_r = 127 \angle 0° + j\,0{,}196 \cdot 118 \angle -36{,}87° = 127 \angle 0° + 23{,}1 \angle 53{,}13° = 142{,}07 \angle 7{,}5°$$

que corresponde a un módulo de la f.e.m. de línea $142{,}07\sqrt{3} = 246{,}1$ V.

En la curva de vacío se puede medir la f.m.m. resultante que se necesita para producir E_r y que corresponde a una corriente de excitación $I_r = 3{,}65$ A.

En la Figura 5.25 se muestra la composición de f.m.m.s. necesaria para calcular la excitación total que requiere el inductor. De acuerdo con el teorema del coseno, se podrá escribir:

$$I_c = \sqrt{I_r^2 + I_i^2 - 2I_rI_i\cos(90+\beta)} \qquad (1)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la composición gráfica de la Figura 5.25 y observando los valores fasoriales obtenidos, resulta:

$$\alpha = 7{,}5° \quad ; \quad \varphi = 36{,}87° \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha + \varphi = 44{,}4°$$

y al sustituir el ángulo anterior en (1) resulta: $I_e = 5$ A.

d) La excitación anterior produce una f.e.m. en vacío (Fig. 5.24) de 284 V, y en consecuencia la regulación tendrá un valor igual a:

$$\varepsilon = \frac{284 - 220}{220} \cdot 100 = 29{,}1\,\%$$

*5.8. REGULACIÓN DE TENSIÓN EN LAS MÁQUINAS SÍNCRONAS DE POLOS SALIENTES. TEORÍA DE LAS DOS REACCIONES

Mientras que el entrehierro en las máquinas síncronas de rotor cilíndrico es prácticamente de espesor constante, el de las máquinas de polos salientes es mucho mayor en el **eje cuadratura o transversal** (región media entre polos o concretamente línea interpolar). Debido a la diferencia de reluctancia entre ambos circuitos magnéticos, la consideración de una sola reacción de inducido en el estátor conduce a

resultados poco precisos sobre la regulación de tensión en estas máquinas. El profesor A. Blondel, de la Escuela de Ingenieros de Caminos de París, propuso una teoría para estudiar estas máquinas, que fue ampliada más tarde R. Doherky y C. Nickle y luego por R. H. Park*. En todos estos estudios se consideraba que la reacción de inducido en los alternadores de polos salientes puede descomponerse en dos componentes, denominadas f.m.m. de reacción en eje directo o longitudinal y f.m.m. de reacción en eje cuadratura o transversal. De esta forma se independizan totalmente los dos circuitos magnéticos obteniendo, regulaciones que se acercan más a la realidad. En la Figura 5.26 se muestra un alternador con dos polos salientes y en el que sólo se ha considerado una bobina en el estátor aa', justamente para indicar que el eje de la f.m.m. giratoria del inducido tiene la referencia del eje de esta bobina. La f.m.m. de reacción del inducido $\mathbf{F}_i$ se ha descompuesto en dos valores: $\mathbf{F}_d$ en el eje directo y $\mathbf{F}_q$ en el eje cuadratura.

Existen, por consiguiente, tres f.m.m.s. que interaccionan en la máquina, a saber: $\mathbf{F}_e$, $\mathbf{F}_d$ y $\mathbf{F}_q$. Si se tiene en cuenta la teoría lineal de la máquina síncrona desarrollada en el epígrafe 5.6, resulta más cómodo considerar que cada una de las f.m.m.s. anteriores produce un flujo independiente que crea a su vez su f.e.m. inducida. En la Figura 5.27 se muestran estas ideas, en un diagrama análogo al de la Figura 5.13 pero teniendo en cuenta ahora que se producen los flujos Φ_d y Φ_q para crear las f.e.m.s. de reacción de inducido de eje directo $\mathbf{E}_{pd}$ y cuadratura $\mathbf{E}_{pq}$, que de un modo análogo a (5.11) tendrán unos valores:

$$\mathbf{E}_{pd} = -jX_{pd}\mathbf{I}_d \quad ; \quad \mathbf{E}_{pq} = -jX_{pq}\mathbf{I}_q \quad ; \quad \mathbf{I} = \mathbf{I}_d + \mathbf{I}_q \tag{5.40}$$

en las que $\mathbf{I}_d$ e $\mathbf{I}_q$ indican las componentes de las corrientes en los ejes directo y cuadratura. Debe tenerse en cuenta que la f.e.m. de vacío E_0 producida por el inductor actúa en el eje q, puesto que debe ir retrasada 90° respecto a la línea de los polos. Si se tiene en cuenta que la resistencia del inducido es R y la reactancia de dispersión es X_σ, para una tensión en bornes V se deberá cumplir una igualdad fasorial similar a la indicada en la expresión (5.16), pero que ahora deberá estar afectada por las dos componentes de f.e.m. indicadas en (5.40), y así queda:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + R\mathbf{I} + jX_\sigma\mathbf{I} + jX_{pd}\mathbf{I}_d + jX_{pq}\mathbf{I}_q \tag{5.41}$$

Si por simplicidad se considera despreciable la resistencia del inducido y se tiene en cuenta la última idéntica de (5.40), la ecuación (5.41) se transforma en:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + j(X_\sigma + X_{pd})I_d + j(X_\sigma + X_{pq})\mathbf{I}_q \tag{5.42}$$

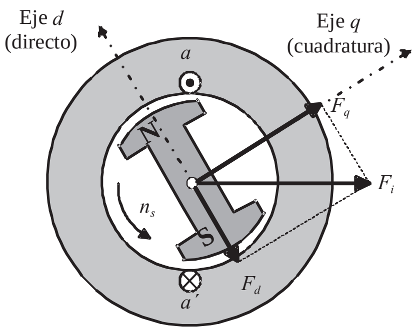


Figura 5.26. Alternador con polos salientes.

* Véase A. Blondel: *Complément à la théorie des alternateurs à deux reactions* (Revue Générale d'Électricité, año 1922, tomo 12); R. Doherty y C. Nickle: Synchronous Machines: Part 1 and 2. *An Extension of Blondel's two reaction theory.* (AIEE Trans., año 1926). El artículo famoso de R. H. Park se cita en las referencias finales de este capítulo.

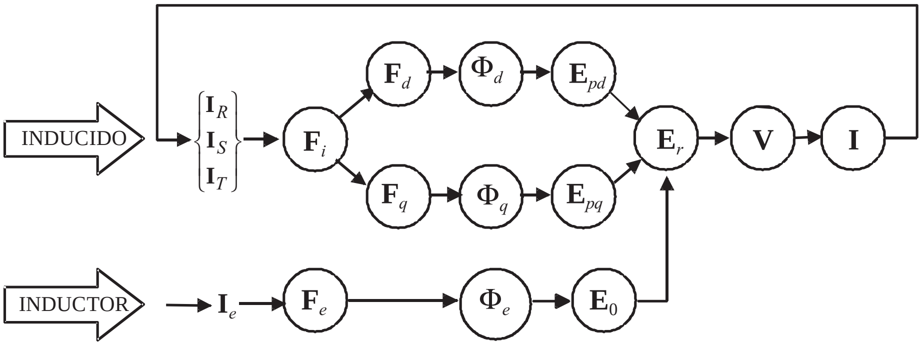


Figura 5.27. Relaciones funcionales en una máquina síncrona de polos salientes.

Por analogía con la teoría de Behn-Eschenburg, en la que se definía la reactancia síncrona (5.17), en este caso resultarán dos reactancias síncronas: una de eje directo X_{sd} o simplemente X_d y otra de eje cuadratura X_{sq} o simplemente X_q. De este modo (5.42) se transforma en:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + j X_d \mathbf{I}_d + j X_q \mathbf{I}_q \qquad (5.43)$$

cuyo diagrama fasorial se muestra en la Figura 5.28, donde se ha tomado como referencia en el eje real el eje q, en el que debe quedar alineada la f.e.m. de vacío $\mathbf{E}_0$.

Se advierte al lector que la construcción aquí señalada no es tan evidente en su realización como a primera vista parece. Las variables conocidas son la tensión V, la corriente I y el desfase φ. Pero los componentes I_d e I_q de la corriente I del inducido dependen del ángulo ψ, que forma la corriente con la f.e.m. $\mathbf{E}_0$, que aún no ha sido obtenida. Es posible hacer frente a esta dificultad con un proceso de ensayo y error; es decir, comenzando con una dirección posible de $\mathbf{E}_0$ se construye el diagrama fasorial y se determina la dirección de $\mathbf{E}_0$; si esta dirección no coincide con la de partida se debe repetir el proceso partiendo de otra alineación y comprobando el resultado. El proceso debe repetirse hasta que la dirección supuesta coincida con la resultante final. Afortunadamente, existe un procedimiento más simple y

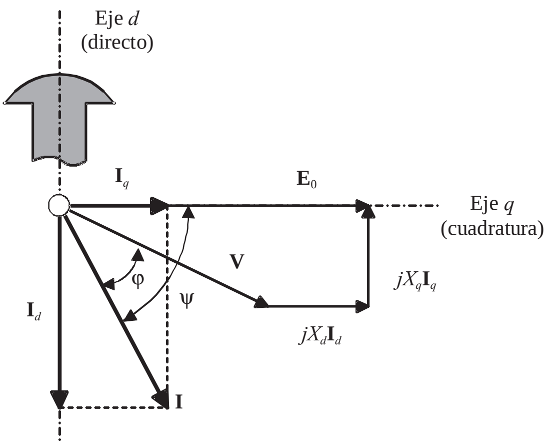


Figura 5.28. Diagrama fasorial de un alternador de polos salientes.

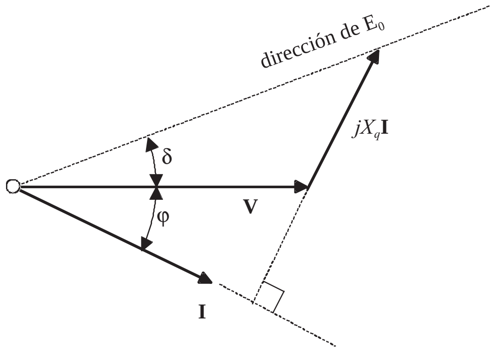


Figura 5.29. Construcción gráfica para determinar la dirección de $\mathbf{E}_0$.

elegante que hace innecesario el método farragoso anterior. Observamos que si se despeja $\mathbf{I}_q$ de la ecuación (5.40) y se sustituye en (5.43), resulta:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_d\mathbf{I}_d + jX_q(\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) \tag{5.44}$$

que reagrupando términos es:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_q\mathbf{I} + j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d \tag{5.45}$$

En esta ecuación se observa que el último sumando se adelanta 90° respecto de $\mathbf{I}_d$ y por consiguiente, de acuerdo con la Figura 5.28, irá en fase con $\mathbf{E}_0$. De este modo la suma de los dos primeros términos del 2.º miembro de la ecuación (5.45) deberá estar en fase con $\mathbf{E}_0$. Esta suma se puede calcular sin necesidad de conocer la alineación de $\mathbf{E}_0$. En la Figura 5.29 se muestra el proceso a seguir. Se ha tomado la tensión como referencia y se ha dibujado la corriente **I** con su desfase φ. Al sumar los dos primeros términos de (5.45) se obtendrá la dirección de $\mathbf{E}_0$ y con ello podrá completarse el gráfico de un modo análogo al de la Figura 5.28. Inclusive, no es necesario para la construcción del diagrama fasorial el cálculo de las componentes $\mathbf{I}_d$ e $\mathbf{I}_q$.

En la Figura 5.30 se ha repetido el gráfico de la Figura 5.29 para las mismas condiciones de funcionamiento. El segmento *ab* representa el fasor $jX_q\mathbf{I}$ y el afijo del mismo, que tiene su final en *b*, define la dirección de $\mathbf{E}_0$, con lo que queda terminado el ángulo δ. La línea *ab* se continúa entonces hasta el

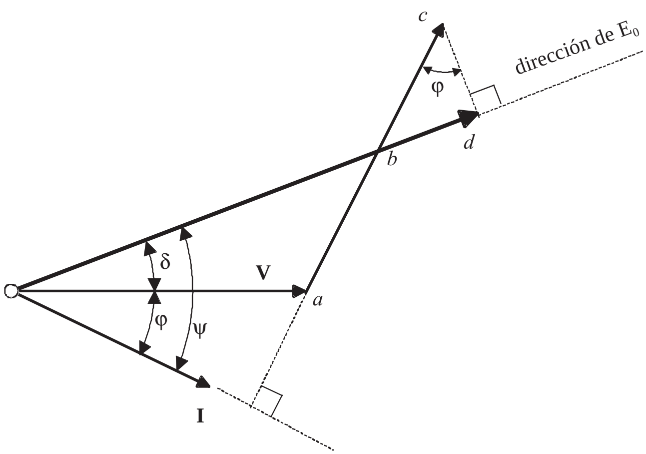


Figura 5.30. Diagrama fasorial de un alternador de polos salientes.

punto c, con la distancia $ac = X_d I$, o de otro modo, $bc = (X_d - X_q)I$. Entonces se traza una perpendicular cd a la dirección de $\mathbf{E}_0$, de este modo se cumple que $bd = bc$ sen ψ, es decir:

$$bd = (X_d - X_q)I \text{ sen } \psi = (X_d - X_q)I_d \qquad (5.46)$$

Por consiguiente, y de acuerdo con (5.45), el punto d señalará el afijo de $\mathbf{E}_0$, habiéndose completado el diagrama fasorial. Una vez calculado $\mathbf{E}_0$, el valor de la regulación de tensión del alternador vendrá expresado por (5.9), es decir:

$$\varepsilon = \frac{E_0 - V}{V} \cdot 100\,\% \qquad (5.47)$$

La determinación práctica de X_d y X_q se realiza con un ensayo de deslizamiento (consultar el texto de G. S. Brosan y J. T. Hayden citado en las referencias).

Ejemplo de aplicación 5.5

Un generador de polos salientes conectado en estrella de 1.500 kVA, 6.600 V, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido despreciable. Las reactancias síncronas por fase en los ejes directo y cuadratura son, respectivamente, 23,2 Ω y 14,5 Ω. Si la máquina suministra la corriente de plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo, calcular: 1) F.e.m. E_0 de línea; 2) Corrientes I_d e I_q.

Solución

1. La tensión simple del generador vale:

$$V = \frac{6.600}{\sqrt{3}} = 3.810{,}5$$

y la corriente de plena carga es:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3} \cdot V_L} = \frac{150.000}{\sqrt{3} \cdot 6.600} = 131{,}2 \text{ A}$$

tomando la tensión como referencia de fases, las expresiones fasoriales de tensión y corriente serán:

$$\mathbf{V} = 3.810{,}5 \angle 0° \quad ; \quad \mathbf{I} = 131{,}2 \angle -36{,}87°$$

De acuerdo con la construcción de la Figura 5.29, resulta:

$$\mathbf{V} + jX_q\mathbf{I} = 3.810{,}5 \angle 0° + j\,14{,}5 \cdot 131{,}2 \angle -36{,}87° = 5.180{,}5 \angle 17°$$

Por consiguiente, el ángulo δ de la Figura 5.29 será igual a 17°, siendo la distancia Ob de la Figura 5.30 igual a 5.180,5 V y el ángulo $\psi = \varphi + \delta = 36{,}87 + 17 \approx 54°$. En consecuencia, de acuerdo con (5.46) se tendrá:

$$bd = (23{,}2 - 14{,}5)\ 131{,}2 \text{ sen } 54° = 923{,}4$$

y, por tanto, la magnitud de f.e.m. E_0 por fase será:

$$E_0 = 5.180{,}5 + 923{,}4 \approx 6.104 \text{ V}$$

que corresponde a una f.e.m. de línea de 10.572,4 V.

2. De acuerdo con la Figura 5.28, las corrientes I_d e I_q valdrán:

$$I_d = I \text{ sen } \psi = 131{,}2 \text{ sen } 54° = 106{,}14 \text{ A} \quad ; \quad I_q = I \cos \psi = 131{,}2 \cos 54° = 77{,}12 \text{ A}$$

5.9. FUNCIONAMIENTO DE UN ALTERNADOR EN UNA RED AISLADA

5.9.1. Generalidades

El comportamiento de un generador síncrono bajo carga varía fuertemente dependiendo del factor de potencia de la carga y de si el generador funciona solo o en paralelo con otros alternadores. El primer paso en el estudio del generador síncrono será el análisis del comportamiento de la máquina funcionando de manera aislada. En los próximos epígrafes se estudiará la operación en paralelo. En la Figura 5.31 se muestra el esquema simplificado de un alternador que funciona aisladamente y está alimentando una carga trifásica equilibrada. Se muestran dos controles importantes: por un lado el **regulador de tensión**, que se incorpora en la excitatriz y que al variar la corriente de campo del generador permite controlar la tensión de salida; por otro lado el motor primario que mueve el alternador (que en el caso de la Figura 5.31 se ha supuesto que es una turbina hidráulica), que lleva un **regulador de velocidad** que actúa sobre la entrada de agua, permitiendo con ello controlar la velocidad del grupo y por consiguiente su frecuencia.

Supóngase en principio que la máquina síncrona se mueve a **velocidad estrictamente constante**, por tanto la frecuencia es un parámetro fijo. Al aumentar la carga, es decir, al incrementarse la potencia activa y reactiva tomada del generador, aumentará la corriente de I del inducido; como no se ha modificado el regulador de tensión, la corriente de excitación será constante, o de otro modo, la f.m.m. F_e permanecerá invariable (véase epígrafe 5.5). Ahora bien, como aumenta la intensidad I, aumenta la f.m.m. de reacción de inducido F_i, lo que da lugar a una f.m.m. resultante menor F_r, una f.e.m. E_r menor y una tensión de salida más baja. La explicación anterior es más simple si se considera el circuito equivalente de la máquina síncrona de la Figura 5.17*b*, que se ha vuelto a repetir en la Figura 5.32, supuesto una resisten-

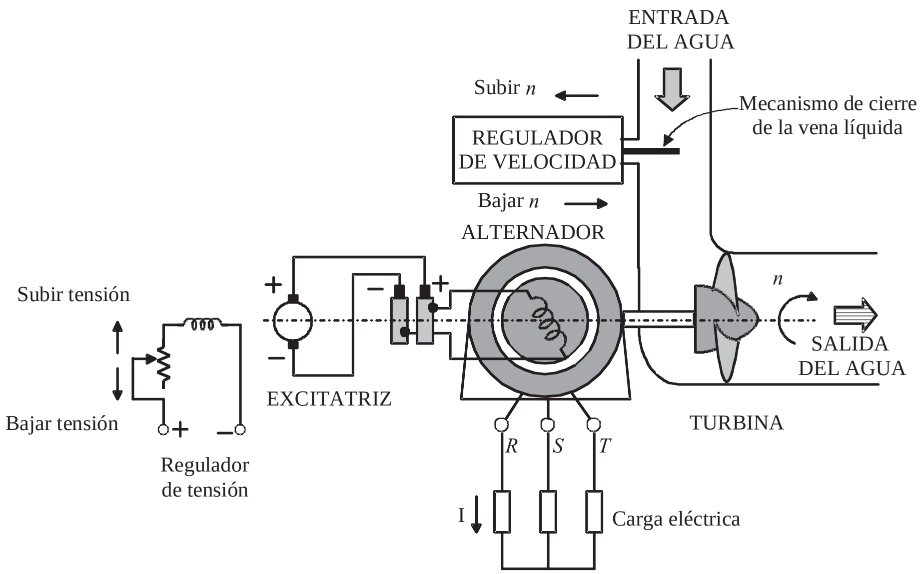


Figura 5.31. Funcionamiento de un alternador en una red aislada.

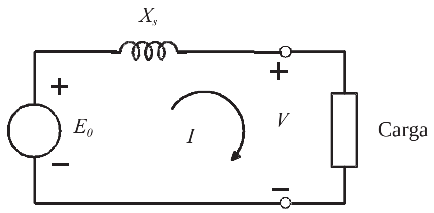


Figura 5.32. Circuito equivalente del sistema de red aislada.

cia del inducido despreciable. La ecuación que regirá el comportamiento eléctrico de la máquina, según (5.18), será:

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}_0 - j\,X_s\mathbf{I} \tag{5.48}$$

Si la corriente de excitación es constante, será constante la f.e.m. E_0, de tal modo que al aumentar la corriente I, aumentará la caída de tensión en la reactancia síncrona, lo que se traduce, según (5.48), en una reducción de la tensión de salida.

En la Figura 5.13 se dibujaron las características externas de la máquina, y donde puede observarse la variación de la tensión de salida conforme se modifica la corriente del inducido (para excitación constante). Obsérvese que para cargas inductivas la caída de tensión es mucho más fuerte que para cargas resistivas en virtud del efecto desmagnetizante de este tipo de cargas. Sin embargo, para cargas capacitivas se obtiene un aumento de la tensión de salida debido a su efecto magnetizante.

En la Figura 5.33 se muestran estos hechos de un modo evidente. Nótese que en los tres diagramas se parte de la misma E_0 y la misma corriente I (misma caída en la reactancia síncrona). Para cargas resistivas (Fig. 5.33*a*) la reacción del inducido, representada prácticamente por la caída X_sI, es casi transversal ($\mathbf{E}_0$ forma un ángulo cercano a 90° con $j\,X_s\mathbf{I}$); en el caso de cargas inductivas la reacción es antagonista (Fig. 5.33*b*) y para cargas capacitivas la reacción es magnetizante (Fig 5.33*c*), lo que está de acuerdo con lo estudiado en el epígrafe 5.4.2. Obsérvese en la Figura 5.33 que la tensión menor se obtiene para cargas inductivas.

Normalmente interesa que la tensión suministrada a una carga permanezca constante, aunque se modifique el consumo. Como quiera que la f.e.m. E_0 es proporcional al flujo inductor, deberá variarse la excitación para cambiar el flujo y así adaptar la nueva f.e.m. para que se restablezca la tensión al valor asignado o nominal prefijado.

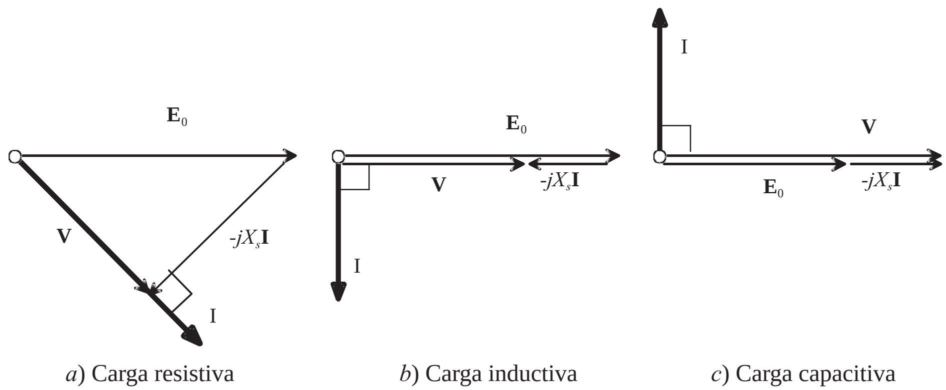


Figura 5.33. Diagramas fasoriales para diversos tipos de cargas. Funcionamiento en isla.

Esta acción se realiza con el regulador de tensión de la Figura 5.31, que es simplemente un reóstato que regula la corriente de campo de la excitatriz, dando ésta una tensión de salida que controlará la corriente de excitación de los polos del alternador. En la Figura 5.14 se representó en un gráfico la variación de la corriente de excitación en función de la corriente de carga para mantener la tensión en el valor nominal.

En definitiva, en un alternador que trabaja en una red aislada se tiene:

1. *La frecuencia depende enteramente de la velocidad del motor primario que mueve la máquina síncrona.*
2. *El f.d.p. del generador es el f.d.p. de la carga.*
3. *La tensión de salida depende de: a) la velocidad de giro* [*la f.e.m. depende, según (5.5), de la frecuencia y del flujo*]*; b) de la corriente de excitación; c) de la corriente de inducido; d) del f.d.p. de la carga.*

La potencia suministrada por el generador es la que solicita la carga. Cuando la carga demanda más potencia, el alternador reduce su velocidad; esta disminución es detectada por el regulador de velocidad de la turbina (motor primario), que provoca una mayor apertura de entrada del agua, lo que hace aumentar la velocidad de giro del grupo hasta llegar al valor de consigna que impone la frecuencia de salida del generador. Cuando se ha alcanzado esta velocidad, la máquina síncrona entrega al consumidor la nueva carga solicitada.

5.9.2. Funcionamiento del regulador de velocidad

En un alternador, y en general en un sistema eléctrico, la potencia demandada varía continuamente y es necesario disponer los mecanismos de regulación necesarios para adaptar en todo momento la generación al consumo. Cuando se produce un aumento en la potencia eléctrica absorbida por los receptores, en tanto no se modifique la potencia mecánica suministrada por el motor primario (turbina) del alternador, la energía adicional requerida se extrae de la energía cinética almacenada en las masas giratorias del sistema, con lo cual la velocidad de giro del grupo experimentará un descenso que se refleja en la misma proporción en la frecuencia del generador. Lo contrario sucede en el caso de una reducción en el consumo de energía eléctrica. Este mecanismo constituye, por tanto, un indicador del desequilibrio generación-consumo que existe en un momento dado y puede ser utilizado como referencia para efectuar la regulación correspondiente.

En una central eléctrica, en cada unidad generadora se controla la velocidad del grupo mediante el denominado regulador de velocidad de turbina, que recibe también el nombre de **regulación primaria**. En la Figura 5.34 se muestra una representación esquemática de una central hidroeléctrica que consta de un turbina hidráulica que mueve un alternador. El agua se almacena en un embalse mediante una presa para conseguir una energía potencial suficiente; este agua pasa a través de una tubería forzada y llega a la turbina que mueve el alternador que genera electricidad y cuya tensión se eleva con ayuda de transformadores para enviar la energía eléctrica a los consumidores a través de un red de alta tensión. Se ha destacado en la Figura 5.34 el regulador de velocidad del grupo turbina-alternador por ser el objetivo de este epígrafe. El regulador de velocidad consta de los siguientes elementos:

a) El péndulo taquimétrico

Que es el órgano sensible a la velocidad de rotación de la máquina. Es el corazón del sistema generalmente, y como se muestra en la Figura 5.34 está constituido por dos ma-

sas *m* que giran con el árbol de la máquina, bien directamente o a través de una caja de engranajes con una cierta demultiplicación. Las masas van unidas a unos collares o anillos a través de unas barras rígidas. Un collar es fijo (el superior de la Fig. 5.34) y el otro es móvil y desliza sobre un eje que lleva un resorte *r* cuya tensión es regulable. Las masas *m*, al girar, tienden a alejarse (o separarse) por efecto de la fuerza centrífuga venciendo la acción antagonista del muelle o resorte. Como consecuencia del movimiento del anillo deslizante, se produce la actuación de un servomotor hidráulico que provocará la apertura o cierre del agua de entrada a la turbina (o movimiento similar del distribuidor de la turbina en el caso de centrales hidráulicas), que controlará de este modo la potencia suministrada por la máquina.

Aunque gran parte de las centrales existentes disponen de este tipo de péndulo (péndulo de Watt), hoy día se van incorporando sensores de velocidad no mecánicos, que miden las revoluciones del árbol del grupo turbina-generador indirectamente a través de la frecuencia o por medio de tacómetros eléctricos.

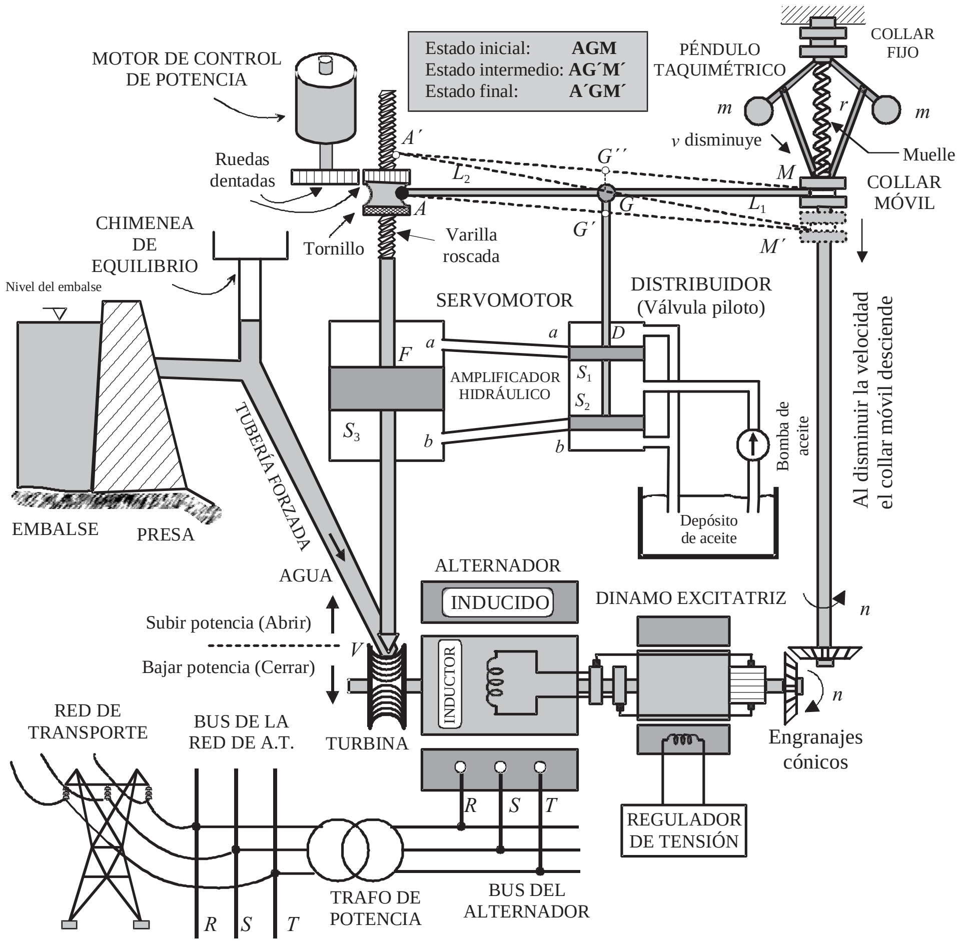


Figura 5.34. Esquema de una central hidroeléctrica en el que se destaca el regulador de velocidad.

b) Amplificador hidráulico

Que comprende un distribuidor o válvula piloto y un pistón principal que hace las veces del servomotor. La válvula piloto está constituida por un cilindro con cinco orificios de acceso, dos de ellos están en comunicación con el recipiente de aceite que sirve para el accionamiento de la válvula (en forma de drenaje o descarga), otro está en comunicación con una bomba de aceite para dar presión al mismo y los otros dos están unidos al servomotor. En el interior del cilindro existen dos émbolos o pistones movidos por el collar deslizante del péndulo a través de un brazo de palanca L_1. Si los pistones S_1 y S_2 se mueven hacia arriba, el aceite a alta presión proveniente de la bomba sale por el orificio *a* de la válvula piloto y penetra en la cámara superior del servomotor. Como quiera que entonces la cámara inferior está en comunicación con el tubo de descarga (presión atmosférica), se tendrá una diferencia de presiones entre ambas cámaras que provocará un movimiento del émbolo S_3 hacia abajo. El eje del servomotor actúa directamente sobre un inyector que controla la entrada de agua a la turbina mediante la válvula de aguja *V*. El movimiento de la válvula piloto convierte una potencia de nivel bajo en otra de gran valor en el pistón principal del servomotor. Hay que tener en cuenta que la válvula piloto es del tipo diferencial, de tal forma que las fuerzas que provoca la presión sobre los pistones S_1 y S_2 se equilibra en reposo y de este modo se requiere muy poco esfuerzo para cambiar su posición; con una pequeña fuerza aplicada en el nudo *M* se conseguiría un desplazamiento de los pistones que haría actuar el émbolo S_3 del servomotor con la fuerza suficiente para cerrar o abrir el inyector de la turbina, venciendo la acción antagonista del agua que llega de la tubería forzada. De este modo, el conjunto válvula piloto-servomotor constituye un buen amplificador hidráulico.

c) Palanca de unión

Representada por la varilla rígida *AGM*, cuya misión es hacer que se muevan los pistones de la válvula piloto proporcionalmente al cambio de velocidad del eje turbina-alternador. La parte *AG* proporciona una realimentación para el movimiento del inyector que controla la entrada de agua por medio de la válvula de aguja *V*.

Supóngase la situación de equilibrio inicial representada por la posición de la varilla *AGM*. Existe un equilibrio entre el consumo de agua de la turbina, que se convierte en potencia mecánica de entrada al generador con la potencia eléctrica suministrada por el mismo (se desprecian las pérdidas). Si en estas condiciones se produce un aumento de la potencia eléctrica demandada por la red a la cual se ha conectado el alternador, se producirá instantáneamente una reducción de la velocidad del grupo. El collar *M*, bajo la acción del regulador de velocidad o péndulo taquimétrico, va descendiendo lentamente hasta M' arrastrando el vástago *MA* y la palanca del distribuidor *GD*. El conducto *b* se abre y el aceite empuja al émbolo S_3 hacia arriba abriendo la válvula de aguja *V* de admisión del agua y la velocidad va decreciendo cada vez más lentamente hasta cesar finalmente su decaimiento. El punto *A*, que sigue los desplazamientos de la válvula, llega a A', lleva la palanca *AM* a la posición $A'M'$ y el vástago *GD* sube (*G* se desplaza a G' y luego vuelve a *G*). Las fases sucesivas de equilibrio de la varilla rígida *AGM* son, por consiguiente, AGM-$AG'M'$-$A'GM'$.

Habiendo cesado de decrecer la velocidad, ésta es en este momento inferior a la velocidad inicial y el distribuidor continúa actuando y abriendo la válvula *V* hasta que el vástago *GD*, que sube al mismo tiempo que la válvula, vuelve a su posición primitiva *G* cortando la entrada de aceite por el conducto *b*. Pero en este momento, debido a la entrada de agua (el vástago del servomotor está en A'), la potencia de la turbina será ligeramente superior a la de la red; la velocidad subirá de nuevo y habrá un cierre parcial de la válvula *V*. La velocidad dejará de

subir con la igualdad de la potencia mecánica P_m en la potencia eléctrica demandada P_e y de este modo el distribuidor continuará actuando hasta que la palanca *GD* pase a su posición primitiva, y así sucesivamente. Se llega así, después de algunas oscilaciones, a una nueva posición de la válvula en la que se cumple el balance de potenciar $P_m = P_e$. (Se observa que las oscilaciones se producen siempre, pero el servomotor se adelanta siempre al retorno de los pistones S_1 y S_2 del distribuidor a su posición de equilibrio amortiguando las oscilaciones). Cuando el sistema alcanza finalmente una posición de equilibrio, esta situación será diferente de la primera; el collar *M* estará en un punto intermedio entre *M* y *M′*, lo que significa que la velocidad es inferior a la que se tenía en la situación anterior y el punto *A* se sitúa entre *A* y *A′*. El consumo de agua es superior al que era antes. A un aumento de la carga ha correspondido una ligera disminución de velocidad. La regulación efectuada por este regulador es imperfecta, pero es rápida y estable.

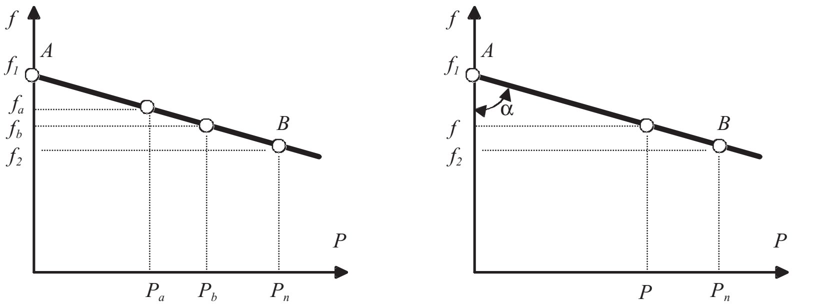
Los puntos *AGM* están alineados y existe, pues, una relación entre el recorrido de la válvula *V* y el recorrido del collar deslizante *M* del péndulo taquimétrico. La posición del vástago de la válvula determina el consumo de agua en la turbina, es decir, la potencia de la turbina, que coincide en definitiva con la potencia eléctrica suministrada por el generador. La posición del collar deslizante depende de la velocidad de la turbina. Se puede decir entonces que existe una relación entre la potencia y la velocidad de la turbina. Esta relación, que se traduce por una curva, lleva el nombre de **estatismo** y se ha representado en la Figura 5.35*a*.

La curva de estatismo de un alternador nos da la variación de su velocidad, en definitiva de su frecuencia, cuando pasa de la marcha en vacío a la plena carga, definida por su potencia asignada P_n. En la Figura 5.35*a* se ha utilizado como eje de ordenadas la frecuencia en vez de la velocidad, ya que es una magnitud más práctica para el ingeniero eléctrico. Esta línea es sensiblemente recta. El punto *A* corresponde a la marcha en vacío y la frecuencia del generador es f_1. El punto *B* corresponde a la potencia máxima (asignada) del generador y la frecuencia es f_2. La frecuencia asignada se toma como la frecuencia media:

$$f_n = \frac{f_1 + f_1}{2} \tag{5.49}$$

y con ello se define el **estatismo** por el cociente:

$$\delta_r = \frac{f_1 - f_2}{f_n} \tag{5.50}$$



a) Relación frecuencia (velocidad)-potencia *b*) Definición de constante del regulador

Figura 5.35 Recta de estatismo de un alternador.

El valor anterior suele expresarse en tanto por ciento y rara vez excede el 4 por 100. En la situación del ejemplo tratado antes, inicialmente la máquina desarrollaba una potencia P_a correspondiente a un frecuencia f_a; al aumentar la potencia demandada a un valor $P_b > P_a$, el grupo reduce ligeramente su velocidad, dando lugar a una frecuencia $f_b < f_a$. De la Figura 5.35*b* se obtienen las siguientes relaciones:

$$\text{tg}\,\alpha = K = \frac{P_n}{f_1 - f_2} = \frac{P}{f_1 - f} \quad \Rightarrow \quad f = f_1 - \frac{1}{K} P \tag{5.51)*$$

donde K se denomina **constante del regulador** o también **potencia regulante** y se mide en MW/Hz. Esta constante está relacionada con el estatismo, y teniendo en cuenta (5.50) por la relación:

$$K = \frac{P_n}{f_1 - f_2} = \frac{P_n}{\delta_r f_n} \tag{5.52}$$

la ecuación (5.51) permite calcular la frecuencia de trabajo en función de la potencia suministrada por la máquina.

Un regulador de velocidad con estatismo nulo se denomina regulador **astático**, y la respuesta frecuencia-potencia correspondiente es una recta horizontal (véase Fig. 5.36).

Esta característica astática representaría un regulador que mantendría la velocidad (frecuencia) del generador constante para cualquier potencia suministrada por la máquina. Indudablemente, esta característica sería ideal para un generador que actuara aisladamente; sin embargo, esta característica crea una indeterminación en el reparto de potencias cuando se tienen alternadores acoplados en paralelo, lo que resulta indeseable. Prácticamente ocurriría que una de las máquinas se haría cargo de toda la potencia mientras que la otra quedaría descargada.

d) Motor de control de potencia

Es el último componente que nos falta por describir de la Figura 5.34. Constituye la denominada **regulación secundaria** de la potencia suministrada por la turbina manteniendo la frecuencia constante. Hemos visto que la velocidad de un grupo turbina-alternador, controlada por el péndulo taquimétrico, variaba en función de la potencia. Cuando la potencia aumenta, la velocidad disminuye, e inversamente, cuando la potencia disminuye, la velocidad aumenta.

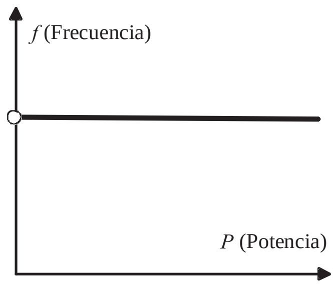


Figura 5.36. Respuesta del regulador astático.

* En los sistemas eléctricos de potencia esta ecuación se define de un modo incremental ($\Delta P = K\Delta f$, ya que no se conoce la ordenada de la recta de la Figura 5.33. Por ello sólo se determinan los cambios ΔP.

Estas variaciones están representadas por la curva de estatismo del regulador (Fig. 5.35). A una potencia dada corresponde una frecuencia determinada. Un regulador montado sobre un generador alimentando una red aislada sería incapaz de mantener la frecuencia a un valor constante y las variaciones de frecuencia serían demasiado importantes para ser toleradas por el usuario. El regulador de velocidad efectúa un **control primario**, que debe ser corregido por un dispositivo especial que devolverá la frecuencia a su valor asignado o nominal; es, en definitiva, una corrección que constituye la regulación secundaria. Veamos ahora cómo podemos obtener este resultado. Volviendo al ejemplo del péndulo taquimétrico, la regulación secundaria se obtiene haciendo variar la posición del punto *A*, es decir, modificando la longitud del vástago *AF* del servomotor. Sobre este vástago está dispuesto un piñón o tornillo que se puede enroscar o desenroscar por la acción de un motor auxiliar de control de potencia (véase Fig. 5.34). En su movimiento el tornillo arrastra el extremo *A* de la palanca *AM*. Supongamos ahora que la potencia eléctrica demandada por la red aumente y que no tenemos este motor de control que realiza la regulación secundaria. Según ya se ha indicado, la velocidad del grupo bajará, el consumo de agua aumentará y la varilla *AGM* irá a $A'GM'$. Si actuamos ahora sobre el motor de control de potencia haciendo roscar el tornillo para volver el punto A' a *A*, la palanca *AGM* toma su posición inicial y al mismo tiempo la velocidad adquiere su valor nominal. Es necesario ver que al pasar el punto A' a *A*, se tiene que aumentar al mismo tiempo la admisión de agua en la turbina, lo que permite obtener el aumento de velocidad que buscamos. (La varilla pasa por la posición intermedia $A'G''M$).

Si trazamos en la Figura 5.37 la curva de estatismo del alternador, antes de la acción del motor de control y otra después, notaremos que la curva de estatismo está desplazada paralelamente a ella para trasladarse de la primera posición a la segunda. Inicialmente la máquina trabajaba con la curva de estatismo *AB*, el régimen de funcionamiento estaba representado por el punto *C* suministrando la potencia *P* a la frecuencia asignada f_n.

Al aumentar la potencia eléctrica demandada a un nuevo valor $P' > P$, el nuevo punto de funcionamiento (sin actuar el dispositivo de regulación secundaria) sería el *D*, que correspondería a la frecuencia f'. Al actuar sobre el motor de control se consigue obtener una nueva curva de estatismo $A'B'$ paralela a la original, de tal modo que el nuevo punto de equilibrio es el C', suministrando la máquina la nueva potencia P' a la frecuencia asignada f_n. En definitiva, la acción del motor de control permite mantener la frecuencia asignada de consigna para cualquier potencia suministrada por el alternador. Lo que en definitiva hace la regulación secundaria es *engañar* al sistema creyendo que ha habido un cambio en la velocidad, haciendo actuar a la válvula de admisión de agua.

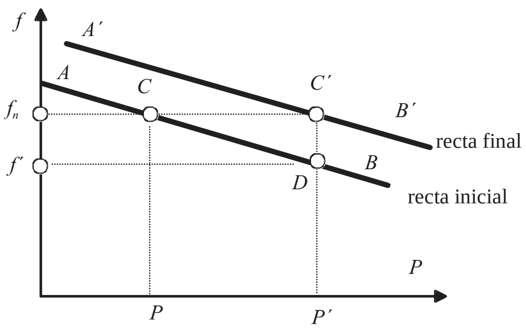


Figura 5.37. Desplazamiento de las rectas de estatismo mediante el motor de control de potencia.

Ejemplo de aplicación 5.6

Un alternador de 2,5 MW, 50 Hz, tiene un estatismo del 5 por 100. El generador tiene en vacío una frecuencia de 51 Hz. 1) ¿Cuál será la frecuencia a la que funcionará el alternador cuando alimenta una carga de 1.000 kW con f.d.p. 0,8 inductivo? 2) Si se añade ahora otra carga que consume 1.000 kW con f.d.p. 0,6 inductivo, ¿cuál será la nueva frecuencia de trabajo? 3) Después de conectar la segunda carga, ¿que se debería hacer para restablecer la frecuencia de funcionamiento a 50 Hz?

Solución

1. De acuerdo con (5.52), la constante del regulador vale:

$$K = \frac{2,5}{0,05 \cdot 50} = 1 \text{ MW/Hz}$$

y según (5.51) resultará, para una potencia de 1 MW:

$$f = 51 - 1 \cdot 1 = 50 \text{ Hz}$$

2. La segunda carga representa una potencia activa de 600 kW (1.000 · 0,6), que añadida a los 1.000 kW anteriores dan un total de 1,6 MW. La nueva frecuencia de trabajo será:

$$f = 51 - 1,6 \cdot 1 = 49,4 \text{ Hz}$$

3 Para volver la frecuencia de funcionamiento a 50 Hz, se tendrá que actuar sobre la regulación secundaria del regulador de velocidad, de tal modo que el alternador dé en vacío una frecuencia de 51,6 Hz (es decir, 50 + 1,6), y de este modo se compensará la caída de frecuencia de 1,6 Hz que sufre la máquina cuando se alimentan los 1.600 kW.

5.10. ACOPLAMIENTO DE UN ALTERNADOR A LA RED

En el mundo de hoy es muy rara la existencia de un alternador único que de manera aislada alimente su propia carga; esta situación sólo se presenta en algunas aplicaciones tales como los grupos electrógenos. Es norma general que los alternadores se sitúen en centrales eléctricas al lado de donde se encuentran las fuentes de energía primarias.

Con objeto de aumentar el rendimiento y fiabilidad del sistema, las diferentes centrales están conectadas entre sí en paralelo, por medio de líneas de transporte y distribución. La red así constituida representa un generador gigantesco en el que prácticamente **la tensión y la frecuencia se mantienen constantes**. Esto se debe a que sobre esta gran red, la introducción de un nuevo generador no altera los parámetros básicos anteriores, por representar una potencia muy reducida frente al conjunto total. Por ejemplo, en España la potencia eléctrica total instalada del conjunto del país es de alrededor de 65.000 MW; sin embargo, la potencia unitaria máxima de los alternadores existentes no llega a los 1.000 MW, lo que representa un 2 por 100 sobre el total. En terminología eléctrica, se dice entonces que se dispone de una **red de potencia infinita** (tensión y frecuencia constantes) a la cual se conectan los diferentes generadores del país. La conexión en paralelo de un alternador a la red implica una serie de operaciones complejas que constituyen la llamada **sincronización** de la máquina. Es evidente que para que tal conexión se realice sin ninguna perturbación se hace necesario que el valor instantáneo de la tensión del generador tenga igual magnitud y fase que el valor instantáneo de la tensión de la red. De esta exigencia se deducen las siguientes condiciones, necesarias para poder acoplar en paralelo un alternador a la red.

1. *Las secuencias de fases del alternador y la red deben ser idénticas.*
2. *La tensión del generador debe tener un valor eficaz igual a la tensión de la red y sus fases deben coincidir.*
3. *Las frecuencias de ambas tensiones deben ser iguales.*

Para verificar estas condiciones se emplean en la práctica unos aparatos denominados sincronoscopios, que en el caso más simple están formados por tres lámparas incandescentes. En la Figura 5.38 se muestra un circuito de este tipo. La operación comienza arrancando la máquina por medio del motor primario (turbina, diesel, etc.) hasta una velocidad cercana a la de sincronismo: $n = 60f/p$. Se introduce entonces la excitación en el inductor del alternador y se va elevando ésta gradualmente hasta que la tensión en bornes del generador coincide con la tensión de la red. En estas condiciones, si la secuencia de las fases del generador y la red son idénticas y las tres lámparas del sincronoscopio se colocan formando los vértices de un triángulo equilátero con las conexiones indicadas en la Figura 5.38, aparecerá una rotación en la iluminación de las lámparas, cuyo brillo cambiará con el tiempo. Este efecto puede explicarse con ayuda de la Figura 5.39, en la que se muestran los tres fasores de la tensión de la red, $\mathbf{V}_R$, $\mathbf{V}_S$, $\mathbf{V}_T$, y los del generador, $\mathbf{V}_{R'}$, $\mathbf{V}_{S'}$, $\mathbf{V}_{T'}$, uno que gira a la velocidad de la pulsación de la red ω y otro a la velocidad de la pulsación del alternador ω'. Dicho de otra manera, si se supone que permanecen fijos los fasores de la red, los fasores del generador girarán a una velocidad $\omega' - \omega$ respecto a la red.

En el instante señalado en la Figura 5.39 la lámpara 1 estará casi apagada y la 3 será la que brille más. Conforme gira el sistema fasorial $\mathbf{V}_{R'}$, $\mathbf{V}_{S'}$, $\mathbf{V}_{T'}$, a la velocidad $\omega' - \omega > 0$, el brillo de las lámparas se sucede en el sentido **1 - 2 - 3**. Si la velocidad $\omega' - \omega$ es menor que cero, el sentido de la iluminación se producirá en el orden contrario: **1 - 3 - 2**. Por consiguiente, la secuencia con la que se produce la máxima iluminación de las lámparas indicará el modo de

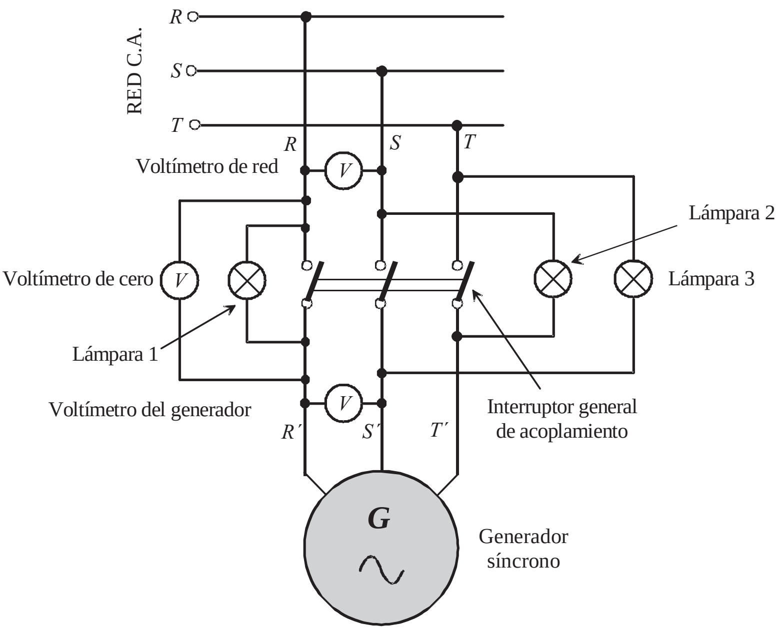


Figura 5.38. Sincronoscopio de lámparas para acoplar un alternador a la red.

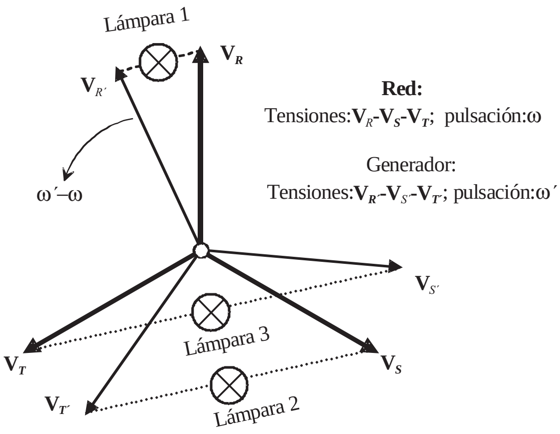


Figura 5.39. Fasores de tensiones de la red y el alternador, respectivamente.

actuar sobre el motor primario; es decir, si por ejemplo la iluminación rota en el sentido 1 - 2 - 3 indica que $\omega' > \omega$, esto es, la frecuencia del alternador es superior a la de la red y, por tanto, habrá que reducir la velocidad de la máquina motriz (turbina) cerrando la admisión de agua. Cuanto más cerca esté ω de ω', más lento será el movimiento de esta sucesión. La igualdad de fase se cumplirá cuando sea nula la tensión o iluminación de la lámpara 1, que es la que está conectada entre bornes homólogos ($R - R'$) y que se detecta con más precisión con la ayuda de un voltímetro de cero; en ese instante habrá que cerrar el interruptor general y el alternador quedará acoplado a la red. Para asegurar la mayor igualdad entre ambas frecuencias, se debe procurar que el período de encendido y apagado de una lámpara sea superior como mínimo a 4 o 5 segundos.

Es fácil calcular la d.d.p. existente en bornes de la lámpara 1. Si se denomina V_F la tensión simple de la red, que es igual a la tensión simple del generador, los valores de las tensiones simples de la fase R para la red y el generador serán, respectivamente:

$$v_{RN} = \sqrt{2}V_F \cos \omega t \quad ; \quad v_{R'N} = \sqrt{2}V_F \cos \omega' t \tag{5.53}$$

Por consiguiente, la d.d.p. en bornes de la lámpara 1 valdrá:

$$v_{RN} - v_{R'N} = v_{RR'} = \sqrt{2}V_F \, [\cos \omega t - \cos \omega' t] \tag{5.54}$$

y teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{A - B}{2} \tag{5.55}$$

resultará:

$$v_{RR'} = -2\sqrt{2}V_F \operatorname{sen} \frac{\omega + \omega'}{2} t \operatorname{sen} \frac{\omega - \omega'}{2} t \tag{5.56}$$

Al valor de la semisuma de pulsaciones se le denomina **pulsación fundamental** ω_0, y por tratarse en la práctica de magnitudes muy cercanas, se puede aceptar que es igual a la pulsación de cualquiera de ellas:

$$\omega_0 = \frac{\omega + \omega'}{2} \approx \omega \tag{5.57}$$

A la semidiferencia de frecuencias se la conoce con el nombre de **pulsación de batido** ω_b:

$$\omega_b = \frac{\omega - \omega'}{2} \tag{5.58}$$

por lo que (5.56) se transforma en:

$$v_{RR'} = -2\sqrt{2}V_F \text{ sen } \omega_0 t \text{ sen } \omega_b t \tag{5.59}$$

En la Figura 5.40 se ha representado la forma de esta tensión; obsérvese que la onda resultante tiene un valor eficaz doble que el de fase (por lo que si la tensión fase-neutro de la red es de 220 V, las lámparas se deberán prever para 440 V). La frecuencia de batido representa la frecuencia de la onda envolvente; cuanto menor sea la frecuencia de batido tanto mayor será el período de encendido y apagado de las lámparas.

Generalmente, la comprobación de la igualdad en el sentido de sucesión de las fases (R, S, T y R', S', T') no se hace en las centrales, ya que en éstas está verificado durante el tiempo que dura su montaje e instalación. En los ensayos de laboratorio es preciso realizar esta comprobación. El lector puede deducir fácilmente que si en el esquema de la Figura 5.38 no están enfrentados los bornes homólogos, no se obtiene una rotación de la iluminación de las lámparas, sino que todas a la vez o se encienden o se apagan simultáneamente. En ese caso habrá que intercambiar dos terminales del generador en su conexión al interruptor general.

En la práctica, en los grandes alternadores se ha sustituido el sincronoscopio de lámparas por otro de aguja (Fig. 5.41) cuyo principio de funcionamiento es el del motor de inducción (con un devanado monofásico en el estátor y un devanado bifásico en el rotor). La posición de la aguja muestra el ángulo de desfase entre las tensiones del generador y de la red. Cuando las

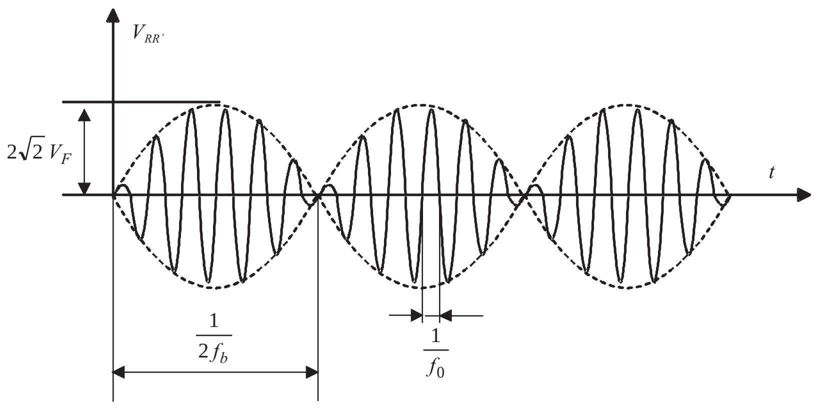


Figura 5.40. Tensión detectada por la lámpara 1 (lámpara de cero) del esquema de la Figura 5.38.



Figura 5.41. Aspecto externo de un sincronoscopio.

frecuencias son iguales la aguja se para y cuando las frecuencias difieren la aguja gira en uno u otro sentido, dependiendo de si el generador va más deprisa o más despacio que la red. La velocidad de la aguja está en relación directa con la diferencia de velocidades (frecuencias). Si $\omega' > \omega$, la aguja gira en sentido contrario a las agujas del reloj y en el cuadro del sincronoscopio se indica que es necesario frenar o retardar la velocidad del grupo actuando sobre el motor primario o máquina motriz que impulsa el generador. La igualdad de fases se determina por la posición vertical superior de la aguja, que indica el momento en el que hay que proceder al acoplamiento a la red.

En las modernas instalaciones se emplean unas columnas de sincronización (Fig. 5.42), compuestas por un brazo saliente y giratorio del cuadro general de la central y que tienen dos voltímetros (red y generador), dos frecuencímetros (red y generador) un voltímetro de cero y un sincronoscopio de aguja. En las centrales automáticas o con telemando, el acoplamiento se hace automáticamente con la ayuda de equipos electrónicos.

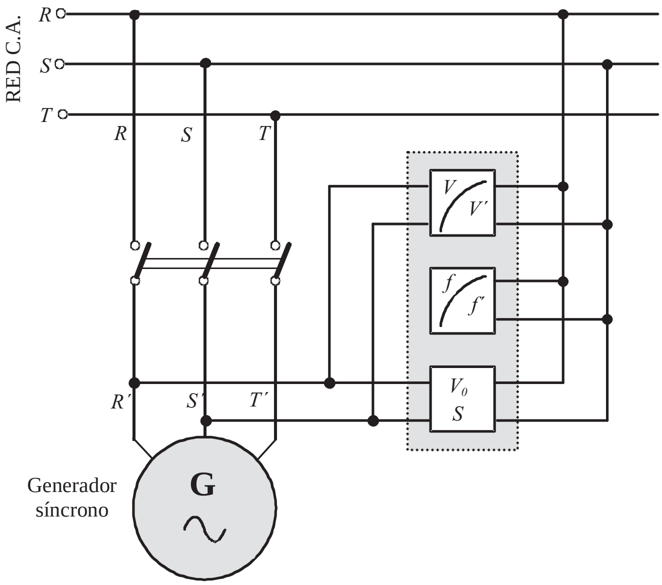


Figura 5.42. Columna de sincronización para el acoplamiento de un alternador a la red.

5.11. POTENCIA ACTIVA Y REACTIVA DESARROLLADA POR UNA MÁQUINA SÍNCRONA ACOPLADA A UNA RED DE POTENCIA INFINITA

Consideremos una máquina síncrona de rotor cilíndrico no saturada en la que se puede despreciar la resistencia del inducido frente a la reactancia síncrona cuya magnitud se supone constante. El circuito eléctrico equivalente por fase de la máquina, teniendo en cuenta el esquema de la Figura 5.17*b*, estará representado por una f.e.m. E_0 en serie con una reactancia X_s. En la Figura 5.43*a* se muestra este circuito. Si la máquina suministra una corriente I con un desfase φ inductivo a una red de potencia infinita de V voltios, de acuerdo con (5.18) se cumplirá:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \tag{5.60}$$

cuyo diagrama fasorial, tomando la tensión en bornes como referencia, se ha dibujado en la Figura 5.43*b*. La potencia compleja desarrollada por la máquina será:

$$\mathbf{S} = 3\mathbf{VI}^* = 3VI\cos\varphi + j\,3VI\,\text{sen}\,\varphi = P + jQ \tag{5.61}$$

donde $\mathbf{I}^*$ expresa el conjugado de $\mathbf{I}$.

Vamos a determinar la potencia anterior en función de la f.e.m. E_0, la tensión V y el ángulo δ que forman ambas magnitudes. De (5.60) despejamos la corriente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_0 - \mathbf{V}}{jX_s} \tag{5.62}$$

pero según la Figura 5.43*b*, las expresiones fasoriales de $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{V}$ son:

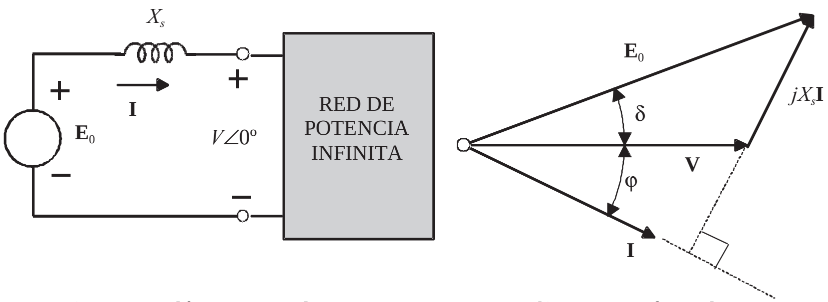
$$\mathbf{E}_0 = E_0\angle\delta = E_0\cos\delta + jE_0\,\text{sen}\,\delta \quad ; \quad \mathbf{V} = V\angle 0° \tag{5.63}$$

por lo que (5.62) se transforma en:

$$\mathbf{I} = \frac{(E_0\cos\delta - V) + jE_0\,\text{sen}\,\delta}{jX_s} \tag{5.64}$$

que corresponde a un valor conjugado:

$$\mathbf{I}^* = \frac{(E_0\cos\delta - V) - jE_0\,\text{sen}\,\delta}{-jX_s} \tag{5.65}$$



a) Circuito eléctrico equivalente *b*) Diagrama fasorial

Figura 5.43. Máquina síncrona conectada a una red de potencia infinita.

y llevando (5.64) y (5.65) a (5.61), resulta una expresión para la potencia compleja:

$$\mathbf{S} = 3V\frac{(E_0 \cos\delta - V) - jE_0 \operatorname{sen}\delta}{-jX_s} \tag{5.66}$$

que da lugar a:

$$\mathbf{S} = \frac{3E_0V}{X_s}\operatorname{sen}\delta + j3\frac{E_0V\cos\delta - V^2}{X_s} \tag{5.67}$$

que de acuerdo con (5.61) corresponde a unos valores de potencia activa y reactiva suministrada por la máquina:

$$P = \frac{3E_0V}{X_s}\operatorname{sen}\delta = P_{\text{máx}}\operatorname{sen}\delta \quad ; \quad Q = 3\frac{E_0V\cos\delta - V^2}{X_s} \tag{5.68}$$

En la Figura 5.44 se ha dibujado la senoide que representa la potencia activa (5.68) en función del ángulo δ, que se denomina **ángulo de potencia** y también **ángulo de carga**. Según (5.68), la potencia activa máxima vale.

$$P_{\text{máx}} = 3\frac{E_0V}{X_s} \tag{5.69}$$

Si $\delta > 0$, la *potencia activa desarrollada* por la máquina es positiva y corresponde al funcionamiento como generador síncrono o alternador (o de otro modo, la *máquina recibe potencia mecánica* por el eje). Si $\delta < 0$, la potencia activa es negativa, es decir, la máquina *recibe potencia activa de la red* y por ello trabaja como motor síncrono *entregando potencia mecánica* en el eje. (Conviene destacar que la Fig. 5.44 se ha representado con el *convenio generador*, tomando positiva la potencia activa cuando la máquina suministra energía eléctrica a la red; cuando se utiliza la máquina síncrona como motor en los accionamientos eléctricos, el convenio de signos de las potencias se toma al contrario del que señala la Fig. 5.44.) En definitiva, y si se tiene en cuenta el diagrama fasorial de la Figura 5.43*b*, cuando la máquina síncrona trabaja como generador la f.e.m. E_0 se adelanta a la tensión, mientras que cuando la máquina síncrona trabaja como motor la f.e.m. E_0 se retrasa respecto de la tensión.

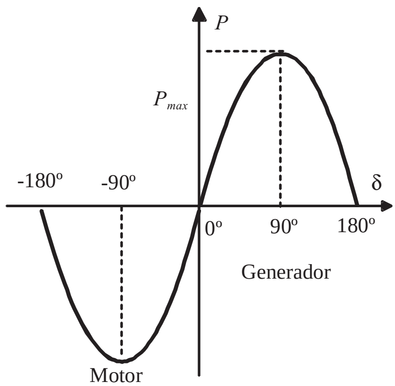


Figura 5.44. Potencia activa de una máquina síncrona en función del ángulo de carga. Convenio generador.

En la Figura 5.45 se muestra una analogía mecánica de la máquina síncrona. Se trata de dos poleas, una interior (rotor) y otra exterior (estátor), unidas por un muelle. Ambas poleas giran a la misma velocidad $\Omega = \omega$ (que representa para la polea interior el movimiento mecánico del rotor y para la exterior la velocidad del campo giratorio). En la Figura 5.45*a* el muelle que une ambas poleas no trabaja, está sin tensar y las marcas A y A' situadas en la polea interior y exterior están alineadas y no se transmite potencia de una polea a la otra. En el caso de la máquina síncrona, esto significa que los fasores $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{V}$ están alineados, por lo que $\delta = 0°$, y según la 1.ª ecuación (5.68) la potencia activa producida es igual a cero.

En el caso de la Figura 5.45*b*, la polea interior arrastra en su movimiento a la polea exterior; estando la marca A adelantada respecto de A', la potencia se transfiere de la polea interior a la exterior, es decir, del rotor al estátor, y la máquina síncrona trabaja como generador: $\mathbf{E}_0$ se adelanta a $\mathbf{V}$. Al contrario, en la situación de la Figura 5.45*c*, la polea exterior está arrastrando a la interior en virtud de que la marca A' se adelanta a la A y se transfiere potencia del estátor al rotor, y la máquina síncrona recibe entonces energía por el estátor y mueve el rotor, es decir, trabaja como motor. En este caso el fasor $\mathbf{V}$ que representa el eje del campo giratorio del estátor arrastra el rotor, cuyo eje magnético se representa por el fasor $\mathbf{E}_0$.

Obsérvese también en (5.68) que la potencia máxima generada (o absorbida) por la máquina se produce para $\delta = 90°$; este ángulo de potencia representa el límite de estabilidad permanente de la máquina síncrona. En la realidad, estas máquinas suelen trabajar con un ángulo de potencia inferior a 30°. Otro aspecto a destacar en (5.68) es el valor de la potencia reactiva producida. Se observa que si se cumple que:

$$E_0 \cos \delta > V \tag{5.70}$$

la máquina síncrona **entrega** potencia reactiva **inductiva** a la red, o lo que es lo mismo: la máquina **recibe** potencia capacitiva de la red. Se dice entonces que la máquina está **sobreexcitada**. En el caso de que se cumpla la desigualdad:

$$E_0 \cos \delta < V \tag{5.71}$$

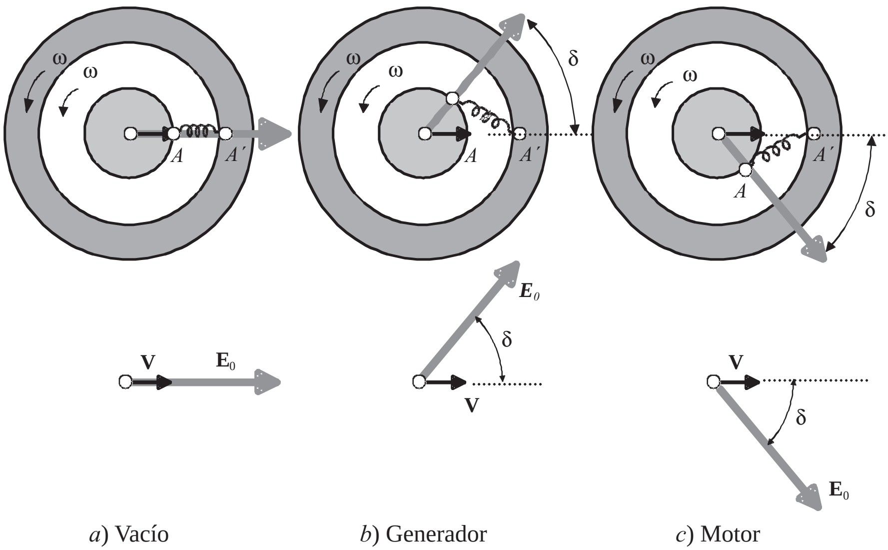


Figura 5.45. Analogía mecánica del funcionamiento de la máquina síncrona.

entonces, según (5.68), la potencia reactiva **suministrada** por el generador es negativa, es decir, **capacitiva**, o de un modo equivalente, la máquina **recibe** potencia **inductiva** de la red. Se dice entonces que el generador funciona **subexcitado**.

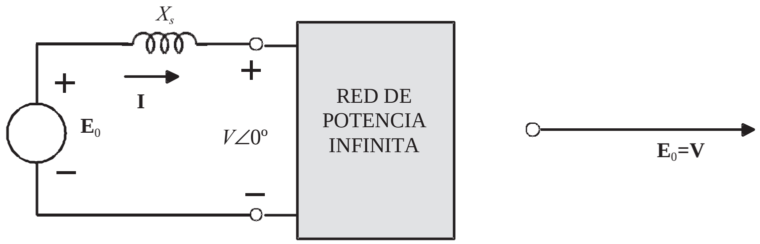
5.12. FUNCIONAMIENTO DE UNA MÁQUINA SÍNCRONA CONECTADA A UNA RED DE POTENCIA INFINITA

Cuando se conecta un alternador a una red de potencia infinita, pasa a formar parte de un sistema que comprende centenares de otros alternadores que alimentan entre todos a millones de cargas. A diferencia de un generador trabajando en una red aislada (epígrafe 5.9), en el que la carga está bien especificada, ahora es imposible saber la naturaleza de la carga (grande o pequeña, resistiva o inductiva) conectada a los bornes de un alternador específico. ¿Qué es, por tanto, lo que determina la potencia suministrada por la máquina? Sabemos que disponemos en el grupo de dos controles: *a) el sistema de regulación de tensión del alternador que controla la corriente de excitación y que en el caso del generador aislado se utilizaba para regular la tensión de salida, y b) el sistema de regulación de velocidad del motor primario que se utilizaba en el generador aislado para controlar la frecuencia.*

Ahora bien, la red a la cual se ha conectado el alternador es de potencia infinita, lo cual indica, como ya se ha señalado, que la **frecuencia y la tensión son constantes y están impuestas por esta red**. Es evidente por ello que el comportamiento de un generador en una red aislada va a diferir bastante de su funcionamiento en una red de potencia infinita, y vamos a estudiar a continuación cómo afectan los controles anteriores al funcionamiento de la máquina.

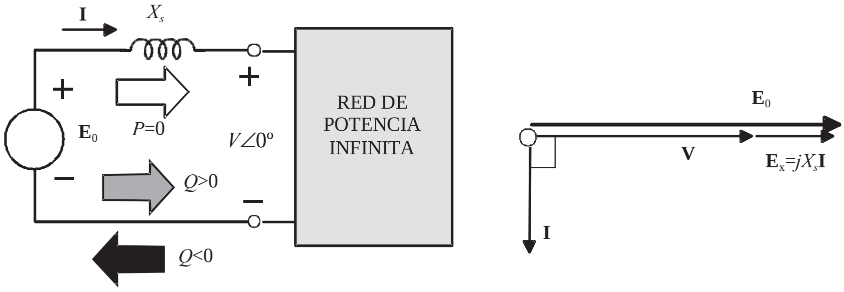
5.12.1. Efecto de la variación de excitación

Consideremos el esquema equivalente de un alternador conectado a una red de potencia infinita tal como se muestra en la Figura 5.46*a*. Como ya se ha indicado en el epígrafe 5.10, para acoplar esta máquina a la red habrá que producir una f.e.m. $\mathbf{E}_0$ de igual magnitud y fase que la tensión **V** de la red. Ésta será, por consiguiente, la situación en los instantes que siguen al acoplamiento. En la Figura 5.46*b* se muestran los fasores $\mathbf{E}_0$ y **V**, que son idénticos y, por tanto, no habrá corriente de circulación por el inducido del alternador. Aunque el alternador ha quedado conectado a la red, no suministra (ni recibe) potencia alguna: se dice entonces que trabaja en **modo flotante**.



a) Esquema eléctrico *b*) Diagrama fasorial

Figura 5.46. Máquina síncrona conectada a una red de potencia infinita en el momento de la conexión (funcionamiento en modo flotante).



a) Esquema eléctrico *b*) Diagrama fasorial

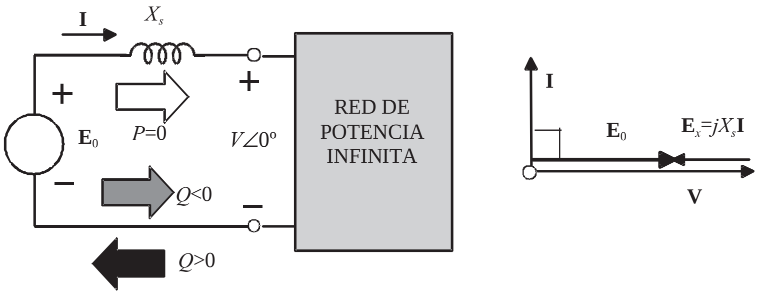
Figura 5.47. Máquina síncrona sobreexcitada conectada a una red de potencia infinita.

Si ahora se aumenta la corriente de excitación, aumentará la f.e.m. inducida E_0, que al ser superior a la tensión de la red provocará una corriente de circulación por el inducido, que de acuerdo con (5.62) será igual a:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}_0 - \mathbf{V}}{jX_s} = \frac{\mathbf{E}_x}{jX_s} \tag{5.72}$$

y en la Figura 5.47*b* se muestra el resultado. Es decir, la corriente se retrasa respecto a la diferencia de tensión $\mathbf{E}_x$ un ángulo de 90° (debido a la reactancia síncrona). Esta corriente al ser inductiva pura produce un efecto desmagnetizante que tiende a reducir E_0 para oponerse al aumento de la excitación. El alternador **entrega** a la red una potencia reactiva inductiva, o de otro modo, el generador **ve** la red como si fuera una inductancia. *El alternador está sobreexcitado*. Contrariamente a lo que podría parecer, la máquina no absorbe ni cede potencia activa: **V** e **I** están en cuadratura (véase Fig. 5.47*a*).

Si se considera ahora el caso inverso, es decir, si se disminuye la corriente de excitación de forma que E_0 se haga menor que V, aparecerá entonces una corriente en el inducido, adelantada 90° respecto de la tensión (Fig. 5.48*b*), según determina la ecuación (5.72); esta corriente al ser capacitiva pura produce un efecto magnetizante que tiende a aumentar E_0 para oponerse a la reducción de excitación. El alternador **entrega** a la red una potencia reactiva capacitiva, o de otro modo, el generador **ve** la red como si fuera un condensador. O al contrario, como se indica en la Figura 5.48*a*, el alternador absorbe potencia reactiva inductiva de la red. La máquina funciona subexcitada y no absorbe potencia activa.



a) Esquema eléctrico *b*) Diagrama fasorial

Figura 5.48. Máquina síncrona subexcitada conectada a una red de potencia infinita.

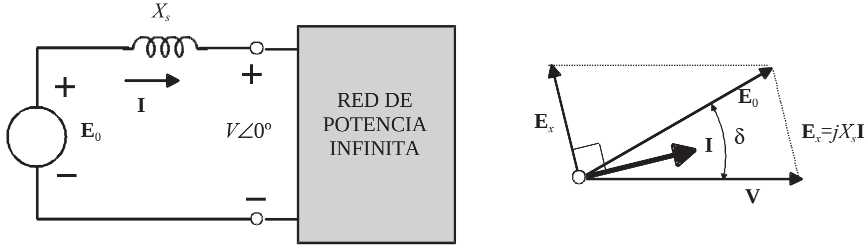
Este régimen de funcionamiento en el que la máquina síncrona no cede ni absorbe potencia activa sino sólo potencia reactiva de uno u otro signo se conoce con el nombre de **compensador síncrono**. Este compensador, según se ha demostrado, trabaja como condensador si está sobreexcitado y actúa como bobina si funciona subexcitado. En resumen: *la variación de la corriente de excitación provoca un cambio en la potencia reactiva que entrega la máquina pero no afecta a la potencia activa que puede ceder o absorber*.

5.12.2. Efectos de la variación del par mecánico (regulador de velocidad)

Es evidente que la potencia activa suministrada por una máquina síncrona conectada a una red de potencia infinita procede de la potencia mecánica suministrada por la turbina. En régimen permanente y considerando despreciables las pérdidas mecánicas y eléctricas del sistema, la potencia eléctrica generada coincidirá con la potencia mecánica suministrada por la turbina, la cual depende a su vez de la entrada de agua (o vapor en el caso de centrales termoeléctricas) a la misma, que viene gobernada como sabemos por la posición del regulador de velocidad. Si se considera como situación de partida la mostrada en la Figura 5.46, en la que el alternador está en modo flotante, con $\mathbf{E}_0$ y **V** iguales en módulo y fase, de acuerdo con (5.72) no habrá corriente en la máquina síncrona y, por tanto, la potencia eléctrica suministrada por el generador será igual a cero, lo que indica que la potencia mecánica de entrada será nula (realmente la turbina recibirá una pequeña cantidad de agua para vencer las pérdidas del grupo). Si en estas condiciones se abre la admisión de agua a la turbina (actuando sobre el regulador de velocidad), el rotor se acelerará como consecuencia del desequilibrio instantáneo provocado entre la potencia mecánica y eléctrica, y esto hace que la f.e.m. generada se adelante a la tensión de la red en un ángulo δ tal, que la potencia activa de salida se equilibre con la potencia de entrada mecánica. Aunque ambas tensiones tienen el mismo valor eficaz, el desfase entre las mismas determina una tensión $\mathbf{E}_x$ (Fig. 5.49*b*) que, de acuerdo con (5.72), provoca una corriente de circulación **I** retrasada 90° respecto de aquélla. La potencia eléctrica cedida por el generador a la red será, de acuerdo con (5.68):

$$P = \frac{3E_0V}{X_s} \operatorname{sen} \delta \tag{5.73}$$

que es función del ángulo de potencia δ, lo que indica que si la excitación permanece constante, es decir, se mantiene fija la f.e.m. E_0, a medida que aumenta la potencia activa, crece el



a) Esquema eléctrico *b*) Diagrama fasorial

Figura 5.49. Efecto de la variación de la potencia mecánica de entrada.

desfase δ entre V y E_0. En definitiva, se puede decir que *la variación del regulador de velocidad de la turbina provoca un cambio en la potencia activa que entrega la máquina, que se ve reflejada físicamente como una modificación en el ángulo δ que forma la f.e.m. E_0 con la tensión V.*

Para una determinada excitación, la potencia activa será máxima para $\delta = \pi/2$, que corresponde al límite de capacidad de sobrecarga estática o **límite de estabilidad estática** del alternador. Un aumento posterior en la entrada de la máquina motriz (turbina) hace que la potencia activa disminuya y el exceso de potencia se convierte en par de aceleración que provoca un aumento de velocidad en el generador, saliéndose del sincronismo. Debe destacarse que al ser la red de potencia infinita, la *frecuencia es constante*, lo que indica que la velocidad del alternador no puede variar. Un cambio en el regulador de velocidad modifica solamente el ángulo δ para equilibrar la potencia mecánica de entrada con la eléctrica de salida. (Realmente existe un cambio de velocidad en el estado transitorio en el que se produce una variación en el equilibrio de potencias).

En el diagrama de la Figura 5.49*b*, si además de variar la entrada de potencia mecánica (actuando sobre el regulador de velocidad), se hace variar también la corriente de excitación, se modificará (según se ha indicado en 5.12.1) la f.e.m. E_0 producida por el generador. En la Figura 5.50 se muestra el nuevo diagrama fasorial resultante, en el que se observa la modificación de la magnitud y fase de la nueva corriente de circulación. Si no se ha actuado en el regulador de velocidad, el ángulo δ de esta Figura 5.50 debe ser tal que se tendrá que seguir cumpliendo la igualdad (5.73) para el nuevo valor alcanzado por E_0.

Es interesante conocer el lugar geométrico de los afijos de las f.e.m.s. y corrientes que aparecen en la máquina síncrona *al variar la excitación y permanecer constante la entrada al motor primario, es decir, sin que varíe la potencia que la máquina entrega a la red*. Obsérvese en la Figura 5.50 que si P es constante, de acuerdo con (5.61) será constante la componente activa de la intensidad:

$$P = 3\,VI \cos \varphi = 3\,V\,[OA] = K_1\,[OA] \tag{5.74}$$

Es decir, al variar la excitación de la máquina a potencia activa constante, el lugar geométrico del afijo del fasor **I** se desplaza según una recta perpendicular a la tensión **V**. Por otra parte, si se tiene en cuenta la ecuación (5.68), al ser P constante, se mantendrá invariable la proyección de la f.e.m. $\mathbf{E}_0$ sobre un eje perpendicular a **V**:

$$P = 3\,\frac{V}{X_s}\,E_0 \text{ sen } \delta = 3\,\frac{V}{X_s}\,[BC] = K_2\,[BC] \tag{5.75}$$

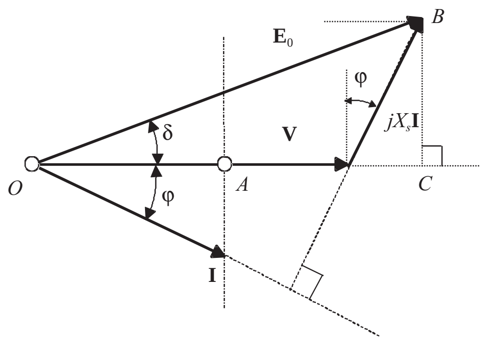


Figura 5.50. Diagrama fasorial de la máquina síncrona para estudiar los lugares geométricos de *E* e *I*.

Lo anterior indica que al variar la excitación y ser P constante, el extremo del fasor $\mathbf{E}_0$ se desplazará a lo largo de una recta paralela a $\mathbf{V}$ a una distancia E_0 sen δ o su equivalente $X_s I$ cos φ. En la Figura 5.51 se muestra esta composición geométrica para cuatro valores de la excitación. Para el primer valor se obtiene la f.e.m. E_{01}, que corresponde a una corriente I_1 suministrada por el generador a la red (que tiene carácter inductivo por estar en retraso con la tensión). Si se va reduciendo la excitación, disminuye el valor de la f.e.m., el afijo de la corriente se desplaza sobre la recta, reduciéndose la componente reactiva de la intensidad, que pasará por un valor nulo correspondiente a la corriente I_2 y a la f.e.m. E_{02}. Hasta este punto la máquina ha funcionado en **régimen de sobreexcitación**, ya que se está cumpliendo la desigualdad (5.70). Si se reduce aún más la excitación se invertirá el carácter reactivo de la corriente. En la Figura 5.51 se puede observar este efecto para las f.e.m.s. E_{03} y E_{04}, que corresponden a las corrientes I_3 e I_4, que tienen para el generador carácter capacitivo. En estas condiciones la **máquina está subexcitada**. La f.e.m. E_{04} forma 90° con la tensión y representa el caso límite que puede conseguirse, pues a partir de ese momento la máquina se desestabiliza. En consecuencia, la magnitud E_{04} representa la mínima f.e.m. a la que se puede llegar reduciendo la excitación (para el valor de la potencia mecánica que se ha mantenido constante). Conviene que observe el lector que en todas las situaciones contempladas en la Figura 5.51 las distintas f.e.m.s. se adelantan a las tensiones, lo que ya se advirtió con la analogía mecánica de la Figura 5.45.

Si se va reduciendo progresivamente la potencia mecánica aplicada al árbol del alternador desde la máquina motriz (lo que se consigue en las turbinas hidráulicas cerrando la admisión de agua), el ángulo δ formado por E_0 y V comienza a disminuir, reduciéndose al mismo tiempo la potencia activa suministrada por el generador. En el caso ideal de despreciar las pérdidas se llegaría a la situación del compensador síncrono (Figs. 5.47 y 5.48), para el cual P = 0, es decir, δ = 0; en la práctica E_0 y V formarán un ángulo muy pequeño necesario para

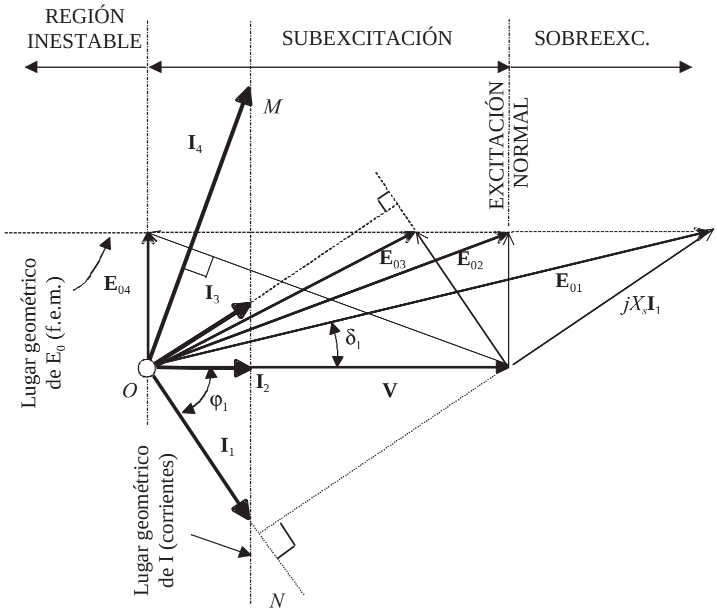


Figura 5.51. Lugares geométricos de E e I en régimen de subexcitación y sobreexcitación.

que el motor primario cubra las pérdidas del funcionamiento en vacío del generador. Si se desconecta entonces el motor primario del árbol de la máquina síncrona, el ángulo δ se hará negativo, ya que entonces el rotor comienza a retrasarse respecto del flujo giratorio del estátor, pero la máquina continuará girando sincrónicamente arrastrada por este campo rotativo. En estas condiciones la máquina comienza a funcionar como motor síncrono transformando la energía eléctrica absorbida de la red en energía mecánica en el eje. Si se va aumentando el par en el eje, aumenta la potencia absorbida por la máquina y en consecuencia el rotor se retrasa más aún del estátor, el límite de estabilidad se obtiene cuando $\delta = -90°$; en ese momento la máquina pierde el sincronismo, ya que la potencia mecánica se hace superior a la que absorbe eléctricamente de la red. Generalmente se diseñan los motores de tal forma que para la potencia asignada el ángulo de carga está comprendido entre −20° y −30° eléctricos.

Si la potencia absorbida por el motor es constante, o en términos equivalentes, si el motor mueve una carga de par constante, al variar la excitación se obtiene un lugar geométrico de las f.e.m.s. generadas y corrientes tal como se muestra en la Figura 5.52.

Se han dibujado cuatro situaciones distintas. En el caso primero la f.e.m. es E_{01} y la corriente I_1 forma un ángulo φ con la tensión, superior a 90°, de este modo la potencia compleja **entregada** por la máquina síncrona a la red, según (5.61), tendrá una parte real negativa, es decir, la máquina **recibe** potencia activa de la red y una parte imaginaria positiva, lo que significa que **entrega** potencia reactiva inductiva a la red, o de otro modo, que **recibe** potencia capacitiva de la red. La máquina está sobreexcitada. Al reducir la excitación, se reduce la componente reactiva de la intensidad, que pasa por un valor nulo cuando la corriente es I_2 (que corresponde a la f.e.m. E_{02}), y si la reducción aumenta, la componente reactiva de

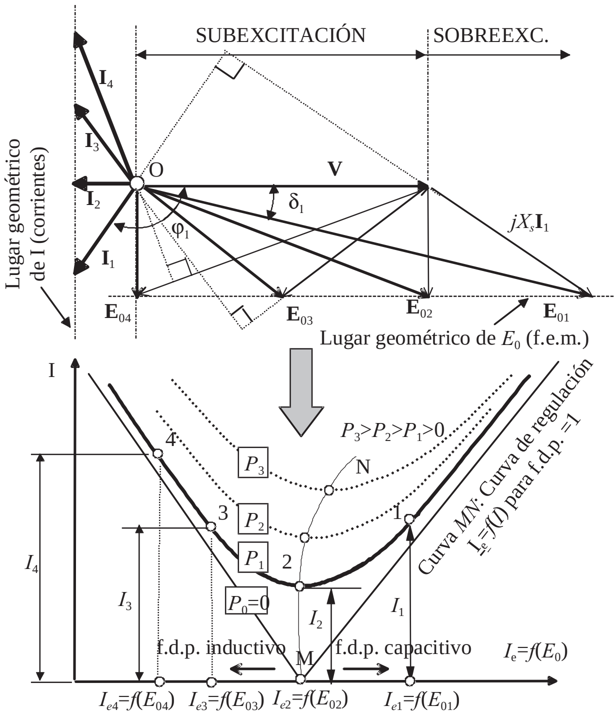


Figura 5.52. Curvas en V de Mordey.

la corriente cambia de signo: éste es el caso de las corrientes I_3 e I_4. En este último caso la f.e.m. E_{04} forma un ángulo $\delta = -90°$ con la tensión y representa la situación límite, pues a partir de ese momento una nueva reducción de la excitación provocará la desestabilización del motor. Si se dibuja en un gráfico la corriente del inducido (ordenadas) en función de la corriente de excitación (abcisas) a potencia constante se obtienen unas curvas en forma de V, que se denominan **curvas en V de Mordey** del motor síncrono. En la parte inferior de la Figura 5.52 se muestra con línea continua unas curvas de este tipo para una determinada potencia de entrada. Al variar ésta se obtiene un haz de curvas en V tal como se señala con las líneas de trazo discontinuo.

En todas las situaciones anteriores las f.e.m.s. se retrasan respecto a la tensión V de la red, lo que refleja el comportamiento de la máquina como motor (véase analogía mecánica en la Fig. 5.45), y la máquina **entrega** a la red una potencia eléctrica negativa o **recibe** de la red una potencia eléctrica que se convierte en mecánica.

Esta dualidad de expresiones entrega/recibe que se van subrayando en el texto suele ser motivo de confusión. Para evitarlo el ingeniero prefiere utilizar el verbo **entregar**: cuando la máquina trabaja como motor, lo que está más de acuerdo con la transferencia de energía real que se produce en el funcionamiento de la máquina. En la Figura 5.53 se muestran dos esquemas que darán mayor claridad a la explicación. En el caso de la figura superior la máquina trabaja como generador y se cumplirá la siguiente relación de tensiones:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} \tag{5.76}$$

La máquina entregará a la red una potencia activa positiva:

$$P = 3VI\cos\varphi = (+) \tag{5.77}$$

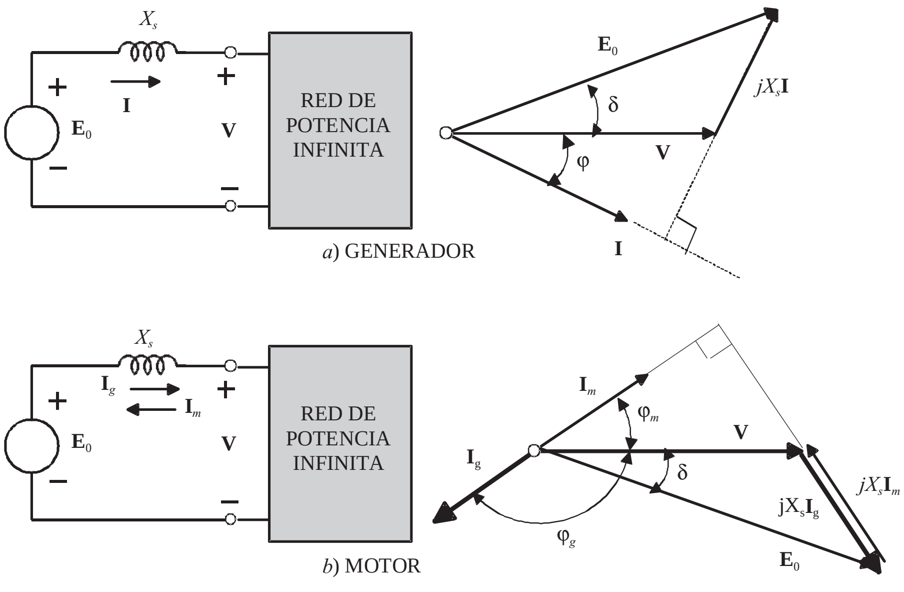


Figura 5.53. Comportamiento de la máquina síncrona como generador y como motor. Diagramas fasoriales.

En la situación de la figura inferior, que corresponde a un comportamiento como motor, la corriente I_g que **entrega** la máquina a la red forma un ángulo con la tensión superior a 90°, y por ello dará lugar a una potencia activa entregada negativa. Las ecuaciones (5.76) y (5.77) serán ahora:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + j\,X_s\mathbf{I}_g \quad ; \quad P_g = 3\,VI_g \cos\varphi_g = (-) \tag{5.78}$$

En la parte derecha de la figura se muestra el diagrama fasorial de tensiones.

Ahora bien, la misma situación se puede definir con una mayor sencillez utilizando una corriente absorbida por el motor I_m, que es igual y opuesta a la que producía como generador I_g. En estas condiciones las ecuaciones equivalentes a (5.78) serán:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} - j\,X_s\mathbf{I}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{E}_0 + j\,X_s\mathbf{I}_m \tag{5.79}$$

$$P_m = 3\;VI_m \cos\varphi_m = (+) \tag{5.80}$$

En el estudio del motor síncrono que se hará más adelante se utilizarán las ecuaciones (5.79) y (5.80) en vez de (5.78), lo que da mayor claridad al significado físico de las ecuaciones.

Ejemplo de aplicación 5.7

Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una impedancia síncrona de valor 0 + j10 Ω/fase y está acoplado a una red de potencia infinita de 11 kV de tensión compuesta. Para una determinada excitación, la máquina entrega a la red una corriente de 250 A con f.d.p. unidad. Posteriormente, y manteniendo la potencia activa constante, se eleva la excitación hasta que la corriente de carga es de 300 A. Calcular: a) F.d.p. cuando suministra 300 A; b) f.e.m.s. y ángulos de carga en ambas situaciones; c) potencias activas y reactivas suministradas.

Solución

a) La máquina entrega a la red inicialmente una potencia activa ($\cos\varphi = 1$):

$$P\;\sqrt{3} \cdot 11.000 \cdot 250 \cdot 1 \;\approx\; 4.763 \text{ kW}$$

Como la potencia se mantiene constante, cuando el alternador entrega 300 A a la red se cumplirá:

$$P = 4.763 \text{ kW} = \sqrt{3} \cdot 11.000 \cdot 300 \cos\varphi_2$$

de donde se deduce:

$$\cos\varphi_2 = 0{,}833 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 33{,}55° \text{ inductivo}$$

b) Si se toma como referencia de fases la tensión simple de la red se cumplirá:

$$\mathbf{V} = \frac{11.000}{\sqrt{3}} \angle\, 0° = 6.351 \angle\, 0° \quad ; \quad \mathbf{I}_1 = 250 \angle\, 0° \quad ; \quad \mathbf{I}_2 = 300 \angle -33{,}55°$$

y al aplicar (5.78) se obtiene:

$$\mathbf{E}_{01} = \frac{11.000}{\sqrt{3}} \angle\, 0° + j\,10 \cdot 250 \angle\, 0° = 6.825{,}2 \angle\, 21{,}5°$$

$$\mathbf{E}_{02} = \frac{11.000}{\sqrt{3}} \angle\, 0° + j\,10 \cdot 300 \angle -33{,}55° = 8.390{,}1 \angle\, 17{,}34°$$

que corresponden a valores de línea y ángulos de carga siguientes:

$$E_{01}\text{ (línea)} = 11.821,6 \text{ V} \quad ; \quad \delta_1 = 21,5° \quad ; \quad E_{02}\text{ (línea)} = 14.532 \text{ V} \quad ; \quad \delta_2 = 17,34°$$

c) La potencia activa suministrada en ambos casos es la misma y ya se calculó en el apartado *a*): $P = 4.763$ kW. Las potencias reactivas serán:

$$Q_1 = 0 \text{ (pues el f.d.p. era la unidad) ; } Q_2 = \sqrt{3} \cdot 11.000 \cdot 300 \cdot \text{sen } 33,55° = 3.159 \text{ kVAR}$$

Ejemplo de aplicación 5.8

Un motor síncrono conectado en estrella tiene una impedancia síncrona de 0,6 + j6 Ω/fase y se conecta a una red de 2.200 V, 50 Hz. Calcular: a) F.e.m. producida cuando la máquina absorbe una potencia eléctrica de la red de 200 kW con f.d.p. 0,8 capacitivo; b) ángulo δ de retraso del rotor respecto del estátor.

Solución

a) Si se toma la tensión como referencia de fases, se tiene:

$$V = \frac{2.200}{\sqrt{3}} \angle 0° = 1.270 \angle 0°$$

La corriente que absorberá el motor de la red será:

$$I_m = \frac{P}{\sqrt{3}V \cos \varphi} = \frac{200.000}{\sqrt{3} \cdot 2.200 \cdot 0,8} = 65,6 \text{ A}$$

que al ser capacitiva corresponde a un valor fasorial:

$$\mathbf{I}_m = 65,6 \angle +36,87° \quad ; \quad \text{arcos } 0,8 = 36,87°$$

b) De acuerdo con (5.79), sustituyendo la reactancia síncrona por la impedancia, resulta:

$$\mathbf{E}_0 = 1.270 - (0,6 + j\,6) \cdot 65,6 \angle 36,87° = 1.513 \angle -13°$$

En consecuencia, el módulo de la f.e.m. de línea será:

$$E_0 \text{ (línea)} = 1.513\sqrt{3} = 2.620,6 \text{ V}$$

y el ángulo de carga δ será: $\delta = -13°$, que nos indica que $\mathbf{E}_0$ se retrasa 13° respecto de **V**.

5.13. FUNCIONAMIENTO EN PARALELO DE ALTERNADORES DE POTENCIAS SIMILARES

Se ha demostrado en el epígrafe 5.9 que cuando un generador trabaja en una red aislada, las potencias activas y reactivas suministradas por el alternador son iguales a las que demanda la carga. La frecuencia de funcionamiento se controla con el regulador de velocidad de turbina y la tensión de salida se modifica actuando sobre la corriente de excitación.

En el caso de que el generador trabaje en una red de potencia infinita (véase epígrafe 5.12), la frecuencia y la tensión del generador son fijas y están impuestas por la red, de tal modo que la **potencia activa suministrada por la máquina se controla mediante el regulador de velocidad**, **mientras que la potencia reactiva se modifica regulando la corriente de excitación**.

Vamos a considerar ahora el funcionamiento de dos alternadores en paralelo que tienen potencias similares y que alimentan una carga. De este modo podremos sacar conclusiones prácticas de la misión de los reguladores de velocidad en estas máquinas. En la Figura 5.54*a* se muestra el circuito eléctrico equivalente después del acoplamiento. Cada generador se representa por una fuente de f.e.m. $\mathbf{E}_0$ en serie con la reactancia síncrona (se desprecian las resistencias de los inducidos). Es evidente que la suma de las potencias activas y reactivas entregadas por los generadores debe ser igual a la que demanda la carga.

Vamos a demostrar que el reparto de la potencia activa total entre ambos alternadores es función de las pendientes de las curvas frecuencia-potencia de cada máquina y de la posición de los reguladores de velocidad de los motores primarios. Para verlo de un modo gráfico, en la Figura 5.54*b* se han representado las rectas de estatismo de ambas máquinas (curvas frecuencia-potencia), se ha empleado el mismo eje vertical para representar la frecuencia y dos ejes de abscisas para determinar las potencias suministradas por cada generador. Si P_I representa la potencia demandada en un determinado instante por la carga, el reparto de potencias será el mostrado en la Figura 5.54*b*. La máquina 1 suministrará la potencia P_1 mientras que la máquina 2 suministrará la potencia P_2, siendo f_a la frecuencia común de funcionamiento. Si la carga aumenta a un valor P_{II}, la frecuencia desciende poco a poco en ambas máquinas hasta alcanzar un nuevo valor f_b para el cual las potencias suministradas por los generadores son ahora P_1' y P_2', de tal modo que $P_1' + P_2' = P_{II}$. Se observa en la Figura 5.54*b* que para cada valor de la frecuencia se tiene un valor definido de las potencias generadas por cada una de las máquinas.

Se puede hacer un estudio analítico del reparto si se tiene en cuenta la ecuación (5.51). A la frecuencia f_a común de funcionamiento se cumplirá:

$$f_a = f_1 - \frac{1}{K_1} P_1 = f_2 - \frac{1}{K_2} P_2 \qquad (5.81)$$

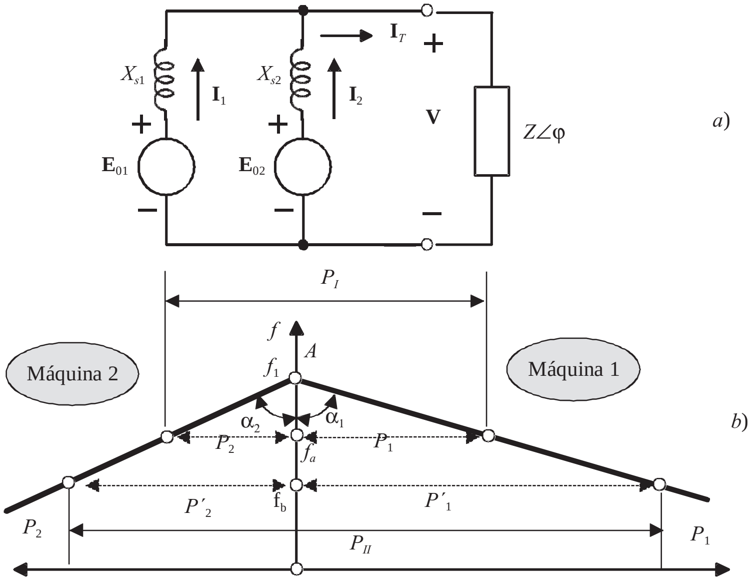


Figura 5.54. Funcionamiento en paralelo de alternadores de potencias similares.

donde f_1 y f_2 representarían las frecuencias de vacío de cada generador (punto A de la Fig. 5.54), que en nuestro esquema coinciden. De este modo (5.81), teniendo en cuenta (5.51), se convierte en:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} \tag{5.82}$$

que nos indica lo que de un modo evidente se observa en la Figura 5.54: las potencias activas se reparten de un modo directamente proporcional a las constantes de los reguladores. Resultará más cargado el generador que tenga el ángulo α mayor (alternador 1 en el caso de la Fig. 5.54). En definitiva, toma más carga el generador que tenga la característica frecuencia-potencia más plana. Se puede proceder a un reparto diferente de las cargas si se actúa en la regulación secundaria de los reguladores. En la Figura 5.55 se ha repetido el esquema de la Figura 5.54*b*, pero donde ahora se ha reducido la posición del regulador 1. Obsérvese entonces que la misma potencia P_1 que en el caso de la Figura 5.54*b* se repartía de un modo desigual, ahora se distribuye de un modo más equitativo; sin embargo, la frecuencia de funcionamiento f_c se ha reducido, siendo menor que la f_a que se obtenía en el caso anterior. En definitiva, cuando funcionan dos generadores en paralelo, la reducción en la posición del regulador de uno de ellos provoca: *1) Reducción en la frecuencia del conjunto; 2) reducción de la potencia suministrada por ese generador, mientras aumenta la potencia entregada por el otro.*

Vamos a ver qué ocurre con las potencias reactivas. De acuerdo con (5.68) se tiene:

$$Q = 3\,\frac{E_0 V}{X_s} \cos \delta - 3\,\frac{V^2}{X_s} \tag{5.83}$$

Si se modifica la excitación de las máquinas no cambiará la distribución de potencias activas; sin embargo, se alterará la división de la potencia reactiva. Comprobémoslo:

Para la máquina 1 la potencia activa es igual, según (5.73), a:

$$P_1 = 3\,\frac{E_{01} V}{X_{s1}} \text{sen } \delta_1 \tag{5.84}$$

donde δ_1 es el ángulo que forman $\mathbf{E}_{01}$ y $\mathbf{V}$. Por otro lado, la potencia reactiva será:

$$Q_1 = 3\,\frac{E_{01} V}{X_{s1}} \cos \delta_1 - 3\,\frac{V^2}{X_{s1}} \tag{5.85}$$

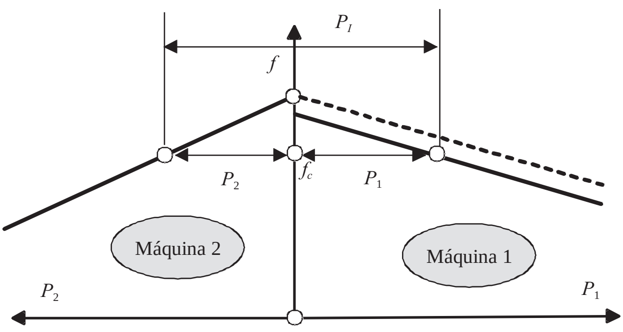


Figura 5.55. Reparto de potencias entre alternadores conectados en paralelo.

Despreciando por el momento cualquier variación en la tensión V, al aumentar la excitación de la máquina se eleva la f.e.m. E_{01}, lo que reducirá el sen δ_1, ya que P_1 es constante al estar fijado por la entrada del motor primario (turbina 1); δ_1 disminuirá, por lo que cos δ_1 aumentará y en consecuencia Q_1 aumentará también. En realidad el proceso es más complejo ya que al cambiar la excitación se modifica la tensión V, lo que hace variar la potencia absorbida por la carga; esto hace cambiar la velocidad del motor primario, alterándose con ello la frecuencia, lo que provocará nuevos cambios adicionales en la carga.

Ejemplo de aplicación 5.9

Se dispone de dos generadores que alimentan una carga. El generador 1 tiene en vacío una frecuencia de 51,5 Hz y una pendiente de 1 MW/Hz. El generador 2 presenta una frecuencia en vacío de 51 Hz y con la misma pendiente. Los dos generadores alimentan una carga total de 2,5 MW con f.d.p. 0,6 inductivo. Calcular: 1) ¿A qué frecuencia funciona el sistema y qué potencias activas suministran cada uno de los generadores?; 2) supóngase que se conecta una carga adicional de 1 MW. ¿Cuál sería la nueva frecuencia del sistema y las nuevas potencias activas?; 3) en la situación del apartado anterior se aumenta en 0,5 Hz la posición del regulador del alternador 2. Determinar la nueva frecuencia del sistema y el reparto de la potencia entre los dos generadores.

Solución

1. De acuerdo con (5.51), la expresión de las rectas frecuencia-potencia serán:

$$f = 51{,}5 - P_1 \cdot 1 \quad ; \quad f = 51 - P_2 \cdot 1$$

ya que la pendiente es igual a 1. Igualando ambas frecuencias se obtiene:

$$51{,}5 - P_1 = 51 - P_2$$

y además la suma de las potencias es de 2,5 MW, de donde se deduce.

$$P_1 = 1{,}5 \text{ MW} \quad ; \quad P_2 = 1 \text{ MW} \quad ; \quad f = 50 \text{ Hz}$$

2. Procediendo de un modo similar, teniendo en cuenta que se añade una carga de 1 MW, resulta:

$$P_1' = 2 \text{ MW} \quad ; \quad P_2' = 1{,}5 \text{ MW} \quad ; \quad f' = 49{,}5 \text{ Hz.}$$

3. Al cambiar la posición del regulador 2 su característica frecuencia-potencia será:

$$f = 51{,}5 - P_2$$

que coincide con la del generador 1 y, por consiguiente, la potencia total de 3,5 MW se repartirá por igual entre ambos generadores.

$$P_1'' = P_2'' = 1{,}75 \text{ MW}$$

lo que da lugar a una frecuencia de 49,75 Hz.

Ejemplo de aplicación 5.10

Dos alternadores trifásicos trabajan en paralelo y alimentan una carga de 6 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. La frecuencia de uno de ellos cae de 51 Hz a 49,75 Hz cuando alimenta una carga de 10 MW, y el otro pasa de 51 Hz a 49,5 Hz cuando se carga con 2 MW. Determinar las potencias activas suministradas por cada alternador y el f.d.p. con el que trabaja el primero, si el segundo funciona con un f.d.p. 0,71 inductivo.

Solución

De acuerdo con (5.51), las constantes de cada regulador serán:

$$K_1 = \frac{10}{51 - 49{,}75} = 8 \text{ MW/Hz} \quad ; \quad K_2 = \frac{2}{51 - 49{,}5} = 1{,}33 \text{ MW/Hz}$$

De este modo se tienen las características de los reguladores:

$$f = f_1 - \frac{1}{K} P \quad \Rightarrow \quad f = 51 - \frac{1}{8} P_1 = 51 - \frac{1}{1{,}33} P_2$$

ya que en paralelo trabajarán con la misma frecuencia. De la ecuación anterior se desprende que:

$$P_1 = 6P_2$$

y como quiera que $P_1 + P_2 = 6$ MW, se obtiene:

$$P_1 = 5{,}143 \text{ MW} \quad ; \quad P_2 = 0{,}857 \text{ MW}$$

La potencia activa total es de 6 MW con f.d.p. 0,8 inductivo, y por consiguiente, la potencia reactiva total será:

$$Q_T = P_T \text{ tg } \varphi_T = 6 \cdot 0{,}75 = 4{,}5 \text{ kVAR}$$

que corresponde a una potencia compleja:

$$\mathbf{S}_T = 6 + j\,4{,}5$$

De un modo análogo, la potencia compleja del 2.º generador, que suministra 0,857 MW con f.d.p. 0,71 inductivo, será:

$$\mathbf{S}_2 = 0{,}857 + j\,0{,}85$$

de donde se deduce una potencia compleja para el alternador 1:

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_T - \mathbf{S}_2 = 5{,}143 + j\,3{,}65 = 6{,}306 \angle\, 35{,}36°$$

por lo que su f.d.p. será igual a cos 35,36° = 0,815.

Ejemplo de aplicación 5.11

Dos alternadores distintos conectados en estrella están acoplados en paralelo alimentando una carga aislada. Ambas máquinas tienen sus resistencias de inducido despreciables. La reactancia síncrona de la primera máquina es de 3 Ω y la de la segunda vale 4 Ω. Las f.e.m.s. por fase generadas por ambas máquinas son iguales a 220 V, estando la f.e.m. E_2 del segundo generador retrasada 20° respecto a la f.e.m. E_1 del primero. Se sabe también que la carga absorbe una corriente total de 18,1 A que está retrasada 42,5° respecto de E_1. Calcular: a) f.d.p. de la carga; b) corrientes suministradas por cada alternador con sus f.d.p. respectivos; c) tensión simple en la barra común a ambas máquinas; d) potencias activas y reactivas suministras por los dos generadores; e) potencia activa y reactiva absorbida por la carga.

Solución

a) El esquema correspondiente al montaje citado es el que se muestra en la Figura 5.54*a*. Para poder resolver las ecuaciones eléctricas que representan el comportamiento de la red es preciso elegir alguna referencia de fases; lo más cómodo será tomar la tensión en barras como origen de fases. Respecto a esta referencia se presentarán los valores de los argumentos de todas las magnitudes implicadas. Es conveniente partir de valores de argumentos

positivos para evitar errores en los signos de los ángulos. Al resolver después las ecuaciones se obtendrán los signos reales. De acuerdo con estas premisas, las magnitudes involucradas en el problema responderán a las formas fasoriales siguientes:

$$\mathbf{V} = V \angle 0° \quad ; \quad \mathbf{I}_1 = I_1 \angle \varphi_1 \quad ; \quad \mathbf{I}_2 = I_2 \angle \varphi_2$$

Si se denomina δ_1 el ángulo de potencia del alternador 1, es decir, el ángulo de adelanto de la f.e.m. respecto de la tensión en este generador, y si se tiene en cuenta además que las f.e.m.s. $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ tienen un módulo de 220 V y que la fase de $\mathbf{E}_2$ se retrasa según el enunciado 20° respecto de la del primero, las expresiones fasoriales de las f.e.m.s. serán:

$$\mathbf{E}_1 = 220 \angle \delta_1 \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = 220 \angle (\delta_1 - 20°)$$

Si se denomina φ_T al desfase de la corriente de carga respecto de la tensión y sabiendo que la corriente de carga se retrasa 43,5° respecto de $\mathbf{E}_1$ y que el módulo de la corriente total es de 18,1 A, se tendrá la siguiente expresión fasorial de la corriente de carga:

$$\mathbf{I}_T = 18{,}1 \angle \varphi_T = 18{,}1 \angle (\delta_1 - 42{,}5°)$$

Aplicando ahora los lemas de Kirchhoff a la red de la Figura 5.54*a* resulta:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{V} + jX_1\mathbf{I}_1 \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{V} + jX_2\mathbf{I}_2 \quad ; \quad \mathbf{I}_T = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$$

que teniendo en cuenta las expresiones fasoriales señaladas antes y los valores de las reactancias síncronas, da lugar a:

$$220 \angle \delta_1 = \mathbf{V} + j3\mathbf{I}_1 \angle \varphi_1 = \mathbf{V} + 3I_1 \angle (90° + \varphi_1)$$

$$220 \angle (\delta_1 - 20°) = \mathbf{V} + j4\mathbf{I}_2 \angle \varphi_2 = \mathbf{V} + 4\mathbf{I}_2 \angle (90° + \varphi_2)$$

$$18{,}1 \angle (\delta_1 - 42{,}5°) = \mathbf{I}_1 \angle \varphi_1 + \mathbf{I}_2 \angle \varphi_2$$

Las tres ecuaciones complejas anteriores se convertirán en seis ecuaciones algebraicas al igualar partes reales e imaginarias en cada una de ellas, resultando:

1) $220 \cos \delta_1 = V - 3I_1 \operatorname{sen} \varphi_1$
2) $220 \operatorname{sen} \delta_1 = 3I_1 \cos \varphi_1$
3) $220 \cos (\delta_1 - 20°) = V - 4I_2 \operatorname{sen} \varphi_2$
4) $220 \operatorname{sen} (\delta_1 - 20°) = 4I_2 \cos \varphi_2$
5) $18{,}1 \cos (\delta_1 - 42{,}5°) = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2$
6) $18{,}1 \operatorname{sen} (\delta_1 - 42{,}5°)\ I_1 \operatorname{sen} \delta_1 + I_2 \operatorname{sen} \delta_2$

sustituyendo los valores de las componentes activas de las corrientes que aparecen en las ecuaciones 2) y 4), en la ecuación 5) se obtiene:

$$18{,}1 \cos (\delta_1 - 42{,}5°) = \frac{220}{3} \operatorname{sen} \delta_1 + \frac{220}{4} \operatorname{sen} (\delta_1 - 20°)$$

y desarrollando las expresiones trigonométricas anteriores resulta:

$$112{,}78 \operatorname{sen} \delta_1 = 32{,}15 \cos \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \delta_1 = 0{,}285 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = 15{,}9°$$

lo que indica que las expresiones de las f.e.m.s. de los generadores son:

$$\mathbf{E}_1 = 220 \angle 15{,}9° \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = 220 \angle -4{,}1°$$

es decir, la f.e.m. del generador $\mathbf{E}_1$ se adelanta 15,9° respecto a la tensión de barras, lo que indica que trabaja como **generador**; mientras que la f.e.m. de la máquina $\mathbf{E}_2$ se retrasa 4,1° de la tensión, lo que representa, como sabemos, un trabajo como **motor síncrono**.

El desfase φ_T, de acuerdo con la expresión fasorial de la corriente total, corresponde a un valor:

$$\varphi_T = \delta_1 - 42{,}5° = -26{,}6°$$

es decir, la corriente de carga se **retrasa** 26,6° de la tensión en bornes. Se trata, por consiguiente, de una carga inductiva cuyo f.d.p. vale:

$$\cos\varphi_T = \cos 26{,}6° = 0{,}894 \text{ inductivo}$$

b) Para calcular ahora los valores de las corrientes, vamos a sustituir el valor de δ_1 encontrado en las ecuaciones 1 a 6, lo que da lugar al juego siguiente:

$$
\begin{array}{rl}
7) & 211{,}6 = V - 3I_1 \text{ sen } \varphi_1 \\
8) & 60{,}3 = 3I_1 \cos\varphi_1 \\
9) & 219{,}4 = V - 4I_2 \text{ sen } \varphi_2 \\
10) & -15{,}7 = 4I_2 \cos\varphi_2 \\
11) & 16{,}2 = I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2 \\
12) & -8{,}1 = I_1 \text{ sen } \varphi_1 + I_2 \text{ sen } \varphi_2
\end{array}
$$

Si se restan las ecuaciones 7) y 9) se obtiene:

$$13) \quad -7{,}8 = -3I_1 \text{ sen } \varphi_1 + 4I_2 \text{ sen } \varphi_2$$

ecuación que unida a la 12) permite obtener las componentes reactivas de las corrientes:

$$14) \quad I_1 \text{ sen } \varphi_1 = -3{,}5 \quad ; \quad I_2 \text{ sen } \varphi_2 = -4{,}6$$

Los valores anteriores, junto con las ecuaciones 8) y 10), permiten calcular las expresiones de I_1 e I_2:

$$\mathbf{I}_1 = 20{,}1 - j3{,}5 = 20{,}4 \angle -98° \quad ; \quad \mathbf{I}_2 = -3{,}93 - j4{,}6 = 6{,}05 \angle -130{,}5°$$

es decir, la máquina 1 entrega una corriente a la carga que vale 30,4 A y se retrasa 9,8° a la tensión, trabajando con un f.d.p. 0,985 inductivo. La máquina 2 **entrega a la carga** una corriente de 6,05 A retrasada 130,5° de la tensión. O de otro modo: la máquina 2 **absorbe** una corriente I_{2m} igual y opuesta a la expresada en 15), que representa la corriente que absorbe como motor. Esta corriente motora se adelanta 180° −130,5° = 49,5° a la tensión, por lo que considerada así trabaja con un f.d.p. capacitivo de valor 0,649.

c) Se puede calcular la tensión, sustituyendo el primer valor 14) en la ecuación 7), dando lugar a:

$$V = 211{,}6 - 10{,}5 = 201{,}1 \text{ voltios}$$

d) En resumen, los resultados obtenidos son:

$$\mathbf{V} = 201{,}1 \angle 0° \quad ; \quad \mathbf{E}_1 = 220 \angle 15{,}9° \quad ; \quad \mathbf{E}_2 = 220 \angle -4{,}1° \quad ; \quad \mathbf{I}_1 = 20{,}4 \angle -9{,}8°$$
$$\mathbf{I}_2 = 6{,}05 \angle -130{,}5° \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_{2m} = 6{,}05 \angle 49{,}5° \quad ; \quad \mathbf{I}_T = 18{,}1 \angle -26{,}6°$$

La potencia compleja **entregada** por la máquina 1 es:

$$\mathbf{S}_1 = 3\mathbf{V}\mathbf{I}_1^* = 3 \cdot 201{,}1 \cdot 20{,}4 \angle 9{,}8° = 12.128 + j2.095$$

que corresponde a unas potencias:

$$P_1 = 12.128 \text{ W} \quad ; \quad Q_1 = 2.095 \text{ VAR}$$

La potencia compleja **entregada** por la máquina 2 es:

$$\mathbf{S}_2 = 3\mathbf{V}\mathbf{I}_2^* = 3 \cdot 201{,}1 \cdot 6{,}05 \angle 130{,}5° = -2.370 + j2.775$$

que corresponde a unas potencias generadas:

$$P_2 = -2.370 \text{ W} \quad ; \quad Q_2 = +2.775 \text{ VAR}$$

o a unas potencias absorbidas como motor:

$$P_{2m} = +2.370 \text{ W} \quad ; \quad Q_2 = -2.775 \text{ VAR}$$

De este modo los dos generadores entregan en conjunto:

$$P_T = P_1 + P_2 = 9.758 \text{ W} \quad ; \quad Q_T = Q_1 + Q_2 = 4.870 \text{ VAR}$$

e) De un modo análogo al anterior resulta una potencia compleja absorbida por el receptor o carga:

$$\mathbf{S}_T = 3\,\mathbf{V}\mathbf{I}_T^* = 10.920 \angle\, 26{,}6° = 9.764 + j\,4.889$$

es decir:

$$P_T = 9.764 \text{ W} \quad ; \quad Q_T = 4.889 \text{ VAR}$$

que coincide (salvo error de redondeo) con la suma de las potencias entregadas por los generadores. Físicamente lo que sucede es que el alternador 1 alimenta a la carga y también al alternador 2, que trabaja como motor.

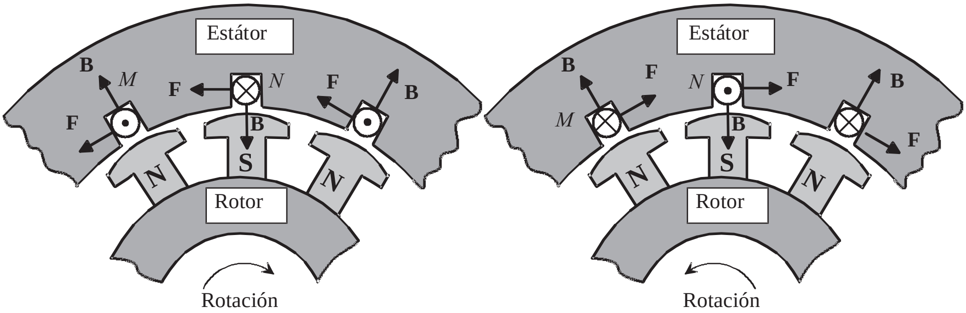
5.14. MOTOR SÍNCRONO. CARACTERÍSTICAS Y APLICACIONES

En el epígrafe 5.12 se ha indicado cómo puede la máquina síncrona pasar del funcionamiento como generador al trabajo como motor desconectando el motor primario de arranque, ejerciendo entonces un par útil en el eje transformando la energía eléctrica absorbida de la red en energía mecánica de rotación. La velocidad de giro del motor viene expresada por la relación:

$$n = \frac{60\, f}{p} \tag{5.86}$$

que es la de sincronismo de la red.

El motor síncrono presenta el grave inconveniente de que el par conserva un sentido único solamente cuando la máquina se halla ya sincronizada, es decir, cuando el rotor gira a la misma velocidad que el campo del inducido. Si el rotor está en reposo o gira a otra velocidad diferente a la de sincronismo, el par medio que desarrolla al conectarlo a la red es nulo. En efecto, consideremos el esquema de la Figura 5.56, donde se muestran dos conductores del inducido enfrentando a dos polos consecutivos del rotor. En el instante indicado en *a*) la corriente en el conductor M es saliente al plano de la página y en el N es entrante, de tal forma que se ejerce una fuerza sobre los conductores del inducido en el sentido contrario a las agujas del reloj que obliga a girar a los polos (rotor) en sentido opuesto. Si la frecuencia de las corrientes que recorren el estátor es de 50 Hz, al cabo de 1/100 segundos se invierte el sentido de las mismas (Fig. 5.56*b*), resultando un par en el rotor de sentido contrario al anterior. En consecuencia, el rotor se ve sometido a un par alternativo que impide el arranque de la máquina en reposo. Para obtener un par útil en el árbol de la máquina, es preciso que el rotor avance un semipaso polar en el tiempo correspondiente al semiperíodo de la corriente de inducido. De esta forma, aunque cambia el sentido de la corriente, también cambia la polaridad del polo enfrentado a los conductores, lo que trae consigo el que no se modifique el sentido del par producido. Debido a la inercia del rotor no es posible, partiendo del reposo, obtener este



a) Fuerza en los conductores *b*) Fuerza en los conductores medio ciclo después

Figura 5.56. Principio de funcionamiento del motor síncrono.

avance de los polos en tan breve espacio de tiempo (1/100 segundo para $f = 50$ Hz), por lo que se hace necesario utilizar dispositivos especiales de arranque para la puesta en marcha de estos motores.

En los motores síncronos que pueden arrancar en vacío, la puesta en marcha se realiza por medio de un motor auxiliar (**motor pony**), generalmente asíncrono con igual número de polos que el motor principal, de tal forma que se consigue una velocidad de rotación casi síncrona y la conexión a la red se realiza empleando equipos de sincronización al igual que se hacía en el acoplamiento de un alternador a la red. También se pueden emplear para este fin motores de c.c., debido a su ventaja de regulación de velocidad, o motores asíncronos con un par de polos menos que el motor síncrono, y en este caso la conexión a la red se efectúa una vez que se ha desconectado el motor auxiliar y el grupo pasa suavemente por la velocidad de sincronismo.

Otro procedimiento más práctico para la puesta en marcha de estos motores consiste en su arranque como asíncronos. Para este fin es necesario colocar un arrollamiento en jaula de ardilla sobre los polos de la máquina, como muestra la Figura 5.57. Para efectuar el arranque asíncrono el devanado de la excitación debe estar cerrado sobre una resistencia óhmica cuya magnitud sea 10-15 veces superior a la propia. Sería peligroso dejar el arrollamiento inductor abierto, debido a que el campo giratorio podría inducir en él una f.e.m. muy elevada, lo que podría provocar la rotura del aislamiento. También sería un inconveniente cerrar el devanado en cortocircuito, puesto que se crearía una elevada corriente monofásica que frenaría el rotor. El arranque asíncrono se realiza aplicando algunos de los procedimientos explicados en el Capítulo 4. Generalmente, debido a que estos motores suelen ser de gran potencia, se aplican las conexiones estrella-triángulo o utilizando un autotransformador. Una vez efectuada la puesta en marcha como asíncrono, cuando se obtiene la velocidad de régimen cercana a la de sincronismo, se conecta la c.c. al devanado de excitación y entonces se producen unas oscilaciones de velocidad respecto a la síncrona y al cabo de unos períodos se llega a la velocidad asignada. Este proceso constituye la llamada **autosincronización** del motor.

Finalizada la operación del arranque del motor síncrono, se podrá ya regular su corriente excitación para que la máquina trabaje en régimen de subexcitación o sobreexcitación con el fin de regular su f.d.p.; de esta forma esta máquina puede cumplir la doble misión de arrastrar una carga mecánica y compensar la corriente reactiva de la red.

Generalmente, la jaula de ardilla colocada en estos motores y que aquí se utiliza para producir un arranque asíncrono, se coloca también en los generadores y recibe el nombre de devanado **amortiguador**, ya que reduce las oscilaciones que se producen en los procesos

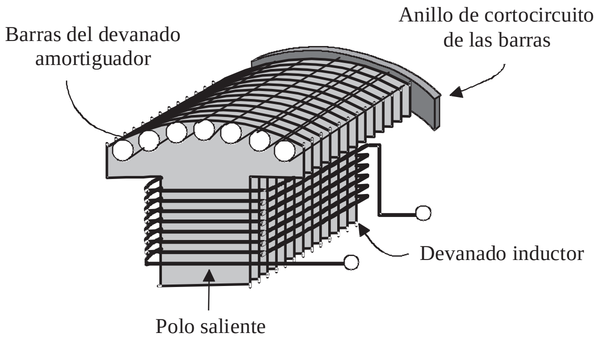


Figura 5.57. Devanado amortiguador colocado en los polos (jaula de ardilla).

transitorios de las máquinas síncronas: acoplamiento a la red, variaciones bruscas de carga eléctrica o mecánica, etc. El efecto de estos devanados amortiguadores en régimen permanente es nulo, ya que al girar la máquina a la velocidad de sincronismo no se inducen corrientes en los mismos.

El motor síncrono puede utilizarse para mover cargas mecánicas, y al igual que el motor asíncrono o de inducción, su empleo es muy interesante desde el punto de vista de coste y rendimiento en aquellas aplicaciones que necesitan velocidades bajas, inferiores a 500 r.p.m., para cargas con conexión directa (sin engranajes de reducción), como en molinos de cemento, papel, mezcladoras y en la propulsión eléctrica de buques. Se fabrican para unos valores asignados del f.d.p. de 0,8 en adelanto y unidad. En su versión de potencias inferiores a 1 CV no utilizan c.c. para la excitación y su funcionamiento se basa en la variación de reluctancia del rotor (**motores de reluctancia**), empleando para este fin una jaula de ardilla de un motor asíncrono convencional, a la que se han eliminado algunos dientes. También se emplean motores síncronos de **histéresis** en los que el rotor es cilíndrico y utiliza un anillo de un material magnético permanente. Estos motores síncronos fraccionarios se emplean para impulsar relojes eléctricos y otros aparatos medidores de tiempo.

Para grandes potencias, una de las mayores ventajas de este motor frente al asíncrono es la posibilidad de regular el f.d.p. En la Figura 5.58*a* se muestra una instalación con una carga activa P_1 con f.d.p. ($\cos \varphi_1$) inductivo a la que se ha conectado un motor síncrono que va a absorber una potencia activa P_2. Si se desea que el f.d.p. de la instalación sea $\cos \varphi_T$, habrá que desarrollar una potencia reactiva capacitiva (Fig. 5.58*b*) en el motor (actuando sobre la excitación), de tal forma que se debe cumplir:

$$Q_2 = |BC| = |AC| - |AB| = P_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - (P_1 + P_2) \operatorname{tg} \varphi_T \tag{5.87}$$

En consecuencia, la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. capacitivo con el que trabaja será:

$$S_M = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} \quad ; \quad \cos \varphi_2 = \frac{P_2}{S_M} \tag{5.88}$$

Si el motor síncrono no desarrolla ninguna potencia mecánica y se supone que no existen pérdidas en la máquina, se tendrá $P_2 = 0$ y la expresión (5.87) se transforma en la potencia reactiva que tendría que entregar a la red trabajando como compensador síncrono. Este tipo de régimen es el empleado para regular el f.d.p. y la tensión en las grandes líneas de transporte de energía eléctrica.

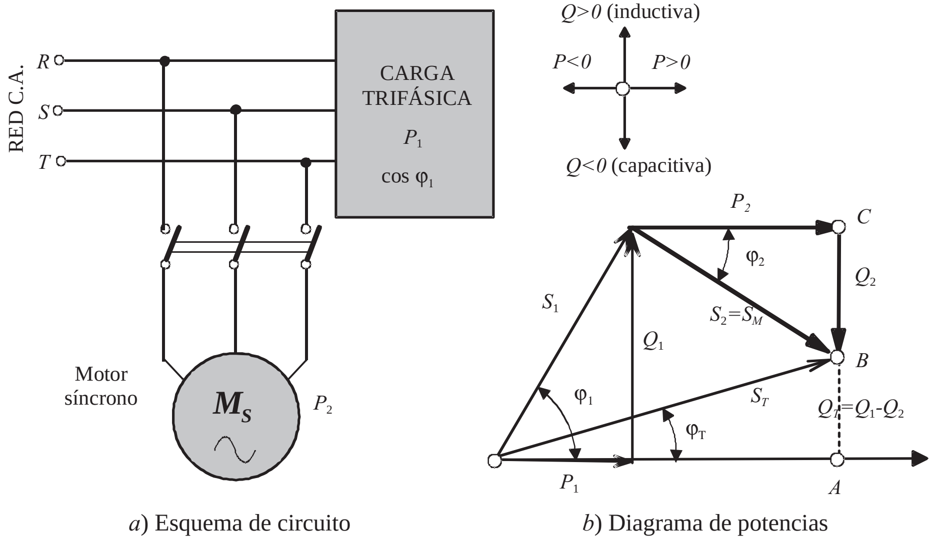


Figura 5.58. Motor síncrono trabajando como condensador.

Ejemplo de aplicación 5.12

Un motor síncrono sobreexcitado para absorber 600 kVA mueve una carga mecánica de 260 kW con rendimiento de 0,87. El motor está conectado en paralelo con una carga de 1.000 kVA, con f.d.p. 0,707 inductivo. Calcular el f.d.p. resultante.

Solución

El diagrama fasorial del sistema es el indicado en la Figura 5.59. De este esquema se deducen las siguientes relaciones:

$$[OA] = 1.000 \cdot \cos \varphi_1 = 1.000 \cdot 0{,}707 = 707 \text{ kW} \quad ; \quad [AB] = \frac{260}{0{,}87} = 300 \text{ kW}$$

$$[CD] = \sqrt{600^2 - 300^2} = 519{,}6 \text{ kVAR} \quad ; \quad [BD] = [AE] = 1.000 \text{ sen } \varphi_1 = 707 \text{ kVAR}$$

$$[BC] = [BD] - [CD] = 707 - 519{,}6 = 187{,}4 \text{ kVAR}$$

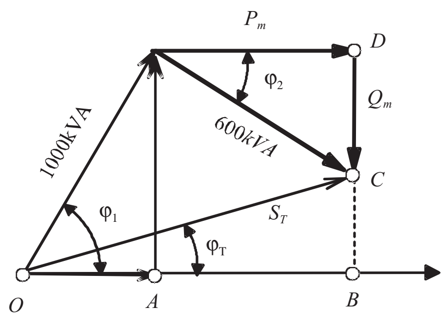


Figura 5.59.

en consecuencia, el f.d.p. resultante será:

$$\cos \varphi_T = \frac{[OB]}{[OC]} = \frac{707 + 300}{\sqrt{(707 + 300)^2 + (187{,}4)^2}} = 0{,}983$$

* 5.15. DIAGRAMA DE LÍMITES DE FUNCIONAMIENTO DE UNA MÁQUINA SÍNCRONA

El diagrama de límites de funcionamiento de una máquina síncrona es un gráfico que representa los valores máximos de potencia activa y reactiva que puede suministrar la máquina funcionando como generador (es menos frecuente pero también se construyen estos diagramas para motores síncronos), en función de los límites de calentamiento, tanto del devanado del estátor como del rotor y de la limitación de potencia de la máquina motriz (turbina), en el supuesto de considerar un funcionamiento a la tensión asignada.

La construcción de este gráfico se basa en el diagrama fasorial de la máquina síncrona. En la Figura 5.60 se muestra este diagrama para un alternador funcionando con tensión asignada y factor de potencia inductivo. En el dibujo se observa que el lugar geométrico de los puntos para los cuales la f.e.m. E_0 es constante corresponde a circunferencias con centro en C. En la Figura 5.60 se muestra el arco de una de ellas. Ahora bien, la f.e.m. E_0 es proporcional a la **corriente de excitación** de la máquina, por consiguiente estas circunferencias representan también el lugar geométrico de los puntos del diagrama para los cuales I_e = constante. Si la corriente de excitación se reduce a la mitad del valor que corresponde a la situación dibujada en la Figura 5.60, el lugar geométrico será entonces una circunferencia con centro en C y radio mitad. De este modo, si se trazan circunferencias con diferentes radios, se obtendrán lugares geométricos para diferentes corrientes de excitación.

El lugar geométrico de X_sI = constante, que en definitiva corresponde al de corriente de inducido I = constante, corresponderá a circunferencias con centro en O y radio el valor de la corriente de inducido de que se trate. Como quiera además que la tensión de la red es constante, la potencia aparente es proporcional a la corriente de inducido y por consiguiente las circunferencias anteriores representan también los lugares geométricos de los puntos de funcionamiento de la máquina para los cuales la potencia aparente es constante.

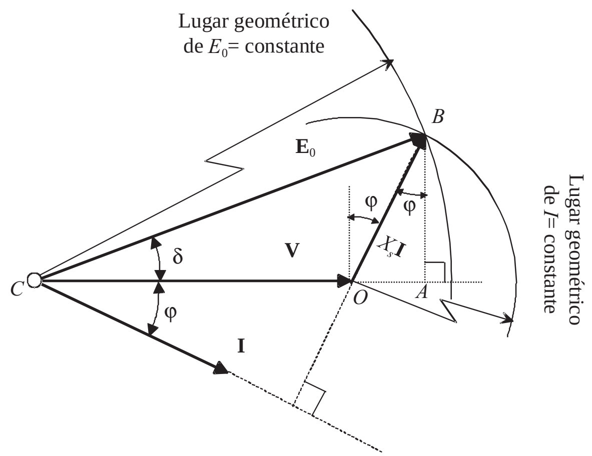


Figura 5.60. Lugares geométricos de E_0 e I en un alternador.

En definitiva, el esquema de la Figura 5.60 puede emplearse para representar potencias no solamente aparentes sino también activas y reactivas, como se va a demostrar a continuación. Obsérvese que en esta figura se cumplen las siguientes relaciones:

$$[OB] = X_s I \quad ; \quad [AB] = X_s I \cos \varphi \quad ; \quad [OA] = X_s I \operatorname{sen} \varphi \tag{5.89}$$

Como quiera que las potencias activa, reactiva y aparente suministradas por la máquina síncrona son:

$$P = 3VI \cos \varphi \quad ; \quad Q = 3VI \operatorname{sen} \varphi \quad ; \quad S = 3VI \tag{5.90}$$

el triángulo OAB se podrá recalibrar como un triángulo de potencias, a base de multiplicar cada lado por el factor de conversión $3V/X_s$, que es un parámetro constante. Téngase en cuenta para justificar lo anterior que las expresiones (5.90) admiten la siguiente representación:

$$P = 3VI \cos \varphi = \frac{3V}{X_s}(X_s I \cos \varphi) = \frac{3V}{X_s}[AB] \tag{5.91}$$

$$Q = 3VI \operatorname{sen} \varphi = \frac{3V}{X_s}(X_s I \operatorname{sen} \varphi) = \frac{3V}{X_s}[OA] \tag{5.92}$$

$$S = 3VI = \frac{3V}{X_s}(X_s I) = \frac{3V}{X_s}[OB] \tag{5.93}$$

En la Figura 5.61 se ha vuelto a dibujar el diagrama de la Figura 5.60, pero en el que cada lado de la figura se ha multiplicado por el factor de conversión citado. Se ha rayado el triángulo que representa las potencias. El eje de ordenadas define las potencias activas, mientras que el eje de abscisas determina las potencias reactivas. El centro de referencia es el punto O. Para el punto B se tiene una potencia activa positiva P y una potencia reactiva positiva Q; la excitación correspondiente, según se ha señalado antes, será proporcional a la distancia MB. Para el punto de trabajo C se tiene una potencia activa positiva P_c, una potencia reactiva negativa Q_c y una potencia aparente definida por la distancia OC. La corriente de excitación será proporcional a la distancia MC.

En la práctica de la ingeniería de los sistemas eléctricos de potencia se prefiere utilizar diagramas en valores por unidad donde las magnitudes están referidas a unos valores base. Para las potencias se toma como base la potencia aparente asignada del generador y para las tensiones se elige como base la tensión asignada de la máquina (véase Apéndice 3). En el caso de las corrientes de excitación, se toma como base de referencia la corriente inductora necesaria para producir la tensión asignada en vacío. Las corrientes de inducido utilizan como base, la corriente asignada de la máquina, mientras que para las

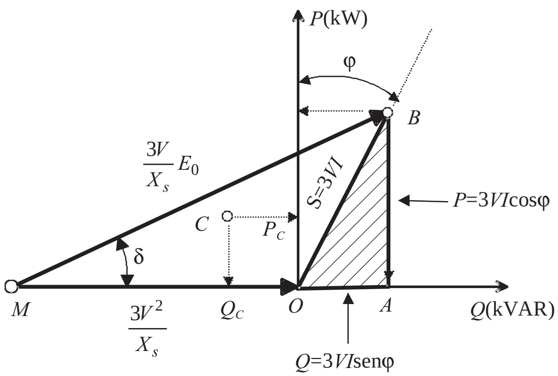


Figura 5.61. Diagrama de potencias de un alternador.

impedancias se utiliza un valor base, definido en (5.20) como cociente entre la tensión asignada y la corriente asignada. De acuerdo con estas premisas se ha construido en la Figura 5.62 el denominado **ábaco de operación** de un generador síncrono, en el que se muestran los límites de funcionamiento. El proceso a seguir es el siguiente:

1. Se elige el centro *O*, y se dibujan los ejes de coordenadas *X* e *Y* correspondientes, respectivamente, a potencia reactiva y activa (en valores por unidad, p.u.). Con la escala que se desee, se trazan círculos con centro en *O*. En el caso de la Figura 5.62 se han dibujado cinco semicircunferencias para valores 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 y 1 p.u. de la potencia aparente asignada de la máquina.
2. Se localiza el punto *M* del diagrama. Esto requiere un poco de atención. Para este punto se tiene una potencia reactiva que según muestra la Figura 5.61 vale:

$$Q_M = \frac{3V^2}{X_s} = \frac{3V_n^2}{X_s} \tag{5.94}$$

ya que la tensión de funcionamiento es la asignada. La expresión anterior se puede escribir también así:

$$Q_M = 3\,V_n \frac{V_n}{X_s} \tag{5.95}$$

que en valor por unidad respecto a la potencia asignada del generador es:

$$Q_M\,(\text{p.u.}) = \frac{Q_M}{S_N} = \frac{3\,V_n \dfrac{V_n}{X_s}}{3\,V_n I_n} = \frac{V_n/I_n}{X_s} = \frac{Z_b}{X_s} \tag{5.96}$$

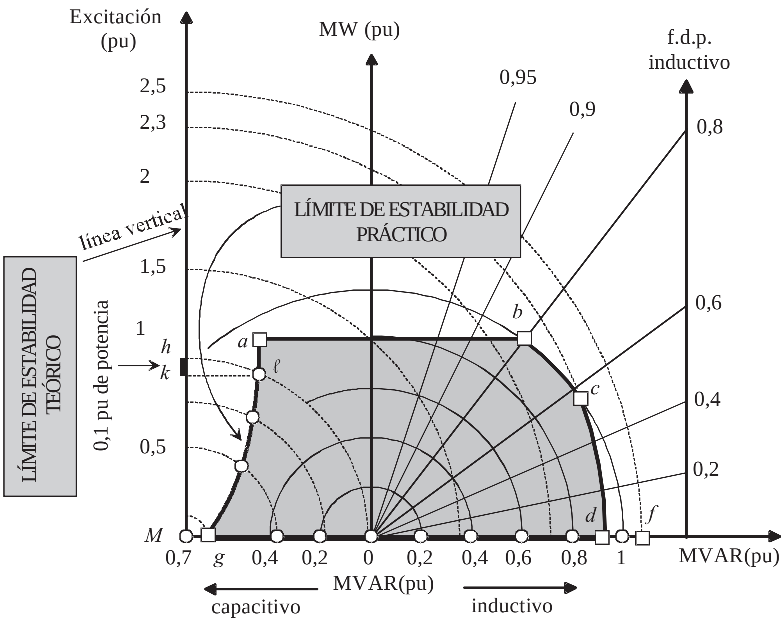


Figura 5.62. Ábaco de operación de un alternador. Límites de funcionamiento.

donde Z_b representa, según (5.20), la impedancia base de la máquina. Esta expresión se puede poner también:

$$Q_M \text{ (p.u.)} = \frac{1}{\dfrac{X_s}{Z_b}} = \frac{1}{X_s \text{ (p.u.)}} \tag{5.97}$$

ya que según (5.21) el cociente X_s/Z_b representa la reactancia síncrona en valores p.u. Si se considera, por ejemplo, una reactancia síncrona de valor $X_s/Z_b = 1{,}43$ p.u., el punto M se localizará para una magnitud de potencia reactiva p.u. según (5.97):

$$Q_M \text{ (p.u.)} = \frac{1}{1{,}43} = 0{,}7 \text{ p.u.} \tag{5.98}$$

3. Con centro en M se trazan circunferencias correspondientes a corrientes de excitación constante. La corriente de excitación base (de referencia) corresponde al segmento MO, que representa la corriente necesaria en el inductor para que se genere en vacío la tensión asignada. Por este motivo esta distancia representa un valor 1 p.u. Con esta escala se han trazado en la Figura 5.62 cinco cuadrantes de circunferencia correspondientes a los siguientes valores de la excitación: 0,5 - 1 - 1,5 - 2 - 2,5 p.u.
4. Con centro en O se trazan líneas radiales que representan los valores del f.d.p. de la máquina y que según la Figura 5.62 corresponden a los ángulos que estas líneas radiales forman con la vertical (eje de potencias activas). En el caso de la Figura 5.62 se han trazado las líneas correspondientes a los f.d.p.: 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 0,9; 0,95.

   A continuación se deben dibujar en el ábaco las líneas y curvas que representan los límites de funcionamiento de la máquina en régimen permanente, que vienen impuestas por:

   a) *Potencia asignada de la máquina motriz.*
   b) *Potencia aparente del alternador, que limita la corriente de circulación por el inducido, para que en este devanado no se superen las temperaturas admisibles.*
   c) *Corriente máxima de excitación del generador, que está limitada por el calentamiento del devanado del rotor.*
   d) *Angulo de carga δ máximo permitido para que se cumplan las condiciones de estabilidad de la máquina.*

De este modo el proceso a seguir sería:

a) Se traza una línea horizontal con la potencia de la turbina. Realmente este valor corresponde a la máxima potencia activa que puede suministrar el generador. Atendiendo a esto los constructores definen, además de la potencia aparente asignada del generador (MVA), el f.d.p. asignado; el producto de ambos factores determina la potencia activa máxima, que a lo sumo debe coincidir con la de la turbina o motor de accionamiento. Si se considera el valor clásico de f.d.p. 0,8 inductivo, la potencia activa máxima será de 0,8 p.u. y es ésta la recta horizontal *ab* que se ha trazado en la Figura 5.62.

b) La limitación de la potencia aparente del generador (o lo que es equivalente, de corriente en el inducido) viene definida por el arco *bc* correspondiente a la circunferencia de potencia aparente 1 p.u. (centro en O).

c) La limitación de la corriente de excitación viene expresada por el arco *cd* (centro de la circunferencia en el punto M). Para dibujar este arco se ha supuesto un valor máximo de la corriente de excitación de 2,3 p.u. (véase este valor en el eje vertical), que corresponde en cierto modo a una f.e.m. 2,3 p.u. (es decir, 2,3 veces la tensión asignada). Hay que hacer notar que los arcos correspondientes a la limitación de la corriente en el inducido, *bc*, y a la limitación de corriente en el inductor, *cd*, se cortan en *c*. Desde este punto hacia el eje de abscisas es más fuerte la limitación que impone la corriente de excitación que la corriente del estátor (en la zona *cd*, el arco *bf* correspondiente a la limitación de corriente por el inducido es exterior al *cd* que impone el inductor).

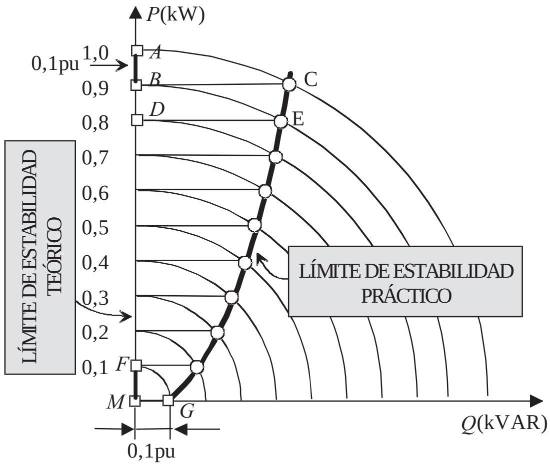


Figura 5.63. Detalle del proceso de construcción del límite de estabilidad práctico.

d) El límite de estabilidad en régimen permanente se obtiene, según se explicó en el epígrafe 5.11, para un ángulo de carga $\delta = 90°$, que corresponde a una recta perpendicular a *MO* trazada por el punto *M*. En la práctica se suele reducir esta zona a un valor de δ menor, para poder hacer frente a posibles variaciones de carga y a inestabilidades de tipo transitorio. Algunos autores simplifican el tema y consideran un valor máximo de δ del orden de 60°. Sin embargo, en la práctica de la ingeniería se recurre a restar un 10 por 100 de la potencia asignada de la máquina (MVA) en cada círculo de excitación, proyectando el punto resultante hasta la circunferencia. Si se considera la circunferencia de excitación 1 p.u., se tiene el punto *h*, que constituye el límite de estabilidad teórico; entonces se resta a la **potencia** correspondiente a este punto (ordenada *Mh*) un 0,1 p.u. de la potencia aparente asignada (segmento *hk*) y esto da lugar al segmento *Mk*; el punto límite de funcionamiento se obtiene proyectando el punto *k* a la circunferencia, dando lugar al punto *l*, que define uno de los puntos de la curva que constituye el límite de estabilidad práctico. Se pueden obtener más puntos repitiendo el proceso con otras circunferencias de excitación.

Para que quede más clara esta construcción, en la Figura 5.63 se ha vuelto a dibujar el tramo *ag* a mayor escala. El origen es el punto *M*, y en ordenadas tenemos potencias activas. Se han trazado semicircunferencias con centro en *M* (origen de excitación). La distancia *MA* representa la potencia **aparente** asignada del alternador (1 p.u.). Se toma un 10 por 100 de *MA*, es decir, 0,1 p.u., y se obtiene el punto *B*, que se proyecta hacia la circunferencia de radio 1 p.u., dando lugar al punto *C*. El proceso se repite para el punto *B*, que al restar 0,1 p.u. nos da el punto *D*, que proyectado da lugar al *E*. Téngase en cuenta que **la magnitud a restar es siempre la misma**: **0,1 p.u. de la potencia aparente asignada**. Es por esto que al llegar a la semicircunferencia de radio *MF* correspondiente a una potencia 0,1 p.u. y restar la misma cantidad se obtiene el punto *M*, que proyectado en la circunferencia da lugar a *G*. Es decir, el límite de estabilidad práctico no llega a *M* sino que se queda a una distancia 0,1 p.u. de él.

Ejemplo de aplicación 5.13

Un turbogenerador de 10 MVA, 2.400 V, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una reactancia síncrona de 0,7 Ω. La corriente máxima del rotor corresponde a un valor para el cual la máquina produciría en vacío una tensión 2,1 veces la asignada (se considera el circuito magnético lineal). La turbina que mueve el generador es de 7,5 MW y el ángulo de carga máximo para funcionamiento estable se supone igual a 60°: a) Dibujar el diagrama que muestra los límites de funcionamiento de la máquina;

b) ¿puede el generador entregar una corriente de línea de 2.300 A con f.d.p. 0,32 inductivo?; c) si el generador entrega una potencia activa de 7 MW, ¿cúal es la potencia reactiva máxima que puede entregar simultáneamente con f.d.p. inductivo?

Solución

a) La corriente asignada del generador es:

$$I_m = \frac{10 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 2.400} \approx 2.406 \text{ A} \quad ; \quad V_n = \frac{2.400}{\sqrt{3}} = 1.386 \text{ V}$$

De acuerdo con los valores anteriores la impedancia base valdrá:

$$Z_b = \frac{1.386}{2.406} = 0{,}576 \ \Omega$$

por lo que la reactancia síncrona p.u. tendrá una magnitud:

$$X_s \text{ (p.u.)} = \frac{0{,}7}{0{,}576} = 1{,}22 \text{ p.u.}$$

El gráfico que muestra los límites de funcionamiento de la máquina es el mostrado en la Figura 5.64.

El punto *M* corresponde a una potencia reactiva p.u.:

$$Q_M = \frac{1}{X_s \text{ (p.u.)}} = \frac{1}{1{,}22} = 0{,}82 \text{ p.u.}$$

La distancia *MO* corresponde a una tensión de vacío 1 p.u. En el dibujo se han trazado dos cuadrantes de circunferencia que representan los valores de excitación 1 p.u. y 2,1 p.u., respectivamente, y esta última circunferencia representa la limitación de la corriente en el rotor.

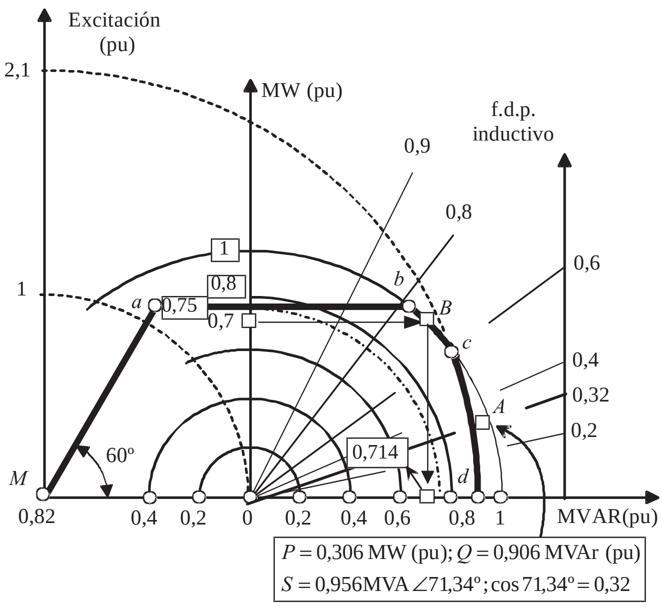


Figura 5.64.

La potencia de la turbina es de 7,5 MW, que corresponde a un valor p.u.:

$$P\ (\text{p.u.}) = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75$$

De acuerdo con estos valores se han trazado las líneas límites de la Figura 5.64. El tramo *ab* corresponde a la limitación de la turbina; *bc* corresponde a la limitación de potencia aparente o corriente de excitación, que según se muestra en la figura corresponde a un valor de 2,1 p.u. En la parte izquierda se ha trazado la recta *Ma* con un $\delta = 60°$, que limita la estabilidad.

b) En estas condiciones el generador entrega unas potencias activa y reactiva:

$$P = \sqrt{3} \cdot 2.400 \cdot 2.300 \cdot 0{,}32 = 3{,}06\ \text{MW} = 0{,}306\ \text{p.u.}$$
$$Q = P\ \text{tg}\ \varphi = 3{,}06 \cdot 2{,}96 = 9{,}06\ \text{MVAR} = 0{,}906\ \text{p.u.}$$

que corresponde al punto *A* del diagrama de la Figura 5.64. Se observa que este punto está dentro de la curva de potencia aparente máxima pero está fuera de la curva de corriente de excitación máxima; por tanto, el generador no puede funcionar en estas condiciones, ya que provocaría el calentamiento del rotor. Se puede comprobar lo anterior de un modo analítico, ya que la f.e.m. necesaria en estas condiciones sería:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{V} + jX_s\mathbf{I} = 1.386 \angle 0° + j\,0{,}7 \cdot 2.300 \angle -71{,}3° = 2.956{,}6 \angle 10°$$

que corresponde a un valor por unidad:

$$E_0\ (\text{p.u.}) = \frac{2.956{,}6}{1.386} = 2{,}13\ \text{p.u.}$$

que es superior a la circunferencia de corriente de excitación máxima (2,1 p.u.).

c) Si el generador entrega una potencia activa de 7 MW, es decir, 0,7 p.u., la máxima potencia reactiva que puede suministrar es de 7,14 MVAR (punto *B* en el diagrama de la Figura 5.64). Este punto se encuentra entrando con una potencia activa 0,7 p.u. en el diagrama y trazando una horizontal (potencia activa constante) hasta encontrar el límite del recinto (0,714 p.u.).

* 5.16. TRANSITORIO DE CORTOCIRCUITO DE UNA MÁQUINA SÍNCRONA

La condición transitoria más grave que le puede ocurrir a un generador síncrono es el cortocircuito trifásico. En el estudio de sistemas eléctricos de potencia se dice entonces que se ha producido una **falta o fallo de cortocircuito**. El análisis riguroso del cortocircuito es difícil y se sale de los límites de este texto. Nuestro interés reside en comprender de un modo cualitativo los fenómenos físicos que se producen y que dan lugar a la definición de unas reactancias síncronas nuevas que tienen importancia en el comportamiento transitorio de estas máquinas. Para facilitar el estudio se va a considerar que se parte de un generador trabajando en vacío y que en un momento determinado se produce un cortocircuito trifásico entre los tres terminales del inducido. En la Figura 5.65 se presenta un oscilograma que muestra la naturaleza general de la variación de la corriente en una de las tres fases en el momento del cortocircuito (en las otras dos fases, las formas de onda diferirán de la que aquí se muestra, a causa del hecho de que en cualquier instante de tiempo la suma de las corrientes de las tres fases debe ser igual a cero).

Se observa en este oscilograma que los valores de pico de la corriente definen las envolventes representadas por las curvas *ab* y *ef*. Por tanto, la curva *cd*, equidistante entre los envolventes, representa una corriente unidireccional, es decir, de c.c., que cae lentamente, sobre la que se superpone otra de c.a. que también se amortigua con el tiempo, indicada por la forma de onda de la Figura 5.66. Esta última curva se construye situando las amplitudes de la componente de c.a. de la Figura 5.66 por encima y por debajo del eje $c'd'$ (que ocupa el lugar de la curva *cd* en la Figura 5.65). Las envolventes de la

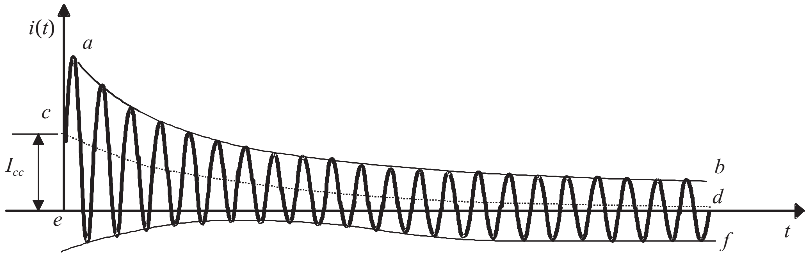


Figura 5.65. Oscilograma de la corriente de cortocircuito en una fase.

nueva curva, una de ellas marcada por $a'b'$, serán simétricas alrededor del eje de tiempo. Se denomina a esta señal **componente simétrica de la c.a. de cortocircuito**.

La aparición de estas componentes de c.c. se basa en el concepto de **flujo atrapado**, un concepto relacionado con la ley de Lenz. Esta ley establece que un cambio en el flujo induce f.e.m.s. que provocan a su vez corrientes en los circuitos afectados que tienden a oponerse a los cambios del flujo. Por ello, cuando se produce un cortocircuito en un alternador, fluirán corrientes en las tres fases del inducido, en el devanado de excitación y en los devanados amortiguadores (véase Fig. 5.57) que intentarán mantener el flujo en el mismo valor que tenía en el instante previo a la falta. En otras palabras, el flujo es atrapado por la máquina. Cuando se produce el cortocircuito, la componente alterna de la corriente salta a un valor muy alto, pero la corriente **total** no puede cambiar en ese instante (para mantener el flujo constante), de ahí que aparezca una c.c. suficientemente grande para que la suma de las componentes de c.a. y de c.c. instantáneamente después de la falta sea igual a la corriente alterna que circulaba antes de la falta (que si se parte del generador en vacío tenía un valor previo nulo). Las componentes de c.c. se extinguen rápidamente pero inicialmente pueden llegar a alcanzar el 50 o 60 por 100 de los valores de la c.a. un instante después de la falta. De este modo la corriente inicial total puede llegar a valer de 1,5 a 1,6 veces la magnitud de la c.a. sola.

Si se analiza ahora la componente simétrica de la corriente alterna (Fig. 5.66), se observa que puede dividirse en tres períodos: durante algo así como el primer ciclo después de la falta, la componente de la c.a. es muy grande y decae rápidamente. Corresponde al denominado **período subtransitorio.** Concluido este período, la corriente sigue disminuyendo más lentamente hasta alcanzar un régimen permanente final; corresponde al **período transitorio**. Finalmente, el tiempo que transcurre desde cuando la corriente alcanza el régimen permanente se conoce como **período de estado estacionario**.

En el período subtransitorio, la corriente de cortocircuito está limitada en el estátor únicamente por la reactancia de dispersión. Al no poder cambiar el flujo instantáneamente, para contrarrestar el efecto

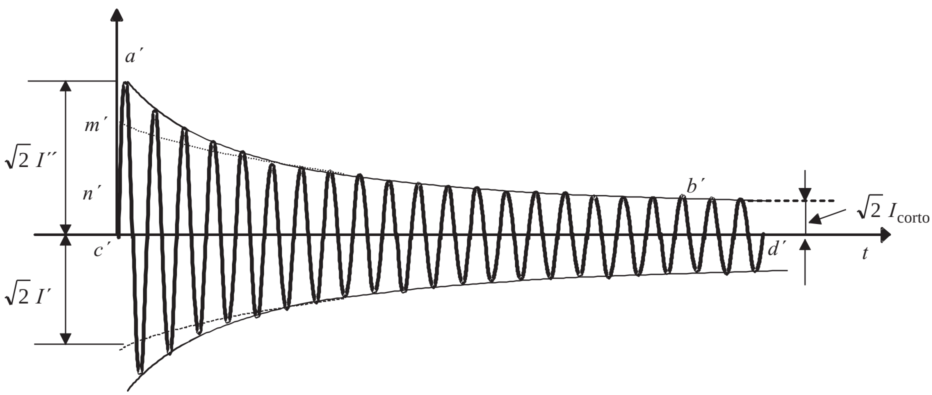


Figura 5.66. Componente simétrica de la corriente de cortocircuito.

desmagnetizante de la corriente en el inducido aparecerán corrientes en el devanado de excitación y en los devanados amortiguadores, que tenderán a conservar el flujo atrapado. Estos devanados actúan en este momento como si fueran secundarios de un transformador en el que el primario es el estátor. Si se denominan las reactancias de estos bobinados X_e (excitación o inductor), X_a (amortiguador) y es X_p la reactancia de reacción de inducido, el circuito eléctrico equivalente en este período (supuesta una relación de transformación unidad) es el que se muestra en la Figura 5.67*a*. Las tres reactancias X_e, X_a y X_p se asocian en paralelo y están conectadas en serie con la reactancia de dispersión X_σ. La reactancia equivalente de este circuito se denomina **reactancia subtransitoria** y su valor será:

$$X_s'' = X_\sigma + \frac{1}{\dfrac{1}{X_a} + \dfrac{1}{X_e} + \dfrac{1}{X_p}} \tag{5.99}$$

de este modo, el valor eficaz de la corriente en el período, de acuerdo con la Figura, 5.67*a* será:

$$I'' = \frac{E_0}{X_s''} \tag{5.100}$$

y este valor corresponde en la Figura 5.66 al cociente $c'a'/\sqrt{2}$.

El efecto del devanado amortiguador desaparece después de los primeros ciclos a causa de que la resistencia de este bobinado es relativamente mayor que la del devanado de excitación, por ello en el período transitorio siguiente se puede considerar un circuito equivalente de la máquina tal como el mostrado en la Figura 5.67*b*. La reactancia de esta red se denomina **reactancia transitoria** X_s' y su valor será:

$$X_s' = X_\sigma + \frac{X_e X_p}{X_e + X_p} \tag{5.101}$$

por tanto, el valor eficaz de la corriente en el inducido en el período transitorio será:

$$I' = \frac{E_0}{X_s'} \tag{5.102}$$

que corresponde al cociente $c'm'/\sqrt{2}$ en la Figura 5.66.

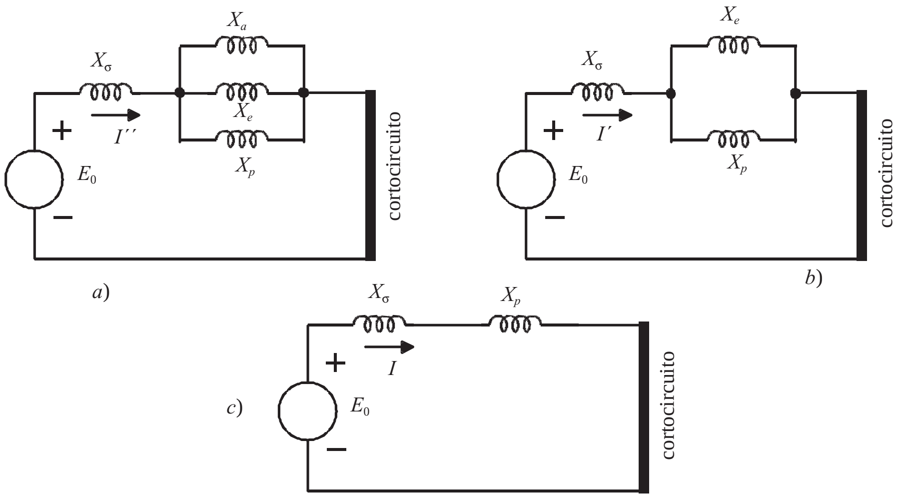


Figura 5.67. Circuitos equivalentes para los diversos períodos de tiempo.

Después del período transitorio desaparece el efecto de la corriente de excitación, dando lugar al circuito equivalente de la Figura 5.67*c*, en el que se tiene la reactancia síncrona normal X_s:

$$X_s = X_\sigma + X_p \tag{5.103}$$

correspondiendo a una corriente de cortocircuito de régimen permanente:

$$I_{corto} = \frac{E_0}{X_s} \tag{5.104}$$

y que corresponde al cociente $c'n'/\sqrt{2}$ en la Figura 5.66.

En resumen, el valor eficaz de la c.a. de cortocircuito varía continuamente en función del tiempo. Si I'' es el valor subtransitorio, I' el transitorio e I_{corto} el permanente, entonces el valor eficaz de la corriente de cortocircuito se puede expresar así:

$$I_{corto}\,(t) = (I'' - I')\, e^{-t/T''} + (I - I_{corto})\, e^{-t/T'} + I_{corto} \tag{5.105}$$

T'' y T' tienen dimensiones de tiempo y representan, respectivamente, las constantes de tiempo subtransitoria y transitoria. Los valores aproximados son $T'' = 0{,}03$ segundos y $T' = 1$ segundo. Los valores p.u. de las reactancias para un turbogenerador son del orden de:

$$X_s = 1 \text{ a } 2 \quad ; \quad X_s' = 0{,}22 \text{ a } 0{,}35 \quad ; \quad X_s'' = 0{,}1 \text{ a } 0{,}25$$

Mientras que para un alternador hidráulico (polos salientes) son:

$$X_s = 0{,}5 \text{ a } 1{,}5 \quad ; \quad X_s' = 0{,}2 \text{ a } 0{,}5 \quad ; \quad X_s'' = 0{,}13 \text{ a } 0{,}35$$

Ejemplo de aplicación 5.14

Un alternador trifásico de 50 MVA, 13,2 kV, 50 Hz, está funcionando en vacío a la tensión asignada, cuando se produce un cortocircuito trifásico en sus terminales. Las reactancias por unidad referidas a los valores nominales de la máquina son: $X_s = 1$; $X_s' = 0{,}3$; $X_s'' = 0{,}15$; y las constantes de tiempo son: $T'' = 0{,}03$ segundos; $T' = 1{,}1$ segundos. Si se desprecia la componente continua en la corriente de cortocircuito, calcular: a) Valor eficaz de la corriente alterna en el instante posterior a la falta; b) valor de la corriente después de transcurrir dos ciclos de la tensión de red y también después de 5 segundos.

Solución

a) La corriente inicial es la subtransitoria:

$$I' = \frac{E_0}{X_s''} = \frac{1}{0{,}15} = 6{,}67 \text{ p.u.}$$

Como quiera que la corriente asignada vale:

$$I = \frac{50 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 12{,}2 \cdot 10^3} = 2.187 \text{ A}$$

entonces el valor real de I' será de $6{,}67 \cdot 2.187 = 14.587$ A.

b) Las corrientes transitoria y permanente de cortocircuito son:

$$I'' = \frac{1}{0{,}3} = 3{,}33 \text{ p.u.} \quad ; \quad I_{corto} = \frac{1}{1} = 1 \text{ p.u.}$$

por lo que según (5.105) la corriente $i(t)$ valdrá:

$$i(t) = 3{,}34\ e^{-t/0{,}03} + 2{,}33\ e^{-t/1{,}1} + 1 \text{ (en valores p.u.)}$$

Para $t = 2$ ciclos $= \dfrac{2}{50} = 0{,}04$ segundos resulta un valor:

$$i(t = 0{,}04 \text{ segundos}) = 0{,}88 + 2{,}247 + 1 = 4{,}127 \text{ p.u.}$$

que corresponde a una intensidad absoluta de 9.025 A.

Para $t = 5$ segundos resulta una corriente:

$$i(t = 5) = 0 + 0{,}025 + 1 = 1{,}025 \text{ p.u.}$$

es decir, 2.241 A, que es prácticamente la corriente de cortocircuito permanente.

PROBLEMAS

5.1. Un alternador trifásico de 6 polos, 1.000 r.p.m. tiene un estátor de 54 ranuras sobre el que se sitúa un devanado de paso diametral que contiene 10 conductores/ranura. Si el flujo por polo es de $2 \cdot 10^{-2}$ Wb y su forma sinusoidal, determinar la f.e.m. inducida por fase.

[Resp.: 383,2 V.]

5.2. Un alternador trifásico de 750 r.p.m., 50 Hz, está diseñado para generar una f.e.m. de 3.500 V/fase. El devanado del estátor tiene 120 ranuras con 24 conductores/ranura y la anchura de las bobinas es de 12 ranuras. Calcular el flujo máximo por polo si su distribución es sinusoidal.

[Resp.: 0,0361 Wb).]

5.3. Un alternador trifásico de 1.500 kVA, 6.600 V, conectado en estrella, tiene una curva de vacío definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{12.210 \cdot F_e}{4.250 + F_e}$$

donde E_0 se expresa en tensión de línea y F_e representa la f.m.m. de excitación en A.v/polo. La resistencia y reactancia de dispersión del inducido por fase son 0,6 Ω y 2,3 Ω, respectivamente. La f.m.m. de reacción de inducido a plena carga es de 2.500 A.v/polo. Determinar: *a*) F.e.m. E_r de línea a plena carga y con f.d.p. 0,8 inductivo; *b*) corriente de excitación necesaria en el inductor cuando la máquina está girando a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo, si se sabe además que la máquina tiene polos salientes devanados con 190 espiras cada uno; *c*) si en la situación del apartado anterior se desconecta repentinamente la carga, ¿cuál será el valor de la tensión de línea que aparecerá en bornes de la máquina?; *d*) ¿cuánto vale la regulación de tensión de la máquina?

[Resp.: *a*) 7.030,7 V. *b*) 40 A. *c*) 7.835 V. *d*) 18,71 %.]

5.4. Un alternador trifásico de 5.000 kVA, 6.600 V, conectado en estrella, tiene una curva de vacío definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{7.400 \cdot I_e}{85 + I_e}$$

donde E_0 se expresa en voltios por fase e I_e representa la corriente de excitación. La resistencia y reactancia de dispersión del inducido por fase son 0,2 Ω y 1 Ω, respectivamente. La f.m.m. de reacción de inducido es equivalente a una corriente de excitación de 20 A. Calcular: *a*) Margen de excitación necesario para dar una tensión asignada constante desde vacío a la plena carga con f.d.p. 0,6 inductivo; *b*) Si las pérdidas en el hierro, por fricción y rozamiento con el aire ascienden a un total de 100 kW y las bobinas de campo están alimentadas con una excitatriz a 200 V, calcular el rendimiento a plena carga con f.d.p. 0,6.

[Resp.: *a*) 90,23 A en vacío; 129,6 A a plena carga. *b*) 92,6 %.]

5.5. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1.000 kVA, 4.600 V, tiene una impedancia síncrona de 2 + *j* 20 Ω/fase. Determinar la regulación a plena carga con factores de potencia: *a*) unidad; *b*) 0,75 inductivo.

[Resp.: *a*) 44,6 %. *b*) 81,4 %.]

5.6. Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 6.600 V, tiene una impedancia síncrona de 0,4 + *j* 6 Ω/fase. Calcular la regulación de la máquina cuando suministra una potencia de 1.000 kW a la tensión asignada con f.d.p.: *a*) 0,866 inductivo; *b*) unidad; *c*) 0,866 capacitivo.

[Resp.: *a*) 9,7 %. *b*) 1,85 %. *c*) −5,95 %.]

5.7. Un alternador trifásico conectado en estrella de 4.000 kVA, 6.600 V, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y cortocircuito:

I_e (A)	10	20	30	40	60	80	100
E_0/fase (V)	960	1.920	2.800	3.440	4.220	4.600	4.800
I_{cc} (A)	232	464					

La resistencia del inducido es despreciable. Calcular: *a*) Regulación a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; *b*) corriente de excitación necesaria en el caso anterior. NOTA: Tómese como reactancia síncrona la primera aproximación obtenida de los ensayos, es decir, la que corresponde a la excitación necesaria para obtener la tensión asignada en vacío.

[Resp.: *a*) 21,33 %. *b*) 81 A.]

5.8. Un alternador trifásico conectado en estrella de 1.000 kVA, 6.600 V ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

Excitación (A.v/polo)	2.000	3.250	4.025	5.200	6.500
E_0 (línea)	4.300	6.600	7.250	7.920	8.580

Por el método de Potier se ha determinado el valor de la reactancia de dispersión y la f.m.m. de reacción de inducido a plena carga, resultando los valores: $X_\sigma = 3{,}1\ \Omega$; F_i = 2.000 A.v/polo. Calcular: *a*) F.m.m. de excitación necesaria a plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; *b*) regulación de tensión.

[Resp.: *a*) 5.120 A.v/polo. *b*) 19,7 %.]

5.9. Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 1.500 kVA, 6.600 V ha dado los siguientes resultando en un ensayo de vacío:

E_0 (V) línea	1.848	3.696	5.511	6.600	7.128	7.590	7.986
F_e (A.v/polo)	1.000	2.000	3.500	5.000	6.000	7.000	8.000

En un ensayo de cortocircuito se obtiene la corriente de plena carga para una excitación de 2.500 A.v/polo. En un ensayo con carga reactiva se necesitan 8.250 A.v/polo para que circule la corriente asignada a la tensión de régimen de 6.600 V. Calcular: *a*) F.m.m. de excitación necesaria en los polos cuando el generador suministra la plena carga con f.d.p. 0,8 inductivo; *b*) f.e.m. correspondiente en vacío; *c*) regulación de tensión del alternador en este régimen.

[Resp.: *a*) 7.330 A.v/polo. *b*) 7.700 V. *c*) 17 %.]

5.10. Un alternador trifásico de 1.000 kVA, 11.000 V, conectado en estrella, tiene una resistencia de inducido despreciable. Los ensayos de vacío y con carga reactiva pura a la intensidad asignada han dado los siguientes resultados:

I_e (A)	20	25	55	70	90
E_0 (V) (línea)	5.800	7.000	12.500	13.750	15.000
V (f.d.p. = 0)	0	1.400	8.500	10.500	12.400

Determinar por el método de Potier: *a*) Caída de tensión en la reactancia de dispersión a plena carga; *b*) f.m.m. de reacción de inducido con corriente asignada; *c*) f.e.m. resultante E_r cuando la máquina funciona a plena carga con tensión asignada y f.d.p. 0,8 inductivo; *d*) f.m.m. necesaria en la excitación en el caso anterior; *e*) f.e.m. E_0 que producirá en vacío la excitación anterior; *f*) regulación de tensión de la máquina en las condiciones anteriores.

[Resp.: *a*) 1.155 V/fase. *b*) 13 A. *c*) 12.305 V. *d*) 64 A. *e*) 13.200 V. *f*) 20 %.]

5.11. Un alternador trifásico de 5.000 kVA, 6.600 V, conectado en estrella, ha dado los siguientes resultados en unos ensayos de vacío y f.d.p. nulo con corriente de plena carga:

F_e (A.v/polo)	3.200	5.000	7.500	10.000	14.000
E_0 (V) (línea)	3.100	4.900	6.600	7.500	8.300
V (f.d.p. = 0)	0	1.850	4.250	5.800	7.000

La resistencia del inducido es despreciable. Determinar por el método de Potier: *a*) Caída de tensión a plena carga en la reactancia de dispersión del inducido; *b*) f.m.m. de reacción de inducido con corriente asignada; *c*) repetir los apartados anteriores para una corriente de carga de 500 A; *d*) determinar las f.m.m.s. de excitación necesarias en el inductor cuando la máquina suministra una corriente de 500 A a la tensión asignada, con factores de potencia: unidad, 0,9 capacitivo, 0,71 inductivo; *e*) calcular en las condiciones del apartado anterior las f.e.m.s. producidas en vacío.

[Resp.: *a*) 520 V/fase. *b*) 2.300 A.v/polo. *c*) 594 V/fase; 2.630 A.v/polo. *d*) 8.465; 6.616; 11.352 A.v/polo. *e*) 7.000 V; 6.000 V; 7.900 V.]

5.12. Un alternador trifásico conectado en estrella de 6.600 V ha dado los siguientes resultados en un ensayo de vacío:

I_e (A)	10	15	21	31	39	50	65
E_0 (línea)	3.000	4.200	5.400	6.600	7.200	7.700	8.100

En cortocircuito se necesita una excitación de 24 A para que circule la corriente de plena carga. En un ensayo con carga reactiva se obtienen 6.100 V con una corriente 125 por 100 de la asignada, para una excitación de 66 A. La resistencia del inducido es despreciable. Calcular: *a*) Caída de tensión a plena carga en la reactancia de dispersión del inducido; *b*) f.m.m. del inducido con corriente asignada; *c*) f.m.m. necesaria en la excitación cuando el generador suministra la plena carga con f.d.p. unidad y 0,8 inductivo; *d*) f.e.m.s. producidas en vacío en las condiciones del apartado anterior; *e*) regulaciones de tensión correspondientes.

[Resp.: *a*) 554 V/fase. *b*) 21 A. *c*) 40,7 A. *d*) 54,5 A. *e*) 10,6 %; 19,7 %.]

5.13. Un alternador trifásico conectado en estrella de 5.000 kVA, 6.600 V, tiene una resistencia del inducido despreciable. El ensayo de vacío a la velocidad de sincronismo ha dado los siguientes resultados:

I_e (A)	24	35	50	71	90	120	140
E_0 (línea)	3.000	4.200	5.400	6.600	7.300	8.000	8.300

En cortocircuito es necesaria una corriente de excitación de 37 A para que circule una corriente de 300 A en el inducido. En un ensayo con carga reactiva y corriente asignada se obtiene una tensión de 6.000 V para una excitación de 130 A. Cuando la máquina suministra los 3/4 de la plena carga a la tensión asignada con f.d.p. 0,8 inductivo, se pide: *a*) Caída de tensión en la reactancia de dispersión; *b*) f.m.m. de reacción de inducido; *c*) excitación necesaria en el inductor; *d*) f.e.m. que producirá la excitación anterior al dejar la máquina en circuito abierto; *e*) regulación de tensión correspondiente.

[Resp.: *a*) 476 V. *b*) 33,8 A. *c*) 121 A. *d*) 8.050 V. *e*) 22 %.]

5.14. Un alternador trifásico tiene una impedancia síncrona de $0 + j\,5\ \Omega$ y está conectado a una red de potencia infinita de 6.600 V. La excitación es tal que la f.e.m. inducida en vacío es de 6.000 V. Determinar la potencia activa máxima que en estas condiciones podrá suministrar la máquina, sin que exista pérdida de estabilidad. Hallar también la corriente de inducido y el f.d.p. para dicha carga.

[Resp.: 7.920 kW; 1.029,5 A; 0,673 capacitivo.]

5.15. Un alternador trifásico tiene una impedancia síncrona de $0 + j\,10\ \Omega$ y está conectado a una red de potencia infinita de 11.000 V suministrando una corriente de 220 A con f.d.p. unidad. Sin cambiar la entrada de potencia a la máquina motriz, se eleva la f.e.m. un 25 por 100. Calcular: *a*) Intensidad del inducido y f.d.p. en estas condiciones; *b*) potencia activa máxima que podrá ceder la máquina a la red antes de perder el sincronismo, con el nuevo valor de la excitación; *c*) intensidad y f.d.p. en las condiciones del apartado anterior.

[Resp.: *a*) 281,5 A; 0,781 inductivo. *b*) 16 MW. *c*) 1.053 A; 0,797 capacitivo.]

5.16. Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 30 Ω/fase. Está acoplado a una red de potencia infinita de 11 kV y desarrolla 4.000 kVA con f.d.p. unidad. Si se aumenta la f.e.m. un 20 por 100, permaneciendo constante la entrada de potencia a la máquina motriz, determinar el nuevo f.d.p. con que trabajará la máquina y la potencia aparente que suministra.

[Resp.: 0,937 inductivo; 4.270 kVA.]

5.17. Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia del inducido despreciable y una reactancia síncrona de 8 Ω/fase. La curva de vacío está definida por la ecuación:

$$E_0 = \frac{20.240 \cdot I_e}{42 + I_e}$$

donde E_0 expresa la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación. Se conecta el generador a una red de potencia infinita de 11 kV suministrando en un momento dado una potencia activa de 3.810 kW con f.d.p. unidad. En esta situación se aumenta la *corriente de excitación* un 50 por 100 sin modificar la apertura de distribuidor de turbina. Calcular: *a*) Intensidad del inducido y f.d.p. en estas condiciones; *b*) potencia

activa máxima que podrá ceder la máquina a la red antes de perder el sincronismo con el nuevo valor de la excitación; *c*) intensidad y f.d.p. en el caso anterior.

[Resp.: *a*) 246,7 A; 0,81 inductivo. *b*) 18,28 MW. *c*) 1.245,5 A; 0,77 capacitivo.]

5.18. Un generador síncrono trifásico conectado en estrella de 6.600 V, 50 Hz, tiene una resistencia del inducido despreciable y una reactancia síncrona constante. La curva de vacío está definida por la ecuación.

$$E_0 = \frac{12.210 \cdot I_e}{85 + I_e}$$

donde E_0 expresa la f.e.m. de línea e I_e la corriente de excitación. Se conecta la máquina a una red de potencia infinita; una vez efectuado el acoplamiento y sin cambiar la corriente de excitación, se abre el distribuidor de agua a la turbina hasta que el alternador suministra a la red una potencia activa de 10 MW. En esta situación se aumenta la corriente de excitación un 50 por 100 respecto al valor de conexión sin modificar la potencia de entrada a la máquina motriz, comprobándose entonces que se obtiene un f.d.p. 0,8 inductivo. Calcular: *a*) Reactancia síncrona del alternador; *b*) f.d.p. con el que trabaja la máquina antes de cambiar la excitación y entregando la potencia de 10 MW.

[Resp. *a*) 0,935 Ω. *b*) 0,994 inductivo.]

5.19. Un alternador trifásico conectado en estrella tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 10 Ω/fase. Está acoplado a una red de potencia infinita de 11 kV y se sabe que desarrolla una potencia con f.d.p. 0,673 inductivo, siendo el ángulo de potencia δ = 10°. Calcular: *a*) F.e.m. de línea producida por el generador; *b*) potencia activa que suministra a la red.

[Resp.: *a*) 13.856 V. *b*) 2.647 kW.]

5.20. Dos alternadores idénticos de 2.000 kVA funcionan en paralelo alimentando una carga aislada. El regulador de la primera máquina es tal que la frecuencia cae uniformemente de 50 Hz en vacío a 48 Hz a plena carga. La correspondiente caída uniforme de velocidad de la segunda máquina es de 50 Hz a 47,5 Hz. *a*) ¿Cómo se distribuirán entre los dos generadores una potencia activa consumida por la carga de 2.700 kW?; *b*) ¿cuál es la potencia activa máxima con f.d.p. unidad que puede suministrarse sin sobrecargar ninguno de los alternadores?

[Resp.: *a*) 1.500 kW; 1.200 kW. *b*) 3.600 kW.]

5.21. Dos alternadores trifásicos funcionan en paralelo suministrando a una carga una potencia de 6 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. La frecuencia de uno de ellos cae uniformemente de 51 Hz en vacío a 49,75 Hz cuando se carga con una potencia activa de 10 MW, y en el otro la frecuencia pasa de 51 Hz a 49,5 Hz cuando se carga con 2 MW. Determinar las potencias activas suministradas por cada generador y el f.d.p. con el que trabaja el primero, si el f.d.p. del segundo es de 0,71 inductivo.

[Resp.: 5.143 kW; 857 kW; 0,815.]

5.22. Dos alternadores idénticos de 15 MVA, 6,6 kV, 50 Hz, conectados en estrella, están acoplados en paralelo, suministrando en conjunto a una red aislada una potencia de 20 MW con f.d.p. 0,8 inductivo. Ambos generadores tienen resistencias de inducido despreciables y reactancias síncronas de un valor de 2,83 Ω/fase. Sabiendo que la potencia activa se reparte por igual entre ambos generadores y que el primero tiene una f.e.m. de 11.484 V de línea, calcular: 1) Corrientes suministradas por cada generador con sus f.d.p. respectivos; 2) f.e.m. generada por el segundo alternador. NOTA: Se supone que la tensión común en barras de ambos generadores permanece constante en el valor nominal de 6.600 V.

[Resp.: 1) 1.203 A; 0,726; 1.000 A; 0,874. 2) 9.960 V.]

5.23. Dos alternadores idénticos conectados en estrella están acoplados en paralelo alimentando una carga aislada. Ambas máquinas tienen sus resistencias de inducido despreciables y sus reactancias síncronas son de 10 Ω/fase. Las f.e.m.s. generadas por cada alternador son E_1 = 6.700 V/fase y E_2 = 6.500 V/fase, estando la f.e.m. E_2 adelantándose 10° eléctricos respecto a E_1. Si la carga absorbe una corriente total de 500 A que está desfasada 37° en retraso respecto a la f.e.m. E_1, calcular: *a*) Tensión en la barra común a ambas máquinas en voltios por fase; *b*) corrientes suministradas por cada alternador con sus f.d.p; *c*) f.d.p. de la carga.

[Resp.: *a*) 5.245 V. *b*) 219 A; 0,836; 290 A; 0,978. *c*) 0,933 inductivo.]

5.24. Dos alternadores idénticos de 5.000 kVA, 6,6 kV, conectados en estrella, funcionan en paralelo con las mismas excitaciones y se reparten por igual una potencia activa de 8 MW a 6,6 kV con f.d.p. 0,8 inductivo. Las resistencias de los inducidos son despreciables y las reactancias síncronas por fase valen 17,4 Ω: *a*) Calcular las f.e.m.s. de línea de cada generador; *b*) si la f.e.m. de uno de los generadores se reduce un 15 por 100, determinar la f.e.m. que tendrá que generarse en el otro para evitar un cambio en la tensión en barras y un suministro adicional de vapor a «cada uno»; *c*) calcular en las condiciones del apartado anterior las corrientes suministradas por cada generador y sus f.d.p.

[Resp. *a*) 17.935 V y son iguales para cada generador. *b*) 20.922 V. *c*) 380 A; 0,922; 515 A; 0,68.]

5.25. Un motor síncrono trifásico conectado en estrella, de 75 kW, 500 V, tiene una impedancia síncrona $\mathbf{Z}_s = 0{,}03 + j\,3$ Ω/fase. Si funciona a plena carga con un f.d.p. 0,8 capacitivo y rendimiento del 90 por 100, calcular la f.e.m. inducida E_0 y la potencia activa absorbida de la red.

[Resp.: 309 V; 83,33 kW.]

5.26. Un motor síncrono trifásico de 4 polos tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 3 Ω/fase. Está conectado a una red de 2.000 V, 50 Hz. La excitación es constante y produce una f.e.m. de 1.150 V/fase. Calcular la potencia activa absorbida de la línea, el factor de potencia y el par desarrollado en el eje si la corriente del inducido es de 200 A.

[Resp.: 668 kW; 0,963 inductivo; 4.250 N.m.]

5.27. Un motor síncrono trifásico de 6.600 V conectado en estrella, trabaja con tensión constante y excitación constante. Su impedancia síncrona es 2 + *j* 20 Ω/fase. Cuando la entrada es de 1.000 kW, el f.d.p. es de 0,8 capacitivo. Hallar el f.d.p. cuando se aumenta la entrada a 1.500 kW.

[Resp.: 0,935 capacitivo.]

5.28. Un motor síncrono trifásico de 400 V, 6 polos, 50 Hz, conectado en estrella, tiene una impedancia síncrona de 0,5 + *j* 4 Ω/fase. Absorbe una corriente de 15 A con f.d.p. unidad cuando funciona con una cierta excitación. Si se aumenta el par de carga hasta que la corriente de línea sea de 60 A, permaneciendo constante la excitación, hallar el par total desarrollado y el nuevo f.d.p.

[Resp.: 362 N.m; 0,91 capacitivo.]

5.29. Una carga de 250 kVA tiene un f.d.p. de 0,65 inductivo. Se conecta a la misma red un motor síncrono de 75 kW de rendimiento 88 por 100 para elevar el factor de potencia de la instalación a 0,85 inductivo: *a*) Calcular la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja; *b*) si la tensión de alimentación es de 380 V y el motor tiene una impedancia síncrona de 0 + *j* 0,5 Ω/fase (conexión estrella), determinar la f.e.m. E_0 inducida en esta máquina.

[Resp.: *a*) 92,7 kVA; 0,919 capacitivo. *b*) 442,5 V.]

5.30. Una industria absorbe una potencia activa de 2.000 kW con f.d.p. 0,6 inductivo de una red de 6.000 V. Se coloca un motor síncrono conectado en estrella que va a desarrollar una potencia activa de 400 kW con rendimiento 0,8 para elevar el f.d.p. de la instalación a la unidad: *a*) Determinar la potencia aparente del motor síncrono y el f.d.p. con el que trabaja; *b*) si el motor tiene una resistencia de inducido despreciable y una reactancia síncrona de 2 Ω/fase, estando la curva de vacío determinada por la ecuación:

$$E_0 = \frac{9.000 \cdot I_e}{30 + I_e}$$

donde E_0 se expresa en voltios de línea e I_e en amperios de excitación, calcular la f.e.m. E_0 del motor y la excitación necesaria en el inductor.

[Resp.: *a*) 2.713 kVA; 0,184 capacitivo. *b*) 6.890 V; 98 A.]

Biografías

Alexanderson, Ernest Frederik Werner (1878-1975). Ingeniero eléctrico sueco-americano. Emigró a los Estados Unidos en 1901 y al año siguiente ingresó en la *General Electric Company* en Schenectady bajo la dirección de Charles Proteus Steinmetz. En 1906 desarrolló un alternador de alta frecuencia que revolucionó las comunicaciones por radio. En 1916 patentó un dispositivo de sincronización selectiva para receptores de radio. Inventó la *amplidina*, que es una máquina de c.c. de campo transversal, derivada de la dinamo Rosenberg, que se utilizó en sistemas de control automático en instalaciones industriales, para la regulación de la excitación de alternadores y en sistemas de dirección de tiro para artillería. Hoy día las máquinas de campo transversal han sido sustituidas completamente por elementos semiconductores de la familia SCR (rectificadores con-

trolados de silicio). En 1948 se jubiló en la GE y continuó como ingeniero consultor para la RCA (*Radio Corporation of America*). Contribuyó enormemente al desarrollo de la TV. Estaba en posesión de más de 300 patentes en los campos de la ingeniería eléctrica y de las telecomunicaciones.

Behn-Eschenburg, Hans (1864-1938). Ingeniero eléctrico suizo. Nació el 10 de enero de 1864 en Zurich. Murió el 18 de mayo de 1938 en Zurich. Estudió entre los años 1886-1888 en el Politécnico de Zurich y los dos años siguientes amplió estudios en Berlín. De vuelta a Zurich en 1891 fue ayudante del gran físico Heinrich Friedich Weber, que había sido contratado para dirigir el nuevo Instituto de Física del Politécnico y que se había dotado con grandes medios materiales; de hecho, Weber fue contratado por H.von Helmholtz para efectuar las medidas de la red de transporte de energía eléctrica trifásica de Lauffen a Frankfurt con motivo de la Exposición Electrotécnica Internacional en esta última ciudad, y que iba a ser la primera red trifásica del mundo. Behn-Eschenburg fue el ayudante de Weber en la realización de las medidas, lo que supuso una gran labor de aprendizaje técnico. Como quiera que C.E.L. Brown, director de ingeniería de los talleres suizos Oerlikon y que había diseñado los alternadores de Lauffen en el río Neckar, al finalizar la Exposición se asoció con Walter Boveri para fundar la hoy multinacional Brown-Boveri, se eligió como nuevo director de Talleres Oerlikon a E. Huber-Stockar y se contrató también a Behn-Eschenburg como director del Departamento eléctrico. En esta empresa se encargó del diseño y construcción de las máquinas eléctricas, logrando perfeccionamientos notables. Preparó una plataforma de ensayos para comprobar el funcionamiento de las máquinas que salían de los talleres y elaboró diversos protocolos de medidas, lo que le llevó a estudiar con rigor el comportamiento de las diversas máquinas eléctricas. Sus trabajos fueron tan destacados que en el año 1913 fue nombrado director general de Talleres Oerlikon y más tarde, en 1919, delegado en el Consejo de Administración. Entre los años 1892 a 1922 publicó gran cantidad de artículos técnicos en la revista alemana *Elektrotechnische Zeitschrift*, donde expuso sus investigaciones; en particular desarrolló métodos indirectos para predeterminar la caída de tensión de las máquinas rotativas de c.a. y de los transformadores. Analizó con rigor la reacción de inducido de alternadores, sustituyendo aquélla por una reactancia principal que al sumarse a la reactancia de dispersión da lugar a la denominada reactancia síncrona del alternador, lo que permite predecir con exactitud (en las máquinas no saturadas) *la caída de tensión de la máquina síncrona, y que debido a ello se conoce como método de Behn-Eschenbug o de la impedancia síncrona.* Especialista en motores eléctricos de tracción, fue el artífice de la electrificación ferroviaria suiza utilizando una frecuencia de 50/3 Hz. Estudió la conmutación de los motores monofásicos con conmutador y la recuperación de energía del mismo. En 1919 recibió el nombramiento como Doctor Honoris Causa de la Politécnica de Zurich.

Blondel, André (1863-1938). Físico e ingeniero francés. Estudió en la Escuela Politécnica y más tarde en *l'École des Ponts et Chaussées* (1888) y en la Facultad de Ciencias de París (1889). Ingeniero del Servicio Central de Balizas y Faros (1889) y desde 1893 catedrático de Electrotecnia en la Escuela de Ingenieros de Caminos de París. Entre 1893 y 1902 diseñó unos galvanómetros especiales que él denominó oscilógrafos y que podían registrar señales de hasta 30 kHz. Inventó también un histeresímetro y un analizador de armónicos. Con su oscilógrafo hizo importantes estudios de la forma de la onda de los alternadores y del arco voltaico. En 1912 inventó un radiofaro, que en la década siguiente fue el modelo que se instaló en todas las costas francesas. Sentó las bases de la metrología moderna, definiendo unidades fotométricas y haciendo un estudio de diferentes tipos de proyectores y alumbrado público. En electrotecnia su principal contribución se refiere a las máquinas síncronas, influido por Alfred Potier, que fue profesor suyo de Física en la Politécnica. Analizó con rigor el acoplamiento en paralelo de alternadores, determinando los repartos de las diversas potencias entre los mismos. Adaptó el método de Potier, que permitía calcular la reacción de inducido en alternadores de polos lisos, para el caso de alternadores de polos salientes, considerando dos tipos de reacciones: la longitudinal y la transversal. Inventó ábacos para resolver la ecuación de cambio de condiciones de las líneas aéreas. Público también un tratado de 1.700 páginas sobre tracción eléctrica. Su produción científica le hizo ganar grandes premios: Medalla del Instituto Franklin, la de Lord Kelvin y la del Instituto Electrotécnico de Montefiore. Fue miembro de la

Academia de Ciencias de París (1913) y representante francés del AIEE (*American Institute of Electrical Engineers*).

CONCORDIA, Charles (1908-2003). Ingeniero americano. Ingresó en 1926 en la *General Electric*, empresa en la que ejerció toda su carrera profesional hasta su jubilación en 1973. Fue pionero en la aplicación de los ordenadores analógicos y digitales para resolver problemas de ingeniería. Sus contribuciones más importantes se refieren a las máquinas síncronas, dinámica de los sistemas eléctricos interconectados, incluyendo estudios sobre la estabilidad, operación , control y planificación de los mismos. Escribió en 1951 un magnífico texto sobre máquinas síncronas que fue texto de consulta obligado para los especialistas en esta materia. Fue responsable del diseño y construcción del primer analizador de redes de la *General Electric*. Recibió el Premio Coffin en 1942 por sus contribuciones al diseño de accionamientos para túneles de viento (aerodinámica). Medalla Lamme en 1962 por sus aportaciones en máquinas eléctricas. *Fellow del IEEE* en 1947. Doctor Honoris Causa por la *Union College* en 1971. Fue autor o coautor de más de 130 artículos técnicos. Se le atribuyen siete patentes en relación con la ingeniería eléctrica. En 1999 recibió la Medalla de Honor del IEEE por sus grandes contribuciones en el área de dinámica de los sistemas eléctricos de potencia.

DOHERTY, Robert E. (1885-1950). Ingeniero americano. Estudió en la Universidad de Illinois (1909). Master en Ciencias por la *Union College*. Entre 1909 y 1931 trabajó en la *General Electric*, Schenectady, en la que fue ayudante de C.P. Steinmetz durante seis años. Fue ingeniero consultor de la empresa y director de formación de la Compañía. En 1931 dejó la GE para incorporarse como profesor en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Yale. Desde 1936 hasta su fallecimiento fue Presidente del Instituto Carnegie de Tecnología. Medalla Lamme del IEEE en 1937 por sus trabajos sobre máquinas eléctricas. Publicó numerosos artículos técnicos, con especial énfasis en las máquinas síncronas, en las que era una autoridad mundial. Perteneció a un gran número de sociedades científicas y estaba en posesión de títulos académicos honoríficos: Doctor en Artes por Yale (1931), Doctor en Leyes por Pittsburg (1936), Doctor en Ciencias por el Waysnesburg College (1948).

DUDDELL, William du Bois (1872-1917). Físico francés. Prácticamente toda su formación e investigación la realizó en Inglaterra. Estudió en el City and Guilds Central Technical College (1896), siendo alumno de los profesores Ayrton y Mather. Estando dibujando punto por punto la forma de onda de un arco en c.a., él quiso automatizar las medidas, y para ello tomó un oscilógrafo tipo Blondel, al que le hizo algunas mejoras para conseguir un amortiguamiento crítico (1898). Más tarde hizo estudios sobre el arco eléctrico, descubriendo el arco musical, que le dio la fama y notoriedad mundial; su invento consistía en hacer pasar una corriente de alta frecuencia a través de un arco utilizando un condensador y una bobina en paralelo con aquél: el arco se veía sometido de este modo a oscilaciones espontáneas. Duddell hizo un estudio completo del fenómeno y preparó una serie de circuitos oscilantes con pulsadores, simulando un piano que permitía variar a voluntad la frecuencia propia del arco, con lo que pudo tocar el himno nacional inglés (*God save the Queen*). A Duddell se le debe también la invención de un alternador de alta frecuencia de 120 kHz, de un galvanómetro de vibración y de un amperímetro térmico especial que permitía medir con precisión las corrientes de alta frecuencia. Fue elegido miembro de la Royal Society en 1907, Presidente de la Comisión Internacional de Telegrafía en 1914 y Presidente del IEE desde 1912 hasta 1914, sustituyendo a Ferranti. Murió en la Primera Guerra Mundial.

LAMME, Benjamin G. (1864-1924). Ingeniero americano. Ingresó en la Compañía Westinghouse en 1893 y en esta empresa trabajó toda su vida. Comenzó como ingeniero de laboratorio para realizar ensayos de máquinas eléctricas y en el año 1903 ya era director de ingeniería. Lamme jugó un papel de extraordinaria importancia para el desarrollo de esta Compañía. Fue pionero en el desarrollo y construcción de máquinas eléctricas: motores de inducción, alternadores polifásicos, conmutatrices, motores monofásicos con conmutador para tracción eléctrica. Fue uno de los ingenieros responsables (el otro era Charles Scott) del diseño del generador de 5.000 CV instalado en las

cataratas del Niágara en 1895. (Ambos ingenieros tenían solamente veintinueve años cuando realizaron este proyecto en 1893. Esta instalación tuvo la importancia histórica de ser la primera en los Estados Unidos de c.a. y tipo bifásica a 2.200 V, 30 Hz). Proyectó y construyó líneas de tracción eléctrica en New York, New Haven y Hartford. Era un experto matemático y escribió gran número de artículos sobre ingeniería eléctrica.

MORDEY, William Morris (1856-1938). Ingeniero eléctrico británico. A los catorce años ingresó en el Servicio de Telégrafos de Gran Bretaña. En 1881 se incorporó a la Compañía inglesa Brush como encargado del departamento de ensayos eléctricos. En esta fábrica se construían dinamos para alumbrado eléctrico de lámparas de arco con la patente americana de Brush de Cleveland; también se fabricaban lámparas incandescentes. Mordey, que tenía gran habilidad para la construcción de máquinas eléctricas, enseguida fue el responsable del diseño de las mismas. A finales del siglo XIX el alumbrado solía realizarse con lámparas de arco alimentadas por máquinas Gramme, Brush, Jablochkoff y Siemens. A partir de los trabajos teóricos de Rowland y sobre todo de J. Hopkinson se llegó a un conocimiento del circuito magnético de las máquinas eléctricas, que permitió un diseño científico de las mismas. Mordey comenzó a diseñar dinamos tipo Schukert en su fábrica y más tarde inició el diseño y construcción de alternadores, en vista del desarrollo de la c.a. promovida en Inglaterra por Ferranti y por Westinghouse en Estados Unidos. A Mordey se le debe el invento del devanado compound o compuesto en las dinamos. Desarrolló el trabajo en paralelo de los alternadores y el funcionamiento de estas máquinas como motores síncronos. Fue el primer ingeniero que se dio cuenta de que las curvas que relacionan la corriente de inducido con la corriente de excitación de las máquinas síncronas tenían forma de V, y de ahí que reciban actualmente el nombre de *curvas en V de Mordey*. Fue Presidente del Instituto de Ingenieros eléctricos ingleses (IEE) en el bienio 1908-1909.

POTIER, Alfred (1840-1905). Ingeniero francés. Estudió en la Politécnica y después en la Escuela de Ingenieros de Minas (1859). En 1881 ocupó la cátedra de Física en la Escuela Politécnica y desde 1893 fue catedrático de electricidad en la Escuela de Ingenieros de Minas, cátedra que se estableció expresamente para él. Colaboró con Michel Lévy y Bertrand en la confección del mapa geológico de Francia. Realizó investigaciones en Física: polarización de la luz, revisión del principio de Huygens, etc.; escribió también varias memorias didácticas sobre termodinámica. En electricidad investigó sobre la teoría de la pila voltaica y la determinación del equivalente electroquímico de la plata. En electrotecnia estudió el comportamiento de la máquina de c.c. y realizó trabajos importantes sobre la reacción de inducido de los alternadores. En la Exposición de Electricidad de París fue uno de los que más trabajó en la elección de un sistema coherente de unidades eléctricas. También fue uno de los fundadores de la revista *L'éclairage électrique*, que más tarde, tras diversas transformaciones, daría lugar a la actual *Révue générale d'électricité*. Desde 1891 fue miembro de la Academia de Ciencias de París.

RUDENBERG, Reinhold (1883-1961). Ingeniero germano-americano. Estudió ingeniería eléctrica y mecánica en Hannover (1906). Fue ayudante de Ludwig Prandtl en Gotinga, conocido por sus investigaciones en aerodinámica. Entre 1908 y 1936 trabajó en la *Compañía Siemens-Schuckert* de Berlín como ingeniero de laboratorio para ensayo de máquinas eléctricas, donde llegó a director de ingeniería. En esta etapa profesional inventó el motor trifásico con conmutador y escobillas ajustables y el autoarranque por corrientes de Foucault de un motor de inducción. En 1916 proyectó un alternador para una central hidráulica de 60 MVA, un récord para esa época. Ideó conductores huecos para redes de transporte. En 1913 fue nombrado profesor de electrotecnia en Berlín, donde más tarde, en 1919, fue catedrático y profesor honorífico en 1927. En 1936 se trasladó a Inglaterra, trabajando hasta 1938 como ingeniero consultor de la General Electric. En 1939 se fue a los Estados Unidos, donde fue contratado como catedrático de ingeniería eléctrica en Harvard. En 1952, al llegar su jubilación, fue profesor visitante en Berkeley, Río de Janeiro, São Paulo y Montevideo. Escribió más de 100 publicaciones sobre electricidad: análisis de la conmutación en las máquinas de c.c., motor de c.a. con conmutador, diseño de disyuntores y teoría del arco eléctrico. Escribió dos libros de texto. En particular, el que lleva por título, *Comportamiento transitorio de sistemas eléc-*

tricos de potencia, cuya primera edición data de 1923 y que fue traducido a varios idiomas, fue un libro de consulta obligada en muchas escuelas de ingenieros y tiene capítulos que aún hoy día se pueden considerar de actualidad. Se le atribuyen más de 300 patentes en todas las ramas de la ingeniería eléctrica.

SKINNER, Charles Edward (1865-1950). Ingeniero americano. Se graduó en ingeniería mecánica en la Universidad de Ohio (1890). Doctor en Ciencias por la misma Universidad en 1927. En 1890 ingresó en la Compañía Westinghouse. Fue uno de los ingenieros responsables de las instalaciones eléctricas de la central del Niágara en el período 1893-95. Permaneció en la Westinghouse toda su vida. En esta Compañía planificó y construyó los laboratorios de investigación: ensayo de materiales, físico-química y el de A.T. Se retiró como Director Adjunto de Ingeniería. Representante americano de la Comisión Electrotécnica Internacional, de la Sociedad Internacional de Materiales, etc. Perteneció al Comité americano de patrones y normas. Presidente del IEEE (1931-1932). Miembro de diversas sociedades científicas: IEEE, Instituto Franklin, ASME, Sociedad americana para el avance de la Ciencia, etc.

WHITEHEAD, John Boswell (1872-1955). Ingeniero americano. Se graduó en la Universidad John Hopkins (1893), doctorándose en 1902. Fue uno de los responsables de las instalaciones eléctricas de la central del Niágara. Trabajó en esa época para la Westinghouse; más tarde pasó a la empresa *Niagara Fall Power*. En 1898 fue contratado como profesor de la Universidad John Hopkins y se encargó de crear los estudios de Ingeniería Eléctrica. En 1910 obtuvo el nombramiento de catedrático de Ingeniería Eléctrica, desde 1920 a 1938 fue Director del Departamento de Electrotecnia y a partir de 1938 hasta su jubilación en 1942 fue director de la Escuela de Ingeniería. Escribió diversos artículos sobre electromagnetismo, transformadores y tracción eléctrica. Premiado con la medalla del Instituto Edison en 1941. Perteneció a un gran número de comités científicos americanos. Cooperó con la fuerza aéreas americanas en investigaciones electrónicas aplicadas. Presidente del IEEE entre 1933 y 1934.

Referencias

ASINEL: *Textos sobre Centrales Termoeléctricas Convencionales y Nucleares.* Grupo D, Volumen 01: Alternadores; Volumen 2: Funcionamiento del alternador. Asinel, Madrid, 1985.

BEWLEY, L. V.: *Alternating Current Machinery.* MacMillan Co., New York, 1949.

BROSAN, G. S.; HAYDEN, J. T.: *Advanced Electrical Power and Machines*. Isaac Pitman & Sons Ltd., London, 1966.

CONCORDIA, CH.: *Synchronous Machines*. John Wiley & Sons, New York, 1951.

CORTES, M.: *Curso Moderno de Máquinas Eléctricas Rotativas,* tomo III. Ed. Técnicos Asociados, Barcelona, 1973.

CRARY, S. B.: *Power System Stability,* Vols. I y II. John Wiley & Sons, New York, 1947.

CHAPMAN, S. J.: *Máquinas Eléctricas.* McGraw-Hill Latinoamericana, S. A., Bogotá, Colombia, 1987.

CHATELAIN, J.: *Machines Électriques. Traité d'électricité,* Vol. X. Ed. Georgi, Lausanne, 1983.

DEL TORO, V.: *Electric Machines and Power Systems.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.

DRAPER, A.: *Electrical Machines.* Longman Group, London, 1971.

ELGERD, O. I.: *Electric Energy Systems Theory: An Introduction.* Tata McGraw-Hill Pub., New Delhi, 1971.

EL HAWARY, M. E.: *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications.* Reston Book, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1986.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY CH.; UMANS, S. D.: *Electric Machinery*, Fourth Ed. (S.I.). McGraw-Hill Book Co., New York, 1985.

GEMLICH, D. K.; HAMMOND, S. B.: *Electromechanical Systems*, McGraw-Hill, New York, 1967.

HINDMARSH, J.: *Electrical Machines.* Pergamon Press, New York, 1965.

IEEE: *Test Procedures for Synchronous Machines*, n.º 115. Institute of Electrical and Electronic Engineers, New York, 1965.

IVANOV-SMOLENSKY, A. V.: *Electric Machines*, tomo 2. Mir Pub., Moscow, 1982.

JONES, C. V.: *The Unified Theory of Electrical Machines.* Plenum Pub., Corp., New York, 1968.

KIMBARK, E. W.: *Power System Stability*, Vol. II: Synchronous Machines. John Wiley & Sons, New York, 1956; reimpreso por Ed. Dover en 1968.

KOSOW, I.: *Electric Machinery and Transformers.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

KOSTENKO, M. P.; PIOSTROVSKI: *Máquinas Eléctricas*, tomo II. Ed. Mir, Moscú, 1975.

LANGSPORF, A. S.: *Teoría de las máquinas de C.A.* Ed. Castillo, Madrid, 1967.

LAWRENCE, R. R.; RICHARDS, H. E.: *Principles of Alternating-Current Machinery*, 4th ed. McGraw-Hill, New York, 1953.

LIWSCHITZ-GARIK, M.; WHIPPLE, C. C.: *Electric Machinery*, Vol. 2. Van Nostrand Co., New York, 1946.

MABLEKOS, V. E.: *Electric Machine Theory for Power Engineers.* Harper & Row Pub., New York 1980.

MATSCH, L. W.: *Máquinas electromagnéticas y electromecánicas.* Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A., México, 1972.

MCPHERSON, G.: *An Introduction to Electrical Machines and Transformers.* John Wiley & Sons, New York, 1981.

NAGRATH, I. J.; KOTHARI, D. P.: *Electric Machines.* Tata McGraw-Hill Pub., New Delhi, 1985.

PARK, R. H.: *Two-Reactance Theory of Synchronous Machines Generalized Methods of Analysis*, Pt. I, AIEE Trans., Vol. 48, July, 1929, págs. 716-730.

PUCHSTEIN, A. F.; LLOYD, R.; CONRAD, A. G.: *Alternating Current Machines.* Wiley Interscience, New York, 3rd ed., 1954.

SAY, M. G.: *Alternating Current Machines.* Pitman Pub. Co., London, 1976.

SLEMON, G. R.; STRAUGHEN, A.: *Electric Machines.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1980.

STEIN, R.; HUNT, W. T.: *Electric Power System Components: Transformers and Rotating Machines.* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.

THALER, E. J.; WILCOX, M. L.: *Máquinas eléctricas: Estado dinámico y permanente.* Ed. Limusa-Wiley S. A., México, 1969.

WESTINGHOUSE: *Electrical Transmission and Distribution Reference Book.* Westinghouse Co., East Pittsburg, Pennsylvania, 1964.

WILDI, TH.: *Tecnología de los Sistemas Eléctricos de Potencia.* Ed. Hispano Europea S. A., Barcelona, 1983.

CAPÍTULO 6

Máquinas de corriente continua

6.1. INTRODUCCIÓN

Las máquinas de c.c. tienen una gran importancia histórica debido a que su empleo como generadores o dinamos representaron el primer procedimiento para producir energía eléctrica a gran escala. Su etapa de desarrollo abarca el período comprendido entre los años 1830 y 1880. Es necesario hacer notar que la dinamo, aunque es una invención más moderna que el alternador, fue desarrollada antes que éste; téngase en cuenta que la pila de Volta data del año 1800 y que los descubrimientos de Oersted (electromagnetismo) y Faraday (inducción magnética) son de los años 1820 y 1830, respectivamente. Es lógico, en consecuencia, que la etapa experimental de desarrollo de la dinamo, que comienza en 1830, tienda a buscar un tipo de generador que suministre una forma de corriente similar a la que producían las pilas galvánicas. En aquella época, la corriente alterna, *consecuencia inmediata* de la ley de inducción de Faraday, constituía solamente un experimento físico sin ningún interés práctico.

El desarrollo de la máquina de c.c. se centra durante mucho tiempo en la búsqueda de procedimientos que transforman la c.a. inducida en una espira, al girar dentro de un campo magnético, en corriente unidireccional o de polaridad constante (c.c.). La primera idea del conmutador o colector de delgas encargado de la *rectificación mecánica* de la tensión del devanado del rotor surge en 1831 y se debe a Pixii. Sin embargo, tuvieron que transcurrir 36 años más para que Gramme construyera en 1867 una dinamo con inducido en anillo dotada de un colector de delgas como el que actualmente se conoce. Posteriormente surgió la idea del devanado en tambor para aprovechar más eficazmente el arrollamiento del inducido y se propusieron los diferentes métodos de autoexcitación de estas máquinas, de tal forma que en 1886 se llegó a una configuración física, cuyos rasgos fundamentales coinciden con los de las máquinas modernas. El desarrollo de los motores de c.c. sigue una línea histórica paralela a la de las dinamos y su empleo se debe al principio de reciprocidad ya formulado por Faraday y Lenz.

El modo de funcionamiento más característico de las máquinas de c.c. lo constituye su empleo como motor. La ventaja fundamental de los motores de c.c. frente a los motores de c.a. ha sido su mayor grado de flexibilidad para el control de la velocidad y del par, lo cual ha hecho muy interesante su aplicación en diversos accionamientos industriales: trenes de laminación, telares, tracción eléctrica, etc. Sin embargo, debe destacarse que debido al desarrollo tan espectacular de la electrónica de potencia, su aplicación incluso en estos campos, en los que mantenía su primacía hasta finales del siglo XX, se ha ido reduciendo en pro de los motores de c.a., cuyo coste de fabricación y mantenimiento es más reducido. En el Capítulo 7,

dedicado a los accionamientos eléctricos, se explican los métodos de control moderno de ambos tipos de motores. Por otro lado, el empleo de la máquina de c.c. como generador o dinamo está prácticamente obsoleto debido a que la corriente alterna presenta más ventajas para la generación, transporte y distribución de la energía eléctrica que la corriente continua, debido a la sencillez y economía que supone el uso de transformadores para convertir tensiones de un valor a otro. En la actualidad, cuando se necesita c.c. para una aplicación determinada se recurre al empleo de rectificadores de silicio, que transforman la c.a. de la red en c.c. de forma estática y con un gran rendimiento.

El capítulo comienza describiendo los aspectos constructivos de las máquinas de c.c., señalando la forma que tienen los polos principales y los auxiliares y la disposición del colector de delgas o conmutador. Se definen los dos tipos principales de devanados de inducido: imbricados y ondulados, que incluyen su topología geométrica a lo largo de la periferia del rotor y el modo en que se realizan las conexiones al colector de delgas. A continuación se estudia el principio de funcionamiento de las máquinas de c.c. y se determina la ecuación de la f.e.m. generada cuando funciona como generador o dinamo y el par electromagnético desarrollado cuando trabaja como motor. Después se explica con detalle la reacción del inducido en estas máquinas y la deformación del campo magnético que se tiene en el entrehierro, lo que obliga en principio a mover las escobillas de la línea neutra ideal para evitar chisporroteos en el conmutador. Este desplazamiento va acompañado de una reacción de la f.m.m. del inducido que tiene dos componentes: la antagonista y la transversal. Se calculan los valores correspondientes y la forma de compensarlas empleando devanados de compensación y polos auxiliares. A continuación se analiza el fenómeno de conmutación explicando la forma de la variación de la corriente que se tiene en las bobinas del inducido durante esta operación y el retardo real que se produce debido a la f.e.m. de autoinducción de la sección considerada. Sigue el capítulo estudiando los aspectos generales de funcionamiento de los generadores de c.c, relacionando la f.e.m. generada con la tensión en los terminales de la máquina y las principales caídas de tensión que deben considerarse. Se definen después las máquinas con excitación independiente y las autoexcitadas: serie, derivación y compuestas y se analizan las características de servicio de estos tipos de generadores mostrando la evolución de la tensión en función de la corriente de la carga. En el caso específico de la dinamo derivación se presta especial atención a la explicación del fenómeno de autoexcitación para conseguir el cebado de la dinamo. El capítulo continúa con la explicación del paso de funcionamiento del generador a motor de c.c. demostrando las expresiones del par electromagnético generado y los sentidos de las corrientes en los devanados para este régimen de funcionamiento. Se explica después la misión del reóstato de arranque de los motores de c.c. y se describe cómo se realiza la regulación de velocidad de los motores mediante la variación de la tensión aplicada al inducido, la variación de la resistencia en serie con el inducido y la variación de la corriente de excitación. Se describe el sistema de regulación Ward-Leonard para un motor con excitación independiente y a continuación se comentan los procedimientos de regulación de los motores de c.c. con excitación serie y compuesta. Continúa la lección con la explicación de los métodos de frenado de estos motores y el funcionamiento de una máquina de c.c. en los cuatro cuadrantes. Se incluye después una pregunta referente al funcionamiento de un motor de c.a. con colector de delgas, que en algunos casos todavía se utilizan en algunos países en la tracción eléctrica y sobre todo como motores fraccionarios (de potencia inferior a 1 kW) en aplicaciones domésticas. El capítulo finaliza con la descripción del motor de c.c. sin escobillas (*brushless motor*) que encuentra su aplicación en micromotores para discos duros de ordenadores y en servomotores de acccionamiento, activados por interruptores electrónicos.

6.2. ASPECTOS CONSTRUCTIVOS

La máquina de c.c. está constituida por una parte fija o estátor y una parte móvil o rotor. En la Figura 6.1 se muestra un esquema básico de la forma física que presenta este tipo de máquinas. El estátor está formado por la culata (1), que pertenece al circuito magnético inductor y que ejerce la función de soporte mecánico del conjunto. En las máquinas de pequeña potencia se construye de hierro fundido pero en las máquinas grandes se realiza con plancha de acero curvada sobre un molde cilíndrico y posteriormente soldada en su base. La culata o carcasa contiene también los pies (13) sobre los que se apoyará la máquina.

La culata está perforada en diversos puntos de su periferia para fijar los polos, los cuales están constituidos por los núcleos polares (2), modernamente realizados en chapas de acero convenientemente apiladas sobre las que se coloca el devanado inductor o de excitación (8). La parte de los polos próxima al rotor presenta una expansión magnética denominada zapata polar (3). Para mejorar la conmutación, estas máquinas suelen llevar también unos polos intermedios (4) y (5), que reciben también el nombre de interpolos, **polos auxiliares** o polos de conmutación; el devanado de estos polos se conecta en serie con el inducido.

El rotor está formado por el **inducido** (6) y el **colector de delgas** o conmutador (10). El inducido se construye con discos de chapa de acero al silicio convenientemente ranurado para alojar en él el correspondiente devanado. En la Figura 6.1 el arrollamiento del inducido (7) es del tipo en anillo, que hoy día ya no se emplea por el poco aprovechamiento que se obtiene del cobre. El devanado en anillo fue el primero que se utilizó en la célebre dinamo de Gramme y tiene la ventaja pedagógica de poder comprender más claramente el funcionamiento de estas máquinas debido a la facilidad con que pueden observarse sus circuitos. En la actualidad, y como ya se indicó en el Capítulo 2, los arrollamientos son en tambor, disponiendo ambos *lados activos* de las espiras en las generatrices externas del apilamiento del rotor. Los devanados de las máquinas de c.c. son cerrados, lo cual indica que el bobinado se cierra sobre sí mismo sin principio ni fin. Los devanados pueden ser **imbricados** y **ondulados**, dependiendo de si se cruzan o no las partes de la bobina observadas desde el lado del colector. En la

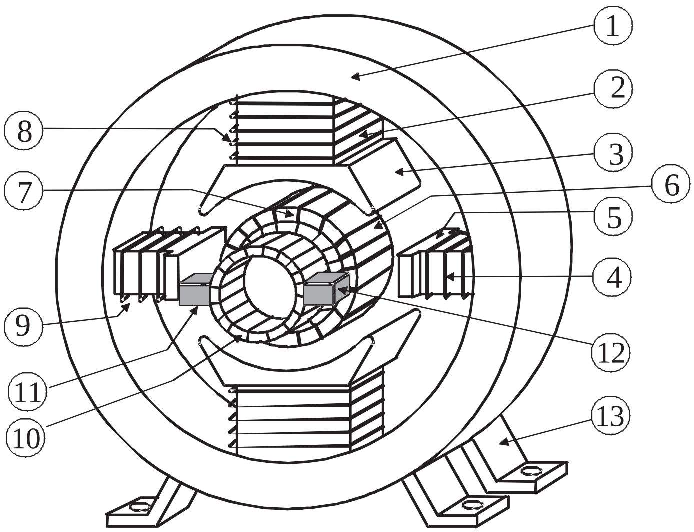


Figura 6.1. Aspectos constructivos de una máquina de c.c.

Figura 6.2 se muestran ambos tipos de devanados dibujados en perspectiva y en forma desarrollada en inducidos de tambor.

Se observa en ambos casos que las bobinas que forman los devanados (imbricado u ondulado) constan de dos lados activos que se sitúan debajo de polos de diferente nombre con objeto de obtener la mayor f.e.m. posible.

El colector de delgas es el órgano que caracteriza específicamente a estas máquinas* y es el encargado de la conversión mecánica de la c.a. inducida en las bobinas en c.c. de salida. Está formado por láminas de cobre o delgas cuya sección transversal tiene la forma de cola de milano, como puede observarse en la Figura 6.3. Las delgas están aisladas entre sí y del cubo del colector por medio de un dieléctrico de mica.

La fijación del conjunto se consigue merced a la presión que ejercen unos anillos extremos de forma cónica. Para facilitar la soldadura de las conexiones de las bobinas del inducido con el colector, las delgas presentan en un extremo un *talón* con unas hendiduras convenientemente fresadas para alojar los conductores terminales. Después de que se conecta el colector al inducido, se procede a la rectificación de aquél por medio del torno, hasta dejar su superficie perfectamente cilíndrica.

La extracción o suministro de corriente al colector se realiza por medio de escobillas de grafito, aunque modernamente se emplean los tipos electrografíticos y metalografíticos. Las escobillas permanecen inmóviles en el espacio, dispuestas en los portaescobillas, y de esta manera, mientras gira el rotor, las escobillas conservan una posición invariable con respecto a los polos de la máquina. La Figura 6.4 muestra la disposición típica de una escobilla alojada dentro del portaescobillas. La presión de la escobilla sobre el colector debe ser del orden de 10^4 a $1{,}5 \cdot 10^4$ N/m^2, lo que se consigue por la acción de un muelle en espiral cuya presión

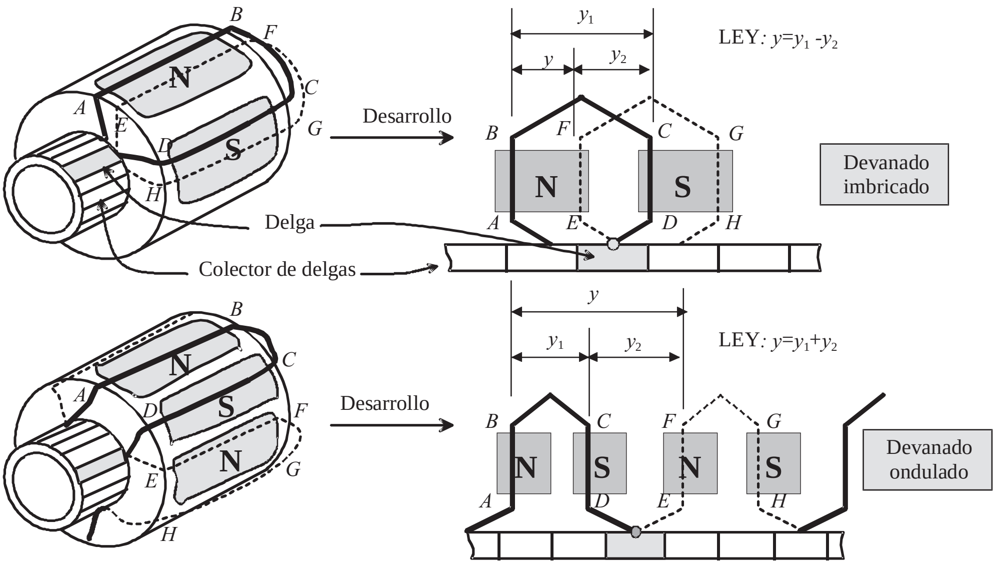


Figura 6.2. Devanados imbricado y ondulado.

* Se exceptúan las máquinas de c.a. con conmutador, que se estudian al final de este capítulo.

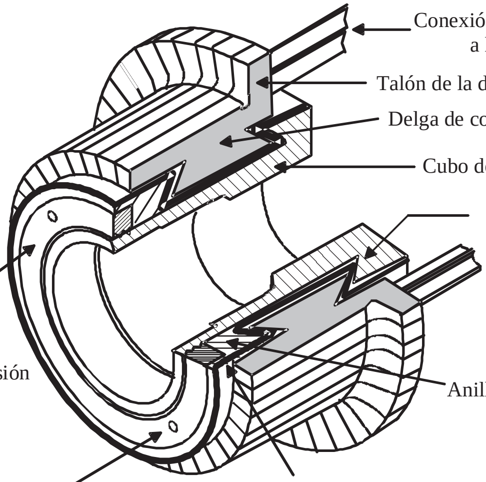


Figura 6.3. Sección de un colector de delgas.

se ajusta por medio de una palanca dispuesta al efecto. El portaescobillas suele ser de bronce o latón y está unido al collar o soporte por medio de un bulón convenientemente aislado. Las escobillas de la misma polaridad van juntas en paralelo al mismo terminal de salida para su conexión al exterior.

Para información del lector, en la Tabla 6.1 se da una relación de las características más importantes de motores de c.c. para potencias comprendidas entre 18 y 257 kW con una tensión de servicio de 440 V.

De acuerdo con la Norma UNE-EN 60034-8, los bornes de las máquinas de c.c. se designan con diferentes letras según se trate del inducido o de los devanados inductores, de acuerdo con la relación que se señala a continuación. *Inducido: letras A1 y A2; polos auxiliares o de compensación: letras B1 y B2; devanado de compensación: letras C1 y C2; devanado inductor en serie: letras D1 y D2; devanado inductor en paralelo o independiente: letras E1 y E2. La red se identifica con las letras P para el terminal positivo y la N para el terminal negativo.*

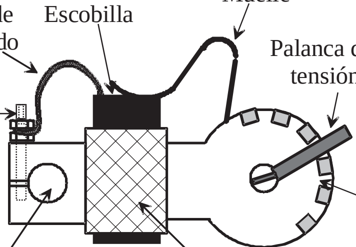


Figura 6.4. Escobilla, portaescobilla y muelle de ajuste de la presión de contacto.

Tabla 6.1. Características de motores de c.c.

CARACTERÍSTICAS DE MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA REFRIGERADOS POR SUPERFICIE Velocidad: 1.500 r.p.m. Tensión de inducido: 440 V. Servicio: S1. Aislamiento clase F. Protección IP44						
Potencia (kW)	*Rendimiento %*	*Intensidad de inducido (A)*	*Potencia de excitación (W)*	*Inductancia de inducido (mH)*	*M.d.i. (kg · m²)*	*Peso (kg)*
18	91	45	240	8,5	0,83	510
23	91	57	260	7,3	0,94	560
28	92	69	290	5,4	1,51	650
35	92	86	320	4,6	1,71	705
46	92,5	113	370	3,6	2,08	840
58	92,5	142	420	3	2,47	910
70	93	171	480	2,4	4,87	1.275
87	93	213	530	2,1	5,41	1.350
100	93,5	243	570	1,8	8,19	1.550
123	93,5	299	640	1,6	9,25	1.650
152	94	367	720	1,2	13,54	2.050
176	94	426	790	1,1	15,54	2.380
215	95	514	860	1	23,32	3.100
257	95	615	920	0,8	27,29	3.280

6.3. PRINCIPIO DE FUNCIONAMIENTO

Como se ha indicado en los párrafos precedentes, la máquina de c.c. puede funcionar tanto en régimen generador como en régimen motor. Para comprender el principio de generación de la f.e.m. en las espiras del rotor, se va a considerar el inducido en forma de anillo que se indica en la Figura 6.5. En este devanado, al girar el rotor, se induce una f.e.m. en los conductores dispuestos en la cara exterior del núcleo al ser cortados por el flujo del estátor. En los conductores interiores no aparece ninguna f.e.m., ya que no les atraviesa el flujo de los polos, al estar sus líneas de fuerza limitadas al circuito de baja reluctancia del anillo.

Analizando la figura anterior se observa que el sentido de las f.e.m.s. de los conductores situados debajo del polo norte son de signo contrario a la de los conductores situados debajo del polo sur (el sentido de estas f.e.m.s. se obtiene aplicando la conocida expresión: $e = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L}$ a estos conductores). Como quiera que la estructura de la máquina es simétrica, las f.e.m.s. correspondientes a la parte izquierda del inducido serán opuestas a las de la parte derecha, y en consecuencia no circulará ninguna corriente por el arrollamiento.

Para utilizar la f.e.m. del inducido y llevarla a un circuito exterior se han de conectar unas escobillas de salida *A* y *B*, situadas en el eje transversal de los polos para que puedan aprovechar la máxima f.e.m. del devanado. Estas escobillas dividen el arrollamiento en dos ramas en paralelo con una misma f.e.m. En cada una de estas ramas, las f.e.m.s. deben tener el mismo sentido, pues de lo contrario no se utilizarían totalmente las f.e.m.s. generadas en el arrollamiento (como caso límite, si las escobillas se disponen bajo los centros de los polos, la tensión

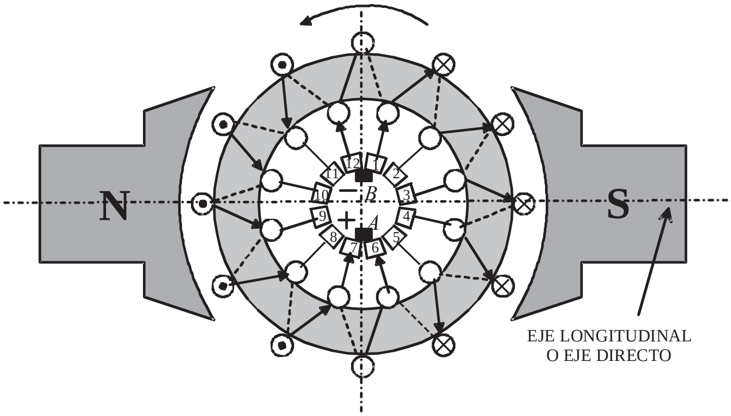


Figura 6.5. Máquina de c.c. con inducido en anillo (tipo máquina de Gramme).

entre ellos sería nula). El eje que forma la alineación de las escobillas se denomina **línea neutra**. Esta línea tiene gran importancia, pues indica las posiciones en las que se produce la inversión de f.e.m. en las bobinas del inducido pasando las espiras correspondientes de una rama paralelo a la otra.

Nota práctica: La posición exacta de la línea neutra se determina experimentalmente moviendo el collar de las escobillas hasta encontrar el punto en el que se producen las mínimas chispas en el colector de delgas.

En los inducidos en anillo y también en los que llevan un devanado imbricado simple el número de circuitos derivados coincide con el de polos. Si se denomina $2p$ el número de polos y $2c$ el número de circuitos derivados o ramas en paralelo, se tendrá:

IMBRICADO SIMPLE $$2c = 2p \tag{6.1}$$

En los devanados ondulados simples, el número de circuitos derivados es siempre igual a 2, sea cual sea el número de polos de la máquina, es decir:

ONDULADO SIMPLE $$2c = 2 \tag{6.2}$$

Existen también devanados imbricados múltiples y ondulados en series paralelas (de Arnold) en los que el número de circuitos derivados sigue leyes diferentes a las anteriores, pero que no se considerarán en este texto.

Para calcular la f.e.m. producida en el inducido de una máquina de c.c. debe tenerse en cuenta que en cada bobina del arrollamiento se obtiene una f.e.m. alterna, de tal forma que en un semiperíodo de la misma el flujo concatenado varía entre los límites $+\Phi$ y $-\Phi$ (flujo de los polos); en consecuencia, el valor medio de la f.e.m. obtenida en la bobina en el tiempo mencionado será:

$$E_{med} = -\frac{2}{T}\int_{-\Phi}^{+\Phi} d\Phi = \frac{4\Phi}{T} \tag{6.3}$$

donde T indica el período de la corriente. Como quiera que la frecuencia de la tensión generada va ligada al número de polos $2p$ y a la velocidad de rotación n en r.p.m. por la relación:

$$f = \frac{np}{60} \tag{6.4}$$

la f.e.m. media en una espira del inducido será:

$$E_{med} = 4\Phi \frac{pn}{60} \tag{6.5}$$

Como quiera que las escobillas de la máquina recogen las f.e.m.s. inducidas en las distintas bobinas durante un semiperíodo, la f.e.m. resultante en el inducido será igual a la suma de las f.e.m.s. medias de las distintas bobinas que componen cada rama en paralelo del devanado. Si éste consta de Z conductores que forman $Z/2$ bobinas y está dividido por las escobillas en $2c$ circuitos derivados, se tendrán en cada rama $Z/4c$ bobinas conectadas en serie, que teniendo en cuenta la relación (6.5) producirán una f.e.m. resultante de magnitud:

$$E = \frac{n}{60} Z\Phi \frac{P}{c} = K_E n\Phi \tag{6.6}$$

en la cual $K_E = \dfrac{Z}{60}\dfrac{p}{c}$ es una constante determinada para cada máquina. De esta expresión se deduce que la f.e.m. puede regularse variando la velocidad del rotor o cambiando el flujo inductor mediante el ajuste de la corriente de excitación de los polos.

En los generadores o dinamos esta f.e.m. se obtiene como consecuencia del movimiento del rotor por la acción de una energía mecánica de entrada y puede aprovecharse en un circuito exterior conectando una carga eléctrica que hará circular corriente por el inducido. En los motores, el giro de la máquina es el resultado de la interacción del flujo del inductor con las corrientes del inducido al conectar éste a una red de c.c., lo que provoca una f.e.m. de reacción en el rotor que se opone al sentido de la corriente y que recibe por ello el nombre de **fuerza contraelectromotriz** (f.c.e.m.).

En cualquier caso, funcione la máquina de c.c. como generador o como motor, el paso de una corriente continua por los conductores del inducido provoca en el rotor un par electromagnético que tiene carácter resistente para el trabajo como generador y carácter motor cuando la máquina mueve una carga mecánica (es decir, cuando funciona como motor de c.c.). Para calcular la magnitud de este par debe tenerse en cuenta que si es I_i la corriente total del inducido, la corriente que circula por los conductores del rotor en una máquina con $2c$ circuitos derivados será $I_i/2c$. Si denominamos B_{med} el valor medio de la inducción de los polos en los conductores del inducido y L a la longitud de los mismos, la fuerza media resultante en cada conductor, de acuerdo con la ley de Laplace, será:

$$F_{med} = B_{med} L \frac{I_i}{2c} \tag{6.7}$$

y que tiene sentido tangencial al rotor. Si se denomina R al radio del rotor y Z al número de conductores del inducido, se obtendrá un par resultante de magnitud:

$$T = RF_{med} Z = RB_{med} L \frac{I_i}{2c} Z \tag{6.8}$$

Como quiera que la superficie del inducido comprendida en el paso polar de la máquina es igual a:

$$S_i = \frac{2\pi RL}{2p}$$

el valor del flujo por polo será:

$$\Phi = B_{med}\frac{2\pi RL}{2p} \tag{6.9}$$

expresión que llevada a (6.8) determina el par de la máquina en función del flujo por polo:

$$T = \frac{1}{2\pi}\frac{p}{c}Z\Phi I_i = K_T I_i \Phi \qquad (6.10)^*$$

donde $K_T = \frac{Z}{2\pi}\frac{p}{c}$ es una constante determinada para cada máquina.

Si se tiene en cuenta (6.6), la ecuación anterior puede expresarse en función de la f.e.m. del inducido, resultando:

$$T = \frac{EI_i}{2\pi\frac{n}{60}} \qquad [\text{N.m.}] \tag{6.11a}$$

Este par será resistente en el caso de transformación de energía mecánica en eléctrica, es decir, en un generador, y de rotación en el caso de un motor, es decir, cuando se transforma energía eléctrica en mecánica. En cualquier caso, el numerador de (6.11*a*) representa la potencia electromagnética que se aplica a la máquina (en régimen generador) o que se extrae de ella (régimen motor), y que es en definitiva el producto del par T por la velocidad angular mecánica Ω, es decir:

$$P_a = EI_i = T\Omega = T\cdot 2\pi\frac{n}{60} \qquad [\text{W}] \tag{6.11b}$$

Para comprender mejor el fenómeno de producción de par en las máquinas de c.c., en la Figura 6.6 se ha representado una máquina de c.c. funcionando como generador. La máquina es movida por medio de un motor primario en sentido contrario a las agujas del reloj, y se producen entonces unas f.e.m.s. en los conductores cuyos sentidos se muestran en la misma figura. Al conectar una resistencia de carga entre las escobillas aparecen unas corrientes de circulación en los conductores del inducido, que al reaccionar con el campo magnético induc-

---

* Es interesante observar al comparar (6.10) con (6.6) que la relación entre las constantes K_T y K_E es:

$$K_E = \frac{2\pi}{60}K_T$$

De hecho, si se expresa (6.6) en función de la velocidad angular Ω (en rad/s) resulta:

$$E = \frac{Z}{2\pi}\frac{p}{c}\frac{2\pi n}{60}\Phi = K_T\Omega\Phi,$$

que utiliza la misma K_T que la ecuación del par (6.10): $T = K_T I_i \Phi$.

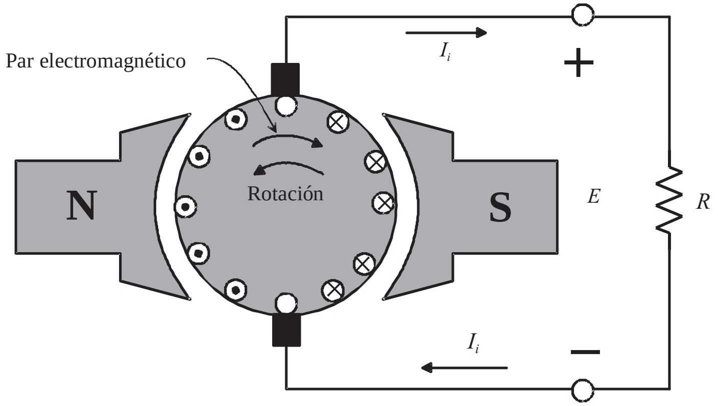


Figura 6.6. Máquina de c.c. funcionando como generador.

tor provocan un par electromagnético que se opone a la rotación y que, por tanto, tiene carácter resistente respecto a la acción del motor primario. Para mantener la velocidad de la dinamo, el par del motor primario ha de ser suficiente para equilibrar este par resistente, junto con el par de pérdidas, debido a los efectos de rozamiento, ventilación, etc.

Cuando la máquina de c.c. funciona como motor, se debe aplicar una tensión de c.c. de alimentación al inducido, que provoca una corriente de circulación por los conductores de este devanado, cuyos sentidos se muestran en el esquema de la Figura 6.7. La interacción de estas corrientes con el flujo inductor origina un par de rotación en sentido contrario a las agujas del reloj que obliga a girar a la máquina. Esto conduce a la aparición de una f.e.m. en el inducido cuyo sentido es idéntico al estudiado para el caso de la dinamo, puesto que la rotación en ambos casos es coincidente.

En consecuencia, la f.e.m. engendrada se opone a la corriente que circula por los conductores y por ello recibe el nombre de *fuerza contraelectromotriz.* El movimiento del motor se mantendrá en tanto que el par electromagnético de rotación producido sea superior al par resistente ejercido por la carga mecánica conectada al árbol de la máquina.

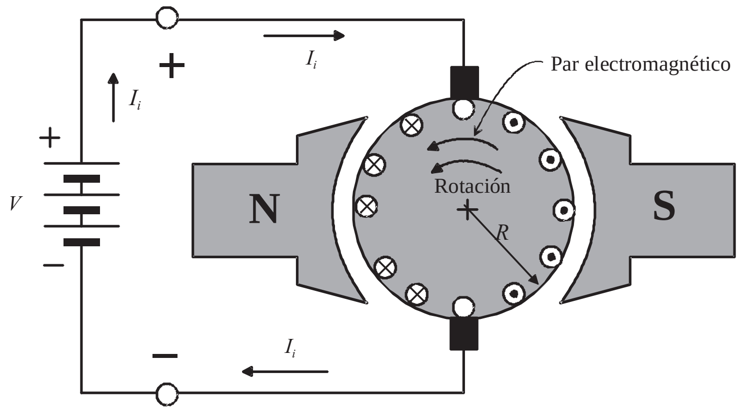


Figura 6.7. Máquina de c.c. funcionando como motor.

Ejemplo de aplicación 6.1

Una máquina de c.c. de 8 polos tiene un inducido bobinado con un arrollamiento imbricado de 960 conductores. El flujo por polo es de 40 mWb y la velocidad de rotación es de 400 r.p.m. Calcular: a) f.e.m. generada; b) si el arrollamiento fuera ondulado, ¿a qué velocidad debería girar el rotor para obtener una f.e.m. igual a 400 V?; c) ¿cuál sería el par electromagnético desarrollado por la máquina en el caso anterior para una corriente del inducido de 25 A?

Solución

a) En el caso de que el arrollamiento sea imbricado, el número de circuitos derivados coincide con el de polos. Al sustituir valores en la expresión (6.6) se obtiene:

$$E = \frac{400}{60} 960 \cdot 0{,}40 \frac{4}{4} = 256 \text{ V}$$

b) Cuando el arrollamiento es ondulado, el número de circuitos derivados es igual a 2, y al aplicar (6.6) resulta:

$$400 = \frac{n}{60} 960 \cdot 0{,}04 \frac{4}{1} = 2{,}56n$$

de donde se deduce que la velocidad de giro debe ser de 156,25 r.p.m.

c) De acuerdo con la expresión (6.10), se obtiene:

$$T = \frac{1}{2\pi} \frac{4}{1} 960 \cdot 0{,}04 \cdot 25 = 611{,}15 \text{ N.m}$$

6.4. REACCIÓN DE INDUCIDO

Cuando una máquina de c.c. funciona en vacío (trabajando, por ejemplo, como generador), no existe corriente en el inducido y el flujo en el entrehierro está producido únicamente por la f.m.m. del inductor. Cuando se cierra el circuito del inducido sobre una resistencia de carga aparece una corriente de circulación por los conductores del rotor que dan lugar a una f.m.m. que combinada con la del estátor producen el flujo resultante en el entrehierro de la máquina. Se conoce con el nombre de **reacción del inducido** al efecto que ejerce la f.m.m. de este devanado sobre la f.m.m. del inductor, y que hace variar la forma y magnitud del flujo en el entrehierro respecto a los valores que la máquina presentaba en vacío. Para estudiar el fenómeno de la reacción del inducido se va a considerar, por simplicidad, una máquina bipolar (Fig. 6.8) trabajando en la **zona no saturada** de su característica magnética*. De esta forma, podrá aplicarse el principio de superposición tanto a los diagramas de f.m.m. como a los que representan las distribuciones de flujo magnético en el entrehierro. Dicho de otra manera, en vez de combinar las f.m.m.s. del inductor y del inducido para obtener el flujo resultante, se obtendrá éste sumando las distribuciones del campo magnético que produce cada f.m.m. actuando independientemente.

Cuando la máquina trabaja en vacío, solamente actúa la excitación de los polos, de esta forma se obtiene una distribución de campo magnético en el entrehierro que es constante y

* Por razones de sencillez, en la Figura 6.8 se ha representado el inducido sin colector de delgas, con las escobillas apoyadas directamente sobre los conductores del rotor.

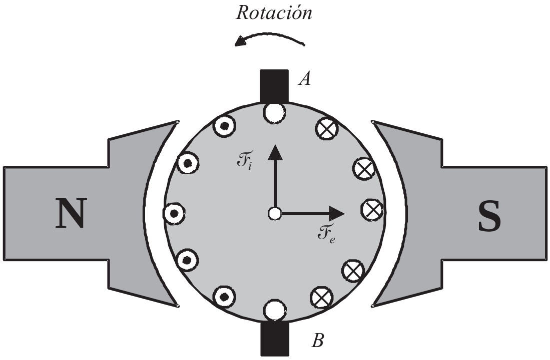


Figura 6.8. Reacción de inducido en una máquina de c.c.

máxima debajo de cada polo y que decrece rápidamente en el espacio interpolar hasta hacerse cero en la línea neutra. En la Figura 6.9 se muestra un esquema desarrollado de la máquina de la Figura 6.8 con la distribución de la inducción magnética correspondiente en vacío (sin corriente en el inducido). Teóricamente la curva anterior debiera tener una amplitud constante y de diferente signo debajo de cada polo y ser nula en el espacio interpolar, pero esto no es así debido a los flujos de dispersión que aparecen en los cuernos polares, que hacen que la forma de $B(\alpha)$ sea en la práctica de forma trapezoidal, tal como se muestra en la Figura 6.9. Al cerrar el circuito del inducido, se originan unas corrientes que producen una f.m.m. de forma triangular, como puede demostrarse analíticamente aplicando el teorema de Ampère a recintos cerrados cuya anchura sea igual a un paso polar (véase Cap. 2, problema 2.6 del final del capítulo). El eje de esta f.m.m. coincide con el de la línea de escobillas, de tal forma que si éstas se disponen en la línea neutra, la f.m.m. del inducido será máxima en esta línea interpolar; en consecuencia, la f.m.m. de reacción de inducido tiene carácter **transversal** respecto a la f.m.m. del inductor (véase Fig. 6.8).

En la Figura 6.10 se representa la distribución de la f.m.m. del inducido sobre la periferia del entrehierro. El esquema corresponde al desarrollo de la máquina bipolar de la Figura 6.8,

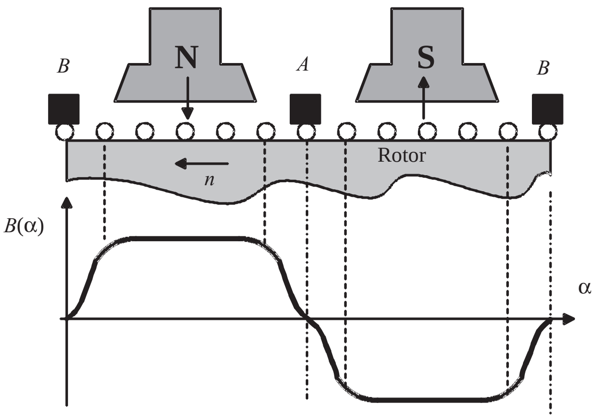


Figura 6.9. Distribución de la inducción magnética en el entrehierro producida por los polos.

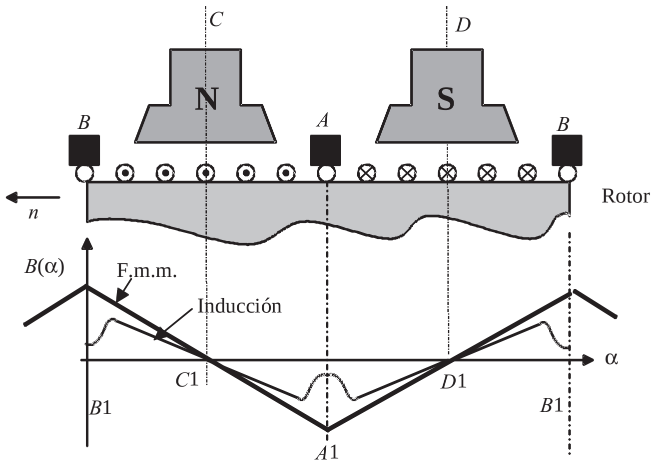


Figura 6.10. F.m.m. en el entrehierro e inducción producida por el inducido.

en la que ahora se muestran los polos a trazos para indicar que su acción no se tiene en cuenta. Esta distribución se puede intuir fácilmente observando que desde el punto de vista magnético se puede considerar que los conductores están conectados entre sí tal como se muestra con las líneas de trazos de la Figura 6.10. De esta manera los conductores situados entre los ejes verticales CC_1 y DD_1 actúan como si se tratara de bobinas concéntricas que producen una f.m.m. que tiene su máximo sobre el eje AA_1. De forma similar, las corrientes en los conductores situados a la izquierda de CC_1 y a la derecha de DD_1 producen una f.m.m. que tiene su máximo sobre el eje BB_1.

Con relación a esta distribución de f.m.m. se tendrá una correspondiente distribución radial de la inducción, cuyo diagrama se ha representado también en la Figura 6.10. Se observa que esta curva $B(\alpha)$ presenta unas depresiones en los espacios interpolares debido a que en estas zonas la reluctancia es mucho mayor que debajo de los polos por existir un entrehierro mayor.

Para considerar el efecto de la reacción del inducido sobre la distribución del flujo inductor, habrá que superponer las curvas de las Figuras 6.9 y 6.10, resultando el diagrama de la Figura 6.11. Examinando la inducción resultante en el entrehierro, se pueden deducir importantes consecuencias. En primer lugar, la reacción del inducido deforma la curva de inducción debajo de cada polo, reforzando el campo en un lado del polo y debilitándolo en el otro, es decir, se forma exactamente el mismo campo transversal del inducido que en el caso de la máquina síncrona con carga resistiva.

Si la máquina no está saturada, esta magnetización transversal no modifica su f.e.m., ya que el flujo se conserva constante; sin embargo, si existe saturación, la B resultante tiene un valor inferior al previsto en las salidas de los polos, lo que hace que el flujo total disminuya y aparezca un efecto desmagnetizante que reduce el valor de la f.e.m. de salida. Otro efecto a considerar en esta situación es la posible elevación de tensión entre delgas consecutivas motivada por el paso de las espiras correspondientes por la zona de refuerzo del flujo de los polos, lo que puede conducir a un chisporroteo en el colector.

Por último, otra consecuencia también importante que se deduce claramente de la Figura 6.11 es el desplazamiento que sufre la línea neutra debido a la reacción del inducido; cuando la máquina trabaja en vacío, la línea neutra magnética coincide con la línea neutra geométrica o línea media entre polos (punto N); sin embargo, cuando circula corriente por el

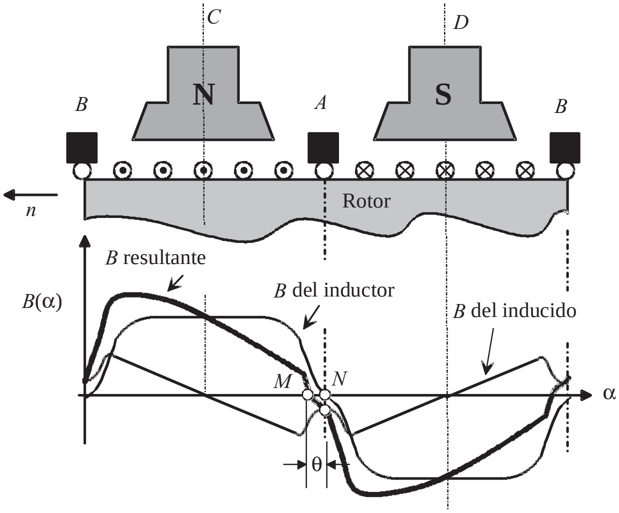


Figura 6.11. Deformación del campo magnético en el entrehierro debido a la reacción del inducido.

inducido y estando funcionando la máquina como generador (caso de la Fig. 6.11), la línea neutra magnética se **adelanta** un ángulo θ (punto *M*) respecto del sentido de giro del rotor. En el caso del funcionamiento como **motor**, un razonamiento análogo indicaría que la línea neutra magnética se **retrasa** respecto a la geométrica. Este desplazamiento de la línea neutra magnética lleva consigo un fuerte chisporroteo en el colector, ya que durante la conmutación, la escobilla correspondiente pondrá en cortocircuito una sección del devanado en la cual se induce una cierta f.e.m. por existir flujo en esa zona. Para evitar este fenómeno habrá que desplazar las escobillas hasta encontrar la línea neutra real, es decir, en el esquema de la Figura 6.11 habrá que pasar la escobilla de la posición *N* a la *M* (**adelantando las escobillas cuando la máquina funciona como generador y retrasándolas cuando trabaja como motor**). En la Figura 6.12 se muestra más claramente esta operación.

Hay que hacer notar que todos los conductores que se encuentran a la izquierda del eje de escobillas *CD* llevan corriente saliente al plano de la página, mientras que todos los situados a

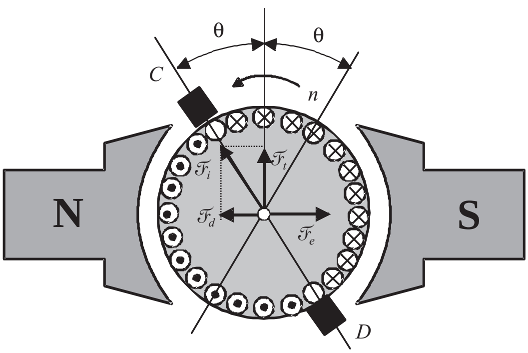


Figura 6.12. Desplazamiento de las escobillas hasta la línea neutra real.

su derecha llevan corriente entrante. De esta forma, y como se ha indicado en los párrafos anteriores, se producirá una f.m.m. de reacción de inducido $\mathcal{F}_i$ que coincide con el eje de escobillas, que puede descomponerse en dos partes: una longitudinal o de eje directo $\mathcal{F}_d$ que tiene carácter desmagnetizante o antagonista, pues se opone a la f.m.m. de excitación $\mathcal{F}_e$, y que puede considerarse que está producida por los conductores comprendidos en el ángulo 2θ (grados eléctricos), como se muestra en la Figura 6.13*a*, y otra componente transversal $\mathcal{F}_t$ producida por los demás conductores agrupados, como se indica en la Figura 6.13*b*, abarcando (180°-2θ) grados eléctricos.

Para calcular la magnitud de ambas f.m.m.s. se va a considerar un inducido de Z conductores distribuidos en $2c$ circuitos derivados que transportan una corriente total I_i, teniendo la máquina $2p$ polos. En estas circunstancia se tiene:

$$\text{Corriente/conductor} = \frac{I_i}{2c}$$

$$\text{Conductores/polo} = \frac{Z}{2p}$$

$$\text{Amperio-conductores/polo} = \frac{I_i}{2c}\frac{Z}{2p} \tag{6.12}$$

Y como hacen falta dos conductores del inducido para formar una espira, el número de amperivueltas por polo será:

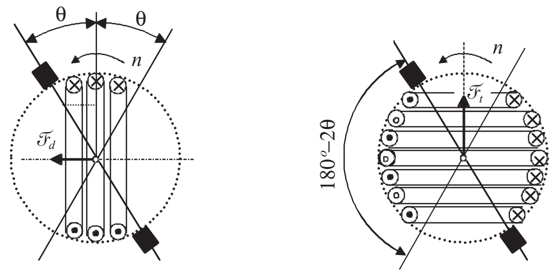
$$\text{Amperivueltas/polo} = \frac{1}{2}\frac{I_i}{2c}\frac{Z}{2p} = \frac{I_i Z}{8pc} \tag{6.13}$$

Como cada polo ocupa una extensión de 180° y hay solo 2θ grados eléctricos ocupados por conductores responsables de la reacción desmagnetizante, la magnitud de la f.m.m. $\mathcal{F}_d$ correspondiente será:

$$\mathcal{F}_d = \frac{I_i Z}{8pc}\frac{2\theta}{180°} \qquad [\text{A.v/polo}] \tag{6.14}$$

De forma análoga, la f.m.m. transversal está producida por los conductores comprendidos en un ángulo 180º-2θ, resultando un valor de $\mathcal{F}_t$:

$$\mathcal{F}_t = \frac{I_i Z}{8pc}\frac{180°-2\theta}{180°} = \frac{I_i Z}{8pc}\left(1 - \frac{2\theta}{180°}\right) \tag{6.15}$$



a) Antagonista *b*) Transversal

Figura 6.13. F.m.m.s. antagonista y transversal.

En resumen, y concretando los párrafos anteriores, se puede decir que:

a) *Cuando las escobillas están situadas en la línea neutra geométrica, la reacción del inducido es totalmente transversal y su f.m.m. viene expresada por la relación (6.13), lo que conduce a un desplazamiento de la línea neutra magnética que provoca un chispeo en el colector.*

b) *Si se desplazan las escobillas a la línea neutra magnética verdadera, se evita el chisporroteo del colector pero aparece una reacción antagonista, definida por (6.14), que se opone a la acción del inductor y que debe ser compensada por un aumento idéntico en la f.m.m. de los polos.*

Como quiera que la reacción del inducido es proporcional a la corriente de carga, el desplazamiento de las escobillas debería ser variable con el régimen de carga de la máquina. Esto supondría una operación de gran complejidad que los constructores han intentado evitar. Por ello, en la práctica, en las máquinas de mediana y gran potencia se impide el desplazamiento de la línea neutra atenuando el efecto de la reacción transversal. La solución más eficaz consiste en neutralizar la reacción del inducido a lo largo de toda la periferia de éste, mediante la incorporación de un arrollamiento de **compensación**. Para ello, en las extremidades polares se practican paralelamente al eje de la máquina unas ranuras en las cuales se colocan unos conductores dispuestos en serie con el circuito exterior, de tal forma que la corriente circule en ellos en sentido opuesto a la de los conductores del inducido que están debajo. En la Figura 6.14 se muestra un esquema de este tipo que contiene cuatro conductores por polo, que casi compensan el efecto de reacción transversal del inducido.

En el caso ideal habrá que incorporar en el devanado de compensación tantos conductores como existan en el inducido y de esta forma la reacción transversal total de la máquina será nula y no habrá desplazamiento de la línea neutra. Como quiera que estos arrollamientos elevan considerablemente el costo de una máquina, aumentando también las pérdidas en el cobre, solamente se emplean en las máquinas de potencia elevada que tengan que soportar fluctuaciones bruscas de carga.

En la mayoría de las máquinas de c.c., para eliminar el desplazamiento de la línea neutra geométrica con las variaciones de carga y asegurar una mejor conmutación, se emplean los llamados *polos auxiliares, interpolos o polos de conmutación,* que son pequeños núcleos magnéticos que se colocan en la línea neutra teórica, que van provistos de un devanado que se conecta en serie con el inducido, y que producen un campo magnético opuesto al de la reac-

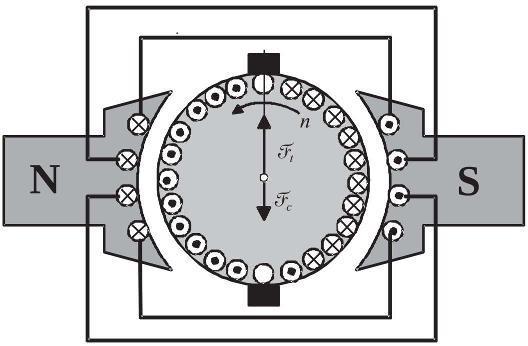
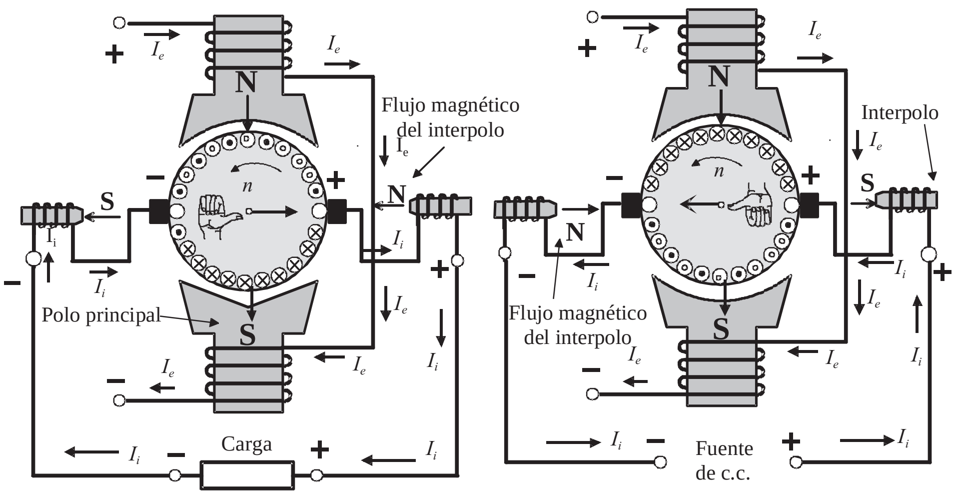


Figura 6.14. Devanado de compensación.

ción transversal. En la Figura 6.15 se muestra una máquina bipolar que lleva colocados los interpolos correspondientes. En el caso *a*) la máquina funciona como generador y en el caso *b*) la máquina funciona como motor. En ambas situaciones se ha mantenido el mismo sentido de giro del rotor (contrario a las agujas del reloj) y la misma polaridad de los polos principales; sin embargo, *el sentido de la corriente en el inducido en ambas figuras es opuesto*.

Si se considera el comportamiento como generador (Fig. 6.15*a*), el sentido de giro lo impone el motor primario externo que mueve el rotor; las corrientes en el inducido se determinan con la ley de Faraday: $e = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{l}$ (que corresponde a un sentido de la corriente definido por la regla de Fleming de la mano derecha), que da lugar a corrientes salientes al plano de la página en los conductores situados en la semicircunferencia superior y corrientes entrantes en los conductores situados en la semicircunferencia inferior. Es por ello que la f.m.m. de reacción de inducido es transversal y se dirige de izquierda a derecha. Como quiera que los interpolos deben producir f.m.m.s. de sentido contrario al anterior, el sentido de las corrientes en estos polos auxiliares (y en este caso de funcionamiento como generador) debe ser el señalado en la Figura 6.15*a*. Obsérvese que en el funcionamiento como generador *la polaridad magnética de un interpolo es la misma que la del polo principal que* ***le precede*** *en el sentido de rotación de la máquina* (Fig. 6.15*a*).

Si se considera el comportamiento como motor (Fig. 6.15*b*), el sentido de giro es debido a la reacción de las corrientes del inducido con el flujo inductor de los polos y que viene expresado por la ley de Laplace: $\mathbf{F} = i\,(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ (que corresponde a un sentido de la fuerza en los conductores definido por la regla de Fleming de la mano izquierda); como quiera que se ha invertido la corriente en el inducido respecto a la que llevaba la máquina cuando funcionaba como generador (comparar Figs. 6.15*a* y *b*), el sentido de giro del rotor es el mismo en ambos casos. De este modo en el comportamiento como motor (Fig. 6.15*b*) la f.m.m. de reacción de inducido es transversal y dirigida de derecha a izquierda. Como quiera que los interpolos deben producir f.m.m.s. de sentido contrario al anterior, el sentido de las corrientes en estos polos auxiliares (en el caso de funcionamiento como motor) debe ser el señalado en



a) Generador *b*) Motor

Figura 6.15. Máquina de c.c. con polos auxiliares o de conmutación.

la Figura 6.15*b*. Obsérvese que en el funcionamiento como motor *la polaridad magnética de un interpolo es la misma que la del polo principal que* ***le sigue*** *en el sentido de rotación de la máquina* (Fig. 6.15*b*).

Debe tenerse en cuenta que, como ya se ha indicado antes, los interpolos deben ir en serie con el inducido para que su acción sea proporcional a la corriente I_i y compensar de este modo la reacción transversal del inducido; además, para que el flujo producido por los interpolos guarde la proporcionalidad con la corriente es preciso que el circuito magnético trabaje en la zona lineal, lo que requiere un mayor entrehierro interpolo-inducido que el de los polos principales. Por otra parte, hay que señalar también, y como ya se indicará en el epígrafe 6.5, que la misión de los polos auxiliares es también otra, como es producir una inducción adicional en la línea neutra para que se genere una f.e.m. de conmutación que evite el chisporroteo en el colector de delgas.

Ejemplo de aplicación 6.2

Determinar el número por polo de: a) amperivueltas transversales; b) amperivueltas antagonistas o de desmagnetización, y c) las espiras en serie para equilibrar los amperivueltas antagonistas en el caso de una dinamo de 500 conductores, 6 polos, devanado ondulado, que lleva una corriente total de inducido de 200 A. El ángulo geométrico de adelanto de escobillas es de 10° y el coeficiente de dispersión o de Hopkinson es igual a 1,3. NOTA: El coeficiente de Hopkinson define la relación entre el flujo que produce un polo y el flujo que llega al inducido.

Solución

Como la máquina tiene 6 polos, el ángulo eléctrico de adelanto de escobillas valdrá:

$$\theta = p\alpha = 3 \cdot 10 = 30°$$

a) La expresión (6.15) da la magnitud de la f.m.m. de reacción transversal, y teniendo en cuenta que para un devanado ondulado se tiene $2c = 2$, resulta:

$$\mathscr{F}_t = \frac{I_i Z}{8pc}\left(1 - \frac{20}{180°}\right) = \frac{200 \cdot 500}{8 \cdot 3 \cdot 1}\left(1 - \frac{2 \cdot 30°}{180°}\right) = 2.778 \quad \text{A.v/polo}$$

b) Para calcular la f.m.m desmagnetizante habrá que aplicar la expresión (6.14) :

$$\mathscr{F}_d = \frac{I_i Z}{8pc}\frac{20}{180°} = \frac{200 \cdot 500}{8 \cdot 3 \cdot 1}\frac{2 \cdot 30°}{180°} = 1.389 \quad \text{A.v/polo}$$

c) Los amperivueltas por polo que habrá que añadir al inductor para compensar la f.m.m. antagonista, teniendo en cuenta el coeficiente de dispersión, serán:

$$\mathscr{F}_d = 1.389 \cdot 1{,}3 = 1.805 \text{ A.v/polo}$$

Como las espiras necesarias se van a colocar en serie con el inducido, habrá que poner en cada polo:

$$N = \frac{\mathscr{F}_d}{I} = \frac{1.805}{200} = 9 \text{ espiras}$$

6.5. CONMUTACIÓN

Se entiende por conmutación el conjunto de fenómenos vinculados con la variación de corriente en las espiras del inducido al pasar éstas por la zona donde se las cierra en cortocircuito por las escobillas colocadas en el colector. Una buena conmutación debe realizarse sin la formación de chispas en el colector, mientras que una mala conmutación, concurrente con la formación de chispas, produce, para un trabajo prolongado de la máquina, un deterioro notable de la superficie del colector que perturba el buen funcionamiento de la máquina.

El chisporroteo entre las escobillas y el colector obedece a causas mecánicas y eléctricas. Entre las primeras figuran: defectuoso ajuste de las escobillas con el colector, resalte de algunas delgas, insuficiente equilibrado del rotor, etc.; todos estos factores empeoran el contacto entre las escobillas y el colector. La causa eléctrica fundamental del chisporroteo la constituye la elevación de la tensión entre delgas adyacentes del colector, que, en especial, puede ser provocada por los fenómenos de autoinducción de las secciones del arrollamiento del inducido.

Debido a la gran cantidad de factores que intervienen en el proceso de la conmutación, resulta muy difícil hacer un análisis riguroso y matemático del mismo, y por ello nos limitaremos aquí a lo esencial para llegar a un comprensión sucinta del fenómeno. La teoría que se va a exponer se basa en la hipótesis de considerar un colector mecánicamente perfecto con un devanado del inducido en el que se van a omitir en principio las f.e.m.s. inducidas en las espiras conmutadas y donde se van a despreciar las resistencias de las mismas y de sus hilos de conexión a las delgas frente a la resistencia de contacto escobilla-colector.

En la Figura 6.16 se muestra el proceso de conmutación de una sección *C* del inducido de una máquina de c.c. En el instante inicial, representado por la posición *a*), la corriente I_i de salida de la escobilla se toma de la delga 3; la corriente en la sección *C* considerada es $I_i/2$ y tiene sentido de derecha a izquierda. En un instante intermedio (posición *b*) la sección *C* está pasando por la línea neutra y debe invertir su sentido, apareciendo el reparto de corrientes que se indica en la misma figura. El momento en que la corriente de la bobina es nula coincide precisamente con media duración de la conmutación. El final de la misma se obtiene cuando la escobilla deja de hacer contacto con la delga 3 (posición *c*), en cuyo instante la corriente en la sección *C* se ha invertido y vuelve a tomar el valor de partida $I_i/2$. El intervalo de tiempo necesario para la conmutación de la sección se denomina **período *T* de conmutación**. Si se denomina R_e a la resistencia de contacto de la escobilla con la delga cuando están totalmente unidas (en toda su superficie), se observa en la Figura 6.16 que en el instante inicial $t = 0$, la resistencia de transición de contacto es igual a R_e. Conforme se aleja paulatinamente la escobilla de la delga 3, disminuye su superficie de contacto proporcionalmente al tiempo *t* transcurrido desde el instante en que comenzó la conmutación, y siendo la resistencia de contacto inversamente proporcional a esa superficie, la resistencia de transición llegará a ser infinita al final del período *T* de conmutación. Si se denomina R_1 a la resistencia de transición entre la delga 3 y la escobilla, se cumplirá:

$$R_1 = R_e \frac{T}{T - t} \tag{6.16}$$

Razonando de forma análoga, la resistencia R_2, de transición entre la delga 4 y la escobilla, disminuye de manera inversamente proporcional al tiempo *t*:

$$R_2 = R_e \frac{T}{t} \tag{6.17}$$

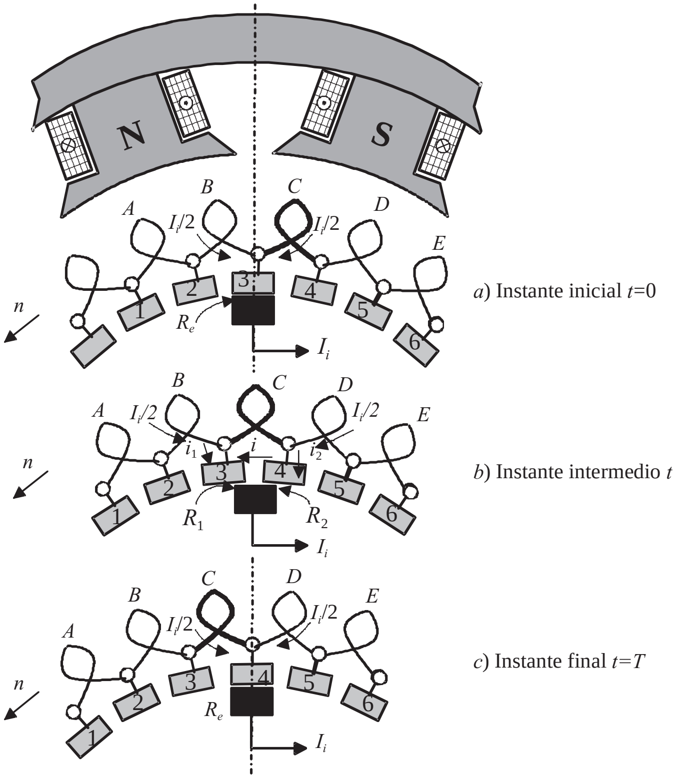


Figura 6.16. Proceso de conmutación en una sección del inducido.

Si se tiene en cuenta que en las hipótesis de partida se desprecian las resistencias de las espiras conmutadas y sus hilos de conexión y se consideran nulas las posibles f.e.m.s. inducidas en la sección C, al aplicar los lemas de Kirchhoff al circuito de la Figura 6.16 se obtiene:

$$i_1 + i_2 = I_i \quad ; \quad R_1 i_1 = R_2 i_2 \quad ; \quad \frac{I_i}{2} + i = i_1 \tag{6.18}$$

de donde resulta:

$$i_1 = I_i \frac{T - t}{t} \quad ; \quad i_2 = I_i \frac{t}{T} \tag{6.19}$$

y en consecuencia la corriente i en la sección conmutada vendrá expresada por:

$$i = i_1 - \frac{I_1}{2} = \frac{I_i}{2}\left(1 - 2\frac{t}{T}\right) \tag{6.20}$$

que es la ecuación de una recta. En la Figura 6.17 se muestra el diagrama de variación de esta corriente, que recibe el nombre de **conmutación rectilínea o lineal**.

En la práctica la conmutación lineal no se da nunca; esto es debido a que es inevitable la aparición de una f.e.m. de autoinducción y de inducción mutua en la sección conmutada por

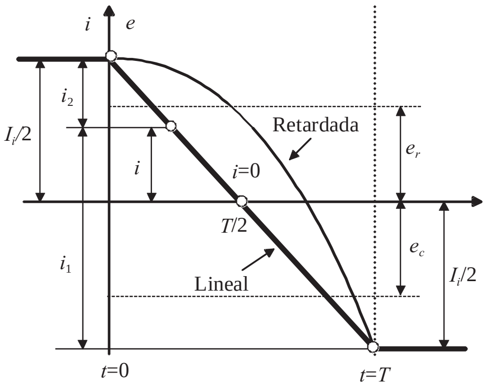


Figura 6.17. Variación de la corriente en la conmutación.

la variación de corriente existente en la propia sección y en la adyacente (o adyacentes cuando las escobillas tienen contacto con dos o más delgas).

Esta f.e.m., denominada **fuerza electromotriz reactiva** e_r, tiene la forma general:

$$e_r = -N \frac{d\Phi}{dt} \tag{6.21}$$

donde N representa el número de espiras de la sección conmutada y Φ es el flujo total que atraviesa a la sección objeto de estudio, que en parte proviene de su propio flujo y que en parte se debe a los flujos que llegan de las otras secciones conmutadas. Si se consideran lineales las variaciones de las corrientes, la f.e.m. e_r tendrá un valor proporcional a la corriente I_i*; en consecuencia, para una determinada corriente de inducido, la magnitud de e_r será constante en el período de conmutación, como así se ha representado en la Figura 6.17 por medio de una paralela al eje de abscisas. Esta f.e.m. e_r, al oponerse, según la ley de Lenz, a la causa que la produce, **retardará** el proceso de conmutación, lo que lleva consigo el que la corriente i pasará por cero en un tiempo superior al teórico $T/2$. En la Figura 6.17 se ha representado este fenómeno por una curva de trazo delgado. Como quiera que el tiempo total de la conmutación debe ser constante e igual a T, el paso de la corriente de 0 a $-I_i/2$ deberá ser más forzado y rápido que en el caso lineal, lo que indica que la magnitud de e_r experimenta un aumento. Además, si se tiene en cuenta que la superficie de contacto delga-escobilla está disminuyendo, se producirá una alta densidad de corriente a la salida de la delga que se aleja, lo que da lugar al chisporroteo en el colector.

Para evitar el chisporroteo originado por la aparición de e_r, será necesario compensar esta f.e.m. por otra de signo opuesto e igual magnitud (por tanto, proporcional también a la corriente I_i); esto se consigue incorporando en la zona de conmutación (línea neutra) un polo auxiliar que cree una determinada inducción B_c en la sección conmutada. De esta forma, si N es el número de espiras de la sección, L la longitud de sus conductores (o la longitud del polo auxiliar, si la de éste es menor) y v la velocidad tangencial de los mismos,

* Por ejemplo, la f.e.m. propia de autoinducción será de la forma: $e_r = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{I_i}{T} = -K \cdot I_i$.

la f.e.m. adicional que resulte, denominada fuerza **electromotriz de conmutación** e_c, tendrá una magnitud:

$$e_c = B_c\, 2L\, v\, N \tag{6.22}$$

Como el signo de esta f.e.m. e_c debe ser opuesto a e_r (véase Fig. 6.17), la polaridad del polo de conmutación en el caso de un generador será, naturalmente, opuesta a la del polo del cual viene la bobina. Para que la magnitud de e_c coincida con la de e_r tendrán que variar ambas con la misma ley; como quiera que e_r es proporcional a la corriente del inducido I_i, habrá que hacer que e_c y, por tanto, B_c sea proporcional también a esa corriente; esto se logra, para todos los regímenes de funcionamiento, conectando el arrollamiento de los polos auxiliares en serie con el devanado del inducido. Además, para lograr una relación directa entre la f.m.m. de los polos auxiliares y la inducción B_c correspondiente será necesario que el circuito magnético de estos polos esté *no saturado;* esto se logra aumentando el entrehierro de los mismos o también trabajando con inducciones bajas (inferiores a 1,2 teslas). En la Figura 6.18 se muestra la disposición básica de una máquina de c.c. en la que se ha intercalado un polo auxiliar o de conmutación (normalmente hay tantos como polos principales). Obsérvese que el arrollamiento del interpolo va en serie con el inducido, con un entrehierro mayor que el de los polos principales.

Para calcular el número de espiras necesario en los interpolos hay que tener en cuenta que ellos deben realizar una doble misión: por una parte, y de acuerdo con los párrafos anteriores, tienen que producir una densidad de flujo B_c en las espiras conmutadas que engendre una f.e.m. de conmutación e_c que se oponga a la f.e.m. de reactancia e_r; pero además, y de acuerdo con el epígrafe 6.4, deben contrarrestar la reacción transversal del inducido, que tiende a modificar la posición de la línea neutra. Como quiera que ambas acciones conducen a polaridades coincidentes (como puede comprobarse fácilmente comparando los esquemas de las Figs. 6.15 y 6.18), la f.m.m. necesaria en los polos auxiliares, $\mathscr{F}_{aux}$, será igual a la suma de la f.m.m. de reacción transversal, $\mathscr{F}_t$, más la f.m.m. necesaria para crear B_c, y que denominaremos $\mathscr{F}_B$; por tanto:

$$\mathscr{F}_{aux} = \mathscr{F}_t + \mathscr{F}_B \tag{6.23}$$

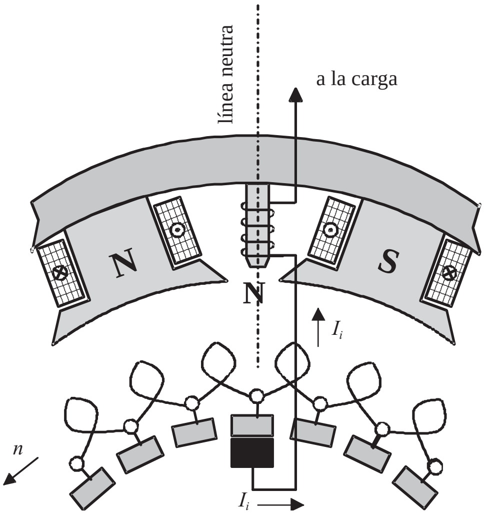


Figura 6.18. Detalle de la conexión inducido-polo auxiliar o de conmutación.

Si no hay desplazamiento de escobillas toda la reacción del inducido es transversal; en consecuencia, y de acuerdo con (6.13), se obtiene:

$$\mathscr{F}_t = \frac{I_i Z}{8pc} \qquad \text{A.v/polo} \tag{6.24}$$

Para calcular $\mathscr{F}_B$ supondremos que el entrehierro de los polos auxiliares δ_{aux} es elevado; de esta forma se podrá despreciar la reluctancia del hierro frente a la del entrehierro, resultando:

$$\mathscr{F}_B = H_B \cdot \delta_{aux} = \frac{B_c}{\mu_0}\,\delta_{aux} \tag{6.25}$$

donde H_B indica la intensidad de campo magnético en el entrehierro de los polos auxiliares. Llevando (6.24) y (6.25) a (6.23) queda:

$$\mathscr{F}_{aux} = \frac{I_i}{8pc} Z + \frac{B_c}{\mu_0}\,\delta_{aux} \qquad \text{A.v/polo} \tag{6.26}$$

generalmente $\mathscr{F}_{aux}$ es del orden de 1,2 a 1,3 veces $\mathscr{F}_t$.

Si N_{aux} son las espiras por polo de los arrollamientos correspondientes que están recorridos por la corriente I_i del inducido, resulta:

$$N_{aux} = \frac{\mathscr{F}_{aux}}{I_i} \tag{6.27}$$

que determina el número de espiras por polo necesario en los polos auxiliares.

Ejemplo de aplicación 6.3

Un generador de c.c. de 6 polos, con un arrollamiento imbricado de 720 conductores, suministra una corriente de 600 A. La densidad de flujo en el entrehierro de los polos auxiliares es de 0,372 Wb/m² y el entrehierro correspondiente es de 6 mm. Despreciando la reluctancia del hierro y la dispersión de flujo magnético, calcular el número (por polo) de espiras necesarias en los polos auxiliares.

Solución

De acuerdo con la expresión (6.26) se tiene:

$$\mathscr{F}_{aux} = \frac{I_i}{8pc} Z + \frac{B_c}{\mu_0}\,\delta_{aux} \qquad \text{A.v/polo}$$

y al sustituir valores resulta:

$$\mathscr{F}_{aux} = \frac{600}{8 \cdot 3 \cdot 3} 780 + \frac{0{,}372}{4\pi \cdot 10^{-7}} \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 8.276 \;\; \text{A.v/polo}$$

puesto que en un arrollamiento imbricado se cumple que $2p = 2c$. En consecuencia, el número de espiras necesario será:

$$N_{aux} = \frac{8.276}{600} = 14 \text{ espiras}$$

6.6. GENERADORES DE C.C.: ASPECTOS GENERALES

Los generadores de c.c. o dinamos convierten una energía mecánica de entrada en energía eléctrica de salida en forma de corriente continua. En la actualidad, estos generadores han caído en desuso y han sido sustituidos por rectificadores, generalmente de silicio, que transforman c.a. de la red en c.c., en forma estática y con mayor rendimiento. Conviene, sin embargo, analizar el funcionamiento básico de las dinamos para comprender claramente el comportamiento de los motores de c.c., cuyo estudio se realiza en el epígrafe 6.7.

Desde el punto de vista de circuito eléctrico, las máquinas de c.c. constan de un inductor o excitación, colocado en el estátor, y de un inducido giratorio provisto de colector de delgas. La representación de ambos devanados es la indicada en la Figura 6.19. El devanado de excitación está formado por los arrollamientos de todos los polos conectados en serie, a los que se aplica una tensión de alimentación de c.c. que produce una corriente de circulación I_e, que da lugar a una f.m.m. que origina el flujo Φ en el entrehierro de la máquina. El inducido gira dentro del campo magnético del inductor y genera, merced a la combinación colector-escobillas, una f.e.m. continua E en vacío cuya magnitud viene definida por la expresión (6.6).

Al conectar una carga eléctrica exterior aparece una corriente I_i de circulación que provoca una caída de tensión en el inducido, que se debe en parte a la resistencia propia de este devanado R_i y en parte a la resistencia que presentan los contactos escobillas-colector. Si se denomina V_{esc} la caída de tensión por par de escobillas (que suele considerarse del orden de 2 voltios), la aplicación del 2.º lema de Kirchhoff al circuito del inducido de la Figura 6.19 conduce a la siguiente ecuación:

$$E = V + R_i I_i + V_{esc} \tag{6.28}$$

donde V indica la tensión terminal en bornes de la máquina. En esta ecuación se ha supuesto despreciable la posible acción desmagnetizante del inducido sobre el inductor. Cuando se considera esta acción, se suele expresar como tanto por ciento de reducción en la f.m.m. de excitación, o su equivalente en caída de tensión del inducido. En el caso de que la máquina posea polos auxiliares que anulen la reacción del inducido, la expresión (6.28) seguirá siendo válida si se incluyen en R_i las resistencias de los arrollamientos de estos polos, que como ya se ha comentado en el epígrafe 6.5 están en serie con el inducido.

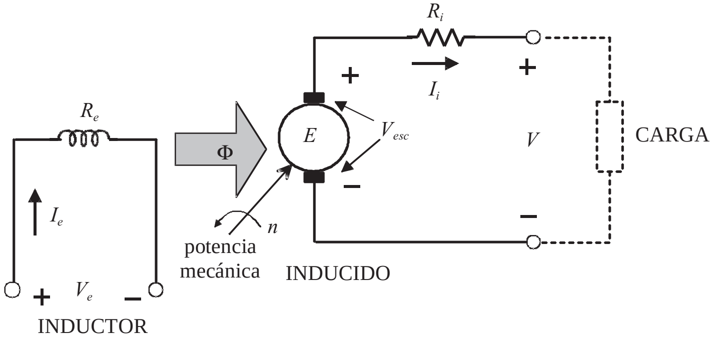


Figura 6.19. Generador de c.c. o dinamo.

Para determinar el proceso de transformación de energía mecánica en eléctrica en un generador de c.c. se va a considerar el esquema de la Figura 6.19 en el que se tienen las siguientes ecuaciones de circuito:

$$\begin{aligned} &\textit{Inductor: } V_e = R_e I_e \\ &\textit{Inducido: } E = V + R_i I_i + V_{esc} \end{aligned} \tag{6.29}$$

Al multiplicar por I_i la segunda ecuación anterior resulta:

$$EI_i = VI_i + R_i I_i^2 + V_{esc} I_i \tag{6.30}$$

que expresa el balance de potencias en el inducido de una dinamo. Los términos anteriores representan:

$P_2 = VI_i$: Potencia eléctrica de salida suministrada por el generador.
$P_{cui} = R_i I_i^2$: Pérdidas en el cobre del inducido.
$P_{esc} = V_{esc} I_i$: Pérdidas en los contactos de las escobillas.
$P_a = EI_i$: Potencia electromagnética desarrollada por la máquina.

De acuerdo con esta nomenclatura, el balance de potencias en el inducido se convierte en:

$$P_a = P_2 + P_{cui} + P_{esc} \tag{6.31}$$

Para calcular la potencia mecánica de entrada habrá que sumar a la potencia electromagnética anterior, P_a, las restantes pérdidas, que abarcan:

a) Las pérdidas en el cobre del arrollamiento de excitación, definidas por:

$$P_{exc} = V_e I_e = R_e I_e^2 \tag{6.32}$$

b) Las pérdidas mecánicas P_m debidas al rozamiento y ventilación.
c) Las pérdidas en el hierro P_{Fe}, que sólo existen en el apilamiento del rotor, debido a la magnetización cíclica que aparece por su movimiento a pesar de ser el flujo inductor constante.

En consecuencia, y de acuerdo con lo anterior, la potencia mecánica de entrada P_1 al árbol de un generador de c.c. será:

$$P_1 = P_{exc} + P_m + P_{Fe} + P_a \tag{6.33}$$

donde P_a está determinado por la ecuación (6.31). En la Figura 6.20 se muestra un esquema simplificado de este balance de potencias.

Este diagrama energético es válido para todas las máquinas de c.c. en las que la potencia de excitación proviene de la misma máquina. Hay que tener en cuenta que los circuitos inductor e inducido pueden estar conectados entre sí, constituyendo una sola unidad, o pueden estar separados, en cuyo caso la excitación procede de una fuente exterior y, por tanto, no interviene en el balance general. Desde el punto de vista de comportamiento y condiciones de trabajo, tiene una gran importancia la forma en que se conectan entre sí los devanados inductor e inducido, y así se distinguen:

a) **Máquinas con excitación independiente**, en las que el devanado inductor es alimentado mediante una fuente de alimentación externa a la máquina, que puede ser, por ejemplo, una batería de acumuladores.

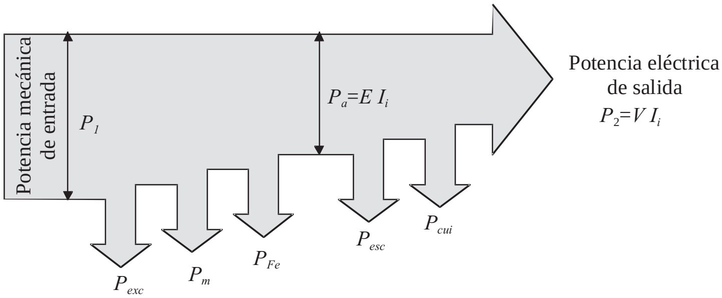


Figura 6.20. Balance de potencias en el generador de c.c.

b) **Máquinas autoexcitadas**, en las que la máquina se excita a sí misma tomando la corriente inductora del propio inducido (caso de funcionamiento como generador) o de la misma red que alimenta el inducido (caso de trabajar como motor).

Las máquinas de c.c. con autoexcitación se clasifican a su vez en:

1. **Máquinas serie**, en las que el inductor está en serie con el inducido; en este caso el devanado de excitación está preparado con pocas espiras de hilo grueso, ya que circulará por él la corriente total de la máquina.
2. **Máquinas derivación o *shunt***, en las que el devanado inductor se conecta directamente a los terminales de la máquina, quedando en paralelo (derivación) con el inducido; en este caso el devanado de excitación está formado por arrollamientos de hilo delgado con gran número de espiras.
3. **Máquinas compuestas o *compound***, en las que la excitación total está repartida entre dos devanados, uno colocado en serie (de pocas espiras de hilo grueso) y otro colocado en paralelo con el inducido (de muchas espiras de hilo delgado). Según que el devanado en derivación esté conectado directamente a las escobillas del inducido o después del devanado en serie, se obtienen las máquinas compuestas con corta o larga derivación, respectivamente. En la Figura 6.21 se muestran esquemáticamente los diferentes tipos de máquinas de c.c. citadas y que pueden emplearse en su versión de generador o motor (se han señalado también las letras normalizadas de designación de los terminales de acuerdo con la Norma UNE-EN 60034-8). Por razones de sencillez, no se han representado las resistencias de los devanados del inducido, polos auxiliares, etc.

La autoexcitación de los generadores de c.c. fue descubierta por W. Siemens sobre el año 1866, y se basa en el magnetismo remanente de los polos. Considérese, por ejemplo, una máquina shunt; al girar el rotor por medio de un motor primario, si no existe ningún flujo en los polos no aparecerá ninguna f.e.m. en las escobillas y en consecuencia no existirá transformación de energía mecano-eléctrica; ahora bien, si previamente se han magnetizado los polos (con ayuda de una fuente de c.c. exterior), al mover el rotor se producirá en bornes una pequeña f.e.m.; si el devanado inductor está conectado **adecuadamente** al inducido, se obtendrá una corriente en el arrollamiento inductor, que reforzará el magnetismo remanente ya existente, que a su vez provocará un aumento de f.e.m., y así sucesivamente, hasta el instante en que, debido a la saturación del circuito magnético de la máquina, se detiene el proceso de autoexcitación, llegándose a un régimen de funcionamiento estable. Si la conexión del induc-

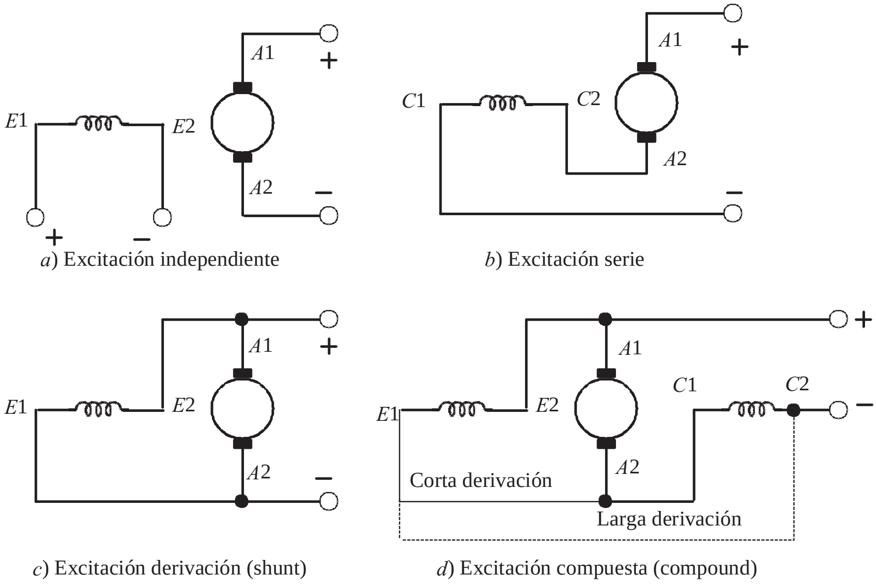


Figura 6.21. Tipos de excitación de las máquinas de c.c.

tor al inducido no fuera la adecuada, se debilitaría el magnetismo remanente y la máquina tendería a desexcitarse.

6.7. GENERADORES DE C.C.: CARACTERÍSTICAS DE SERVICIO

Las propiedades de los generadores se analizan con la ayuda de las características que establecen la dependencia entre las magnitudes principales que determinan el funcionamiento de la máquina. Cada uno de los principales tipos de excitación: independiente, serie, derivación y compuesto, impone a la máquina características de funcionamiento distintas, que determinan la clase de servicio al que se adapta cada una de ellas. Estas características quedan perfectamente reflejadas por medio de gráficos, destacando las siguientes:

1. **Característica de vacío $E = f(I_e)$**, que representa la relación entre la f.e.m. generada por la dinamo y la corriente de excitación, cuando la máquina funciona en vacío; es decir, el inducido no alimenta ninguna carga.
2. **Característica en carga $V = f(I_e)$**, que representa la relación entre la tensión terminal y la corriente de excitación para una intensidad de carga I constante. En particular, cuando I es igual a cero se obtiene la curva de vacío.
3. **Característica externa $V = f(I)$**, que representa la tensión en bornes en función de la corriente de carga, para una intensidad de excitación constante.
4. **Característica de regulación $I_e = f(I)$**, que representa la relación entre la corriente de excitación y la corriente de carga, para una tensión en bornes constante.

De las curvas anteriores merecen especial atención las características de vacío y externa, y son las que se van a estudiar a continuación para cada tipo de generador.

a) Características de un generador con excitación independiente

En este tipo de generador, la corriente inductora se obtiene de una fuente de c.c. externa a la máquina. Es el tipo de excitación más antiguo y hoy se emplea únicamente en casos muy especiales. El esquema básico de conexiones es el que se indica en la Figura 6.22, donde se ha dispuesto de un reóstato en serie con el inductor para regular la corriente de excitación.

Para determinar la curva de vacío se hace girar el rotor a velocidad constante, manteniendo desconectada la carga. La corriente de excitación se va aumentando gradualmente desde cero hasta el valor máximo permitido, anotando simultáneamente la f.e.m. generada E, que se mide con ayuda de un voltímetro.

Al representar la relación $E = f(I_e)$ se obtiene la rama ascendente A de la curva de la Figura 6.23. Se repiten luego las medidas disminuyendo la corriente I_e hasta llegar a cero y al dibujar la curva $E = f(I_e)$ se obtiene la rama descendente B de la Figura 6.23*a*. La diferencia entre ambas ramas se debe a la histéresis de los polos.

La curva media entre las mismas representa la **característica de vacío** del generador de c.c. Se observa en esta curva que la máquina produce una f.e.m. E_R sin corriente de excitación ($I_e = 0$), lo cual se debe al magnetismo remanente que aparece en los polos. Si se tiene en cuenta la ecuación (6.6), que expresa el valor de la f.e.m. generada, es evidente que para una determinada velocidad de giro, la f.e.m. es proporcional al flujo por polo, y como quiera también que la f.m.m. del inductor (A.v/polo) es proporcional a la corriente de excitación, se comprueba que la forma de la característica de vacío es del mismo tipo que la curva de magnetización de los materiales magnéticos.

Otro aspecto a considerar en la curva de vacío es que la f.e.m. generada resulta, de acuerdo con (6.6):

$$E = K_E n \Phi \tag{6.34}$$

es decir, la f.e.m. es directamente proporcional al flujo magnético que producen los polos y a la velocidad de rotación de la máquina. Es por ello que si se considera que la velocidad de giro es diferente, por ejemplo n', la f.e.m. producida para el mismo valor del flujo será:

$$E' = K_E n' \Phi \tag{6.35}$$

y al dividir entre sí las expresiones (6.34) y (6.35) resulta:

$$\frac{E}{E'} = \frac{n}{n'} \tag{6.36}$$

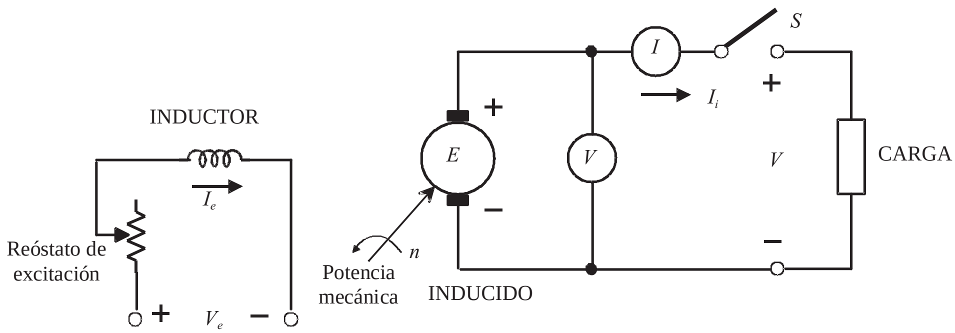


Figura 6.22. Ensayo de vacío de una dinamo con excitación independiente.

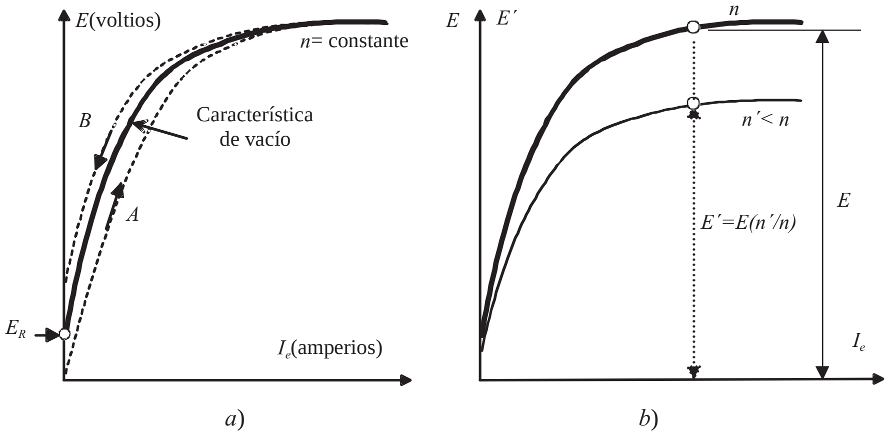


Figura 6.23. Curva de vacío de un generador de c.c. para distintas velocidades.

Es decir, para los mismos valores de los flujos, las f.e.m.s. son proporcionales a las velocidades de giro respectivas. Esto significa que si se conoce la curva de vacío de una máquina para una velocidad *n*, se puede deducir la curva de vacío a otra velocidad *n′* sin más que aplicar la ecuación (6.36). En la Figura 6.23*b* se muestra esta idea; la curva de vacío de trazo grueso está definida para la velocidad *n* y se ha deducido la curva de vacío para la velocidad *n′*, de tal manera que $E' = E(n'/n)$ para cada valor de las abscisas.

Para determinar la característica externa de un generador con excitación independiente habrá que conectar la carga; cerrando el interruptor de la Figura 6.22 y variando la misma se representará la relación $V = f(I)$ cuando se mantiene constante tanto la corriente de excitación como la velocidad de giro del motor primario. En principio, si no se considera la reacción del inducido, la f.e.m. generada *E* será constante y la variación de la tensión en bornes con la corriente del inducido vendrá expresada por la relación (6.28), es decir:

$$V = E - R_i I_i - V_{esc} \qquad (6.37)$$

donde I_i es la intensidad del inducido y que coincide con la corriente de carga. La expresión anterior representa la ecuación de una recta. Si se tiene en cuenta la reacción del inducido, al desplazar las escobillas para obtener una buena conmutación, aparece una f.m.m. desmagnetizante que actúa sobre el valor de la f.e.m. engendrada y cuya magnitud puede ser no lineal con la corriente si la máquina trabaja en la zona de saturación. En la Figura 6.24 se muestra la característica externa de un generador con excitación independiente, donde pueden apreciarse cada una de las caídas anteriores.

Se observa que en la zona normal de trabajo, que llega hasta la corriente asignada, la característica es prácticamente lineal. Hay que hacer notar que si no se considera la reacción del inducido por estar compensada por los polos auxiliares, hay que introducir en la resistencia R_i de la ecuación (6.37) la resistencia de estos polos.

b) Características de un generador derivación

El esquema de conexiones de este generador es el mostrado en la Figura 6.25; en este caso el devanado inductor está conectado en paralelo con el inducido, y se regula la excitación por medio de un reóstato conectado en serie con el inductor. Para limitar la potencia consumida

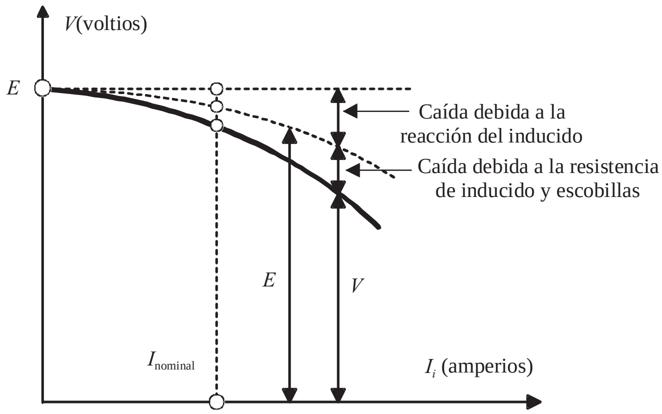


Figura 6.24. Característica externa de un generador de c.c. con excitación independiente.

por el devanado de excitación, es conveniente que circule por él una corriente reducida, por lo que la resistencia de este bobinado debe ser elevada. Es por esta razón por la cual los conductores del devanado de campo tienen una sección pequeña y una gran resistencia en comparación con la del inducido, y la f.m.m. necesaria se consigue construyendo este bobinado con un gran número de espiras. Normalmente la corriente de excitación en las dinamos derivación no sobrepasa del 3 por 100 de la corriente del inducido.

Para determinar la f.e.m. que produce la dinamo en vacío habrá que utilizar la característica en vacío de la máquina (Fig. 6.26) junto con la característica del inductor que representa la relación $E = R_e I_e$ (donde R_e es la resistencia total del circuito de excitación). Esta característica del inductor es una recta de pendiente R_e:

$$\operatorname{tg} \alpha = R_e = \frac{E}{I_e} \tag{6.37}$$

La f.e.m. final engendrada corresponde al punto P, solución común a la curva de vacío y a la recta del inductor. Para cada valor de la resistencia del circuito de excitación se obtendrá una recta de pendiente distinta cuya intersección con la curva de vacío determinará la f.e.m. resultante. Si la resistencia R_e se va desplazando por la curva de vacío hasta llegar al origen, para una cierta resistencia $R_e = R_{cr}$, denominada **resistencia crítica**, la recta del inductor será tangente a la parte inicial de la curva de vacío y, en consecuencia, en estas condiciones la dinamo práctica-

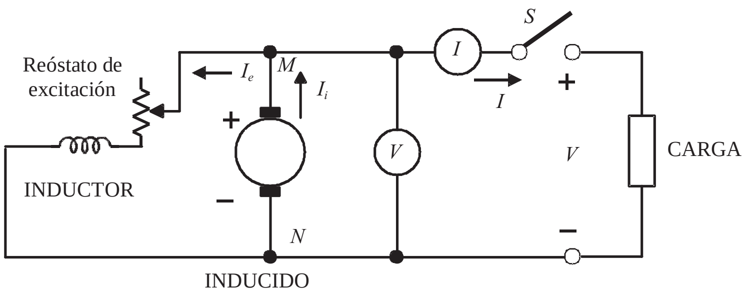


Figura 6.25. Generador con excitación en derivación o shunt.

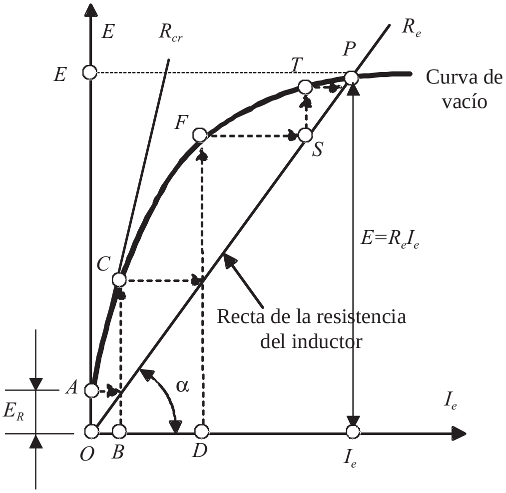


Figura 6.26. Determinación de la tensión de funcionamiento de una dinamo derivación.

mente no se excita. Por ello la resistencia máxima del reóstato debe proyectarse para que al sumarse con la resistencia del devanado inductor no se supere la magnitud R_{cr}.

La Figura 6.26 puede servir también para explicar el *proceso de autoexcitación* de estos generadores. Considérese una resistencia total del circuito inductor R_e definida por el ángulo α. En vacío, toda la corriente de inducido pasa a través del devanado inductor, por lo que $I_i = I_e$, además, en estas condiciones la corriente común anterior es de pequeño valor, por lo que se pueden considerar despreciables tanto la caída de tensión en la resistencia del inducido como la propia reacción del inducido; de este modo la d.d.p. en bornes de la máquina (tensión entre *M* y *N* en la Fig. 6.25) coincide con la f.e.m. generada. Si se considera que la resistencia total del circuito de excitación es R_e (devanado inductor + reóstato de campo) y que la inductancia del devanado inductor es L_e, de acuerdo con el 2.º lema de Kichhoff se tiene:

$$E = V_{MN} = R_e I_e + L \frac{dI_e}{dt} \tag{6.38}$$

Inicialmente la corriente $I_e = 0$, por lo que la f.e.m. generada E_R se debe al magnetismo remanente de los polos y que corresponde al segmento *OA* de la Figura 6.26; de este modo, de acuerdo con (6.38), en este momento se cumple:

$$E_R = L \frac{dI_e}{dt} \tag{6.39}$$

Por consiguiente, al ser E_R un valor positivo, la dI_e/dt será positiva y la corriente I_e comienza a aumentar hasta alcanzar el valor *OB*, lo que a su vez hace que la f.e.m. aumente hasta el valor *BC*; de este modo, y teniendo en cuenta que:

$$E - R_e I_e = L \frac{dI_e}{dt} \tag{6.40}$$

el primer miembro de la ecuación anterior representa la diferencia entre la curva de vacío y la recta de la resistencia del inductor, que siempre da un valor positivo, ya que la curva de vacío

está por encima de la recta R_e, lo que hace que $dI_e/dt > 0$, por lo que la corriente I_e va aumentando en todo momento; en nuestro caso la corriente alcanzará el valor *OD*, que producirá la f.e.m. *FD*, y así sucesivamente (el recorrido que sigue la máquina está señalado por la línea quebrada de trazo discontinuo de la Fig. 6.26).

Cuando la f.e.m. alcance el valor dado por la intersección de la recta de campo con la curva de vacío (punto *P* de la Fig. 6.26), de acuerdo con (6.40) el término LdI_e/dt será cero, por lo que no puede haber ningún aumento posterior de la corriente I_e, la f.e.m. deja de aumentar y el punto *P* determina los valores finales tanto de la tensión en vacío (f.e.m.) como de la corriente de excitación, cumpliéndose en este punto la condición:

$$E = R_e I_e \tag{6.41}$$

COMENTARIOS PRÁCTICOS

1. Condición de cebado de un generador derivación: *Al construir una dinamo derivación, en la misma fábrica se hace pasar por el devanado inductor una corriente de excitación que imanta los polos y les confiere el magnetismo remanente necesario para el funcionamiento de la máquina. Para conseguir la autoexcitación de la dinamo es necesario comprobar que la corriente del devanado de campo produce un flujo magnético que ayuda a aumentar (reforzar) el magnetismo remanente de los polos, de otro modo el flujo que produciría el devanado inductor tendería a anular el magnetismo remanente existente y la dinamo no generaría tensión. En el argot eléctrico se dice entonces que* **la dinamo no se ceba**. *Es por ello que antes de poner en funcionamiento una dinamo derivación se debe tener la seguridad de haber realizado bien las conexiones entre los devanados inductor e inducido para que se efectúe el cebado de la máquina. En la práctica la comprobación es muy sencilla, es suficiente conectar un interruptor en serie con el devanado inductor y medir con un voltímetro la tensión entre las escobillas. Con el interruptor anterior abierto se arranca la dinamo arrastrada por la máquina motriz, entonces el voltímetro señalará una pequeña tensión que es la f.e.m. debida al magnetismo remanente de los polos. Luego al cerrar el interruptor se debe observar la tensión que señala el voltímetro, si ésta ha subido es señal de que las conexiones realizadas son correctas, mientras que si la tensión disminuye entonces deben invertirse las conexiones del devanado inductor. En el caso de que girando la dinamo y estando cerrado el inductor no se aprecie tensión en el voltímetro es señal de que los polos han perdido su magnetismo remanente, en este caso para poner en funcionamiento la dinamo habrá que proceder a imantar nuevamente los polos con una fuente de corriente continua externa durante un breve espacio de tiempo.*

2. Cortocircuito de un generador derivación: *Debe señalarse que cuando se produce un cortocircuito en los bornes de un generador derivación, no pasa corriente por el devanado inductor ya que la tensión en los terminales de la máquina en esos momentos es nula. La f.e.m. inducida en estas condiciones se debe únicamente al magnetismo remanente de los polos, por lo que la corriente de cortocircuito es muy pequeña frente a la corriente nominal y es por ello que un cortocircuito franco en una dinamo derivación no produce graves inconvenientes porque simultáneamente se desexcita la máquina.*

3. Apertura del circuito de excitación de un generador derivación: *En una dinamo shunt debe evitarse a toda costa el abrir bruscamente el circuito de excitación, ya que el devanado inductor tiene muchas espiras de hilo delgado, por lo que su coeficiente de autoinducción es muy elevado, y es por ello que las extracorrientes de ruptura podrían deteriorar el aislamiento del devanado de los polos.*

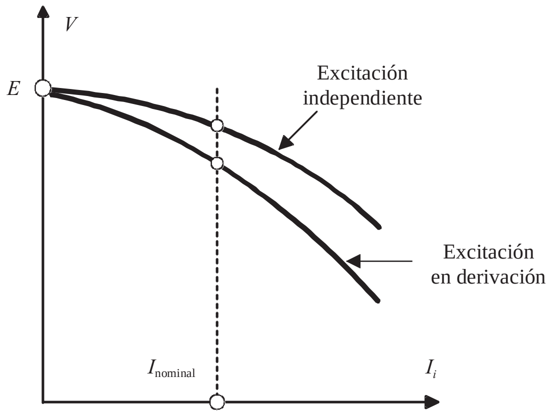


Figura 6.27. Característica externa de un generador shunt.

En un generador derivación, la característica externa $V = f(I)$ representa una variación de la tensión terminal superior a la del generador con excitación independiente; esto se debe a que hay que añadir ahora el efecto de la caída de tensión producida por las escobillas, resistencia del inducido y su reacción, con la disminución correspondiente en la corriente de excitación. En la Figura 6.27 se muestra la característica externa de un generador shunt en comparación con un generador con excitación independiente, donde se aprecia lo anteriormente señalado.

El generador derivación es el tipo que se emplea más frecuentemente en la práctica, ya que no necesita una excitación separada y en los límites de carga normales no presenta caídas de tensión elevadas. De cualquier modo, variando la resistencia del reóstato de excitación se puede ajustar la tensión terminal para compensar la caída de tensión producida por la carga.

c) Características de un generador serie

En este tipo de generador el inductor y el inducido van en serie, tal como se muestra en la Figura 6.28. por consiguiente la corriente absorbida por la carga es la misma que atraviesa el inducido y el inductor (incluyendo en su caso el devanado de los polos auxiliares). Es por ello que el devanado de excitación tiene pocas espiras y de hilo de gran sección, por lo que su resistencia eléctrica es pequeña y del orden de la que tiene el inducido. Cuando la máquina está en vacío, al ser $I_e = I = I_i = 0$, se obtiene una f.e.m. muy pequeña y que se debe al magnetismo remanente de los polos. Al conectar la resistencia de carga R_L , si ésta tiene una gran resistencia, la máquina puede llegar a no excitarse, pero al ir disminuyendo su valor, la tensión en bornes va aumentando progresivamente de forma proporcional a la corriente generada por la dinamo.

En la Figura 6.28*b* se presenta la **curva de vacío** $E = g(I)$ del generador y que requiere para su determinación desconectar el inductor y alimentarlo por una fuente auxiliar de c.c. de muy poca tensión y gran corriente (excitación independiente). Téngase en cuenta que con el devanado inductor ya conectado en serie con el inducido, sería imposible determinar la curva de vacío, ya que la d.d.p. que se leería en bornes de la máquina sería la tensión de la carga y no la f.e.m. generada por la dínamo. También se observa la forma de la característica externa $V = f(I)$ al variar la resistencia de carga R_L. Para una corriente OA, se genera una f.e.m. AC y

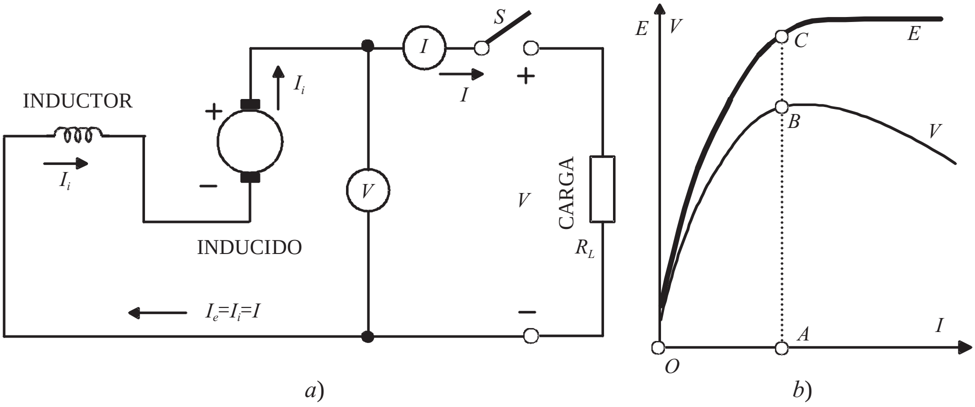


Figura 6.28. Generador con excitación serie y característica externa correspondiente.

la correspondiente tensión es *AB*. La diferencia entre ambas magnitudes es *BC* y representa en consecuencia la caída de tensión en las resistencias del inductor y del inducido, reacción en el mismo, y contacto de escobillas. Obsérvese que este generador no puede considerarse como una *fuente de tensión constante*, ya que como se ha indicado la tensión aumenta con la corriente suministrada por la máquina, este crecimiento se prolonga hasta la zona en que se empieza a alcanzar la saturación del circuito magnético del generador (aproximadamente en el punto *C* mostrado en la curva de vacío de la Figura 6.28*b*), ya que a partir de este punto el flujo principal deja casi de aumentar, mientras que la reacción del inducido y las caídas de tensión en los devanados inductor e inducido siguen creciendo, y de ahí que la característica externa de estos generadores pase por un valor máximo de tensión y después decaiga, dando lugar a una característica externa final de tipo encorvado tal como se señala en la Figura 6.28*b*. En la parte ascendente de esta curva, el funcionamiento es inestable, y solamente es estable en la parte superior, pero esta zona es poco extensa para ser utilizada. Es por ello que en la práctica este tipo de dinamo no se emplea.

d) Características de un generador con excitación compuesta

En la Figura 6.29 se representa el esquema de circuito de este tipo de generador, que puede hacerse con corta o larga derivación. Generalmente las f.m.m.s. de los devanados serie y derivación suelen ser del mismo signo, es decir, aditivas, pero puede realizarse una conexión sustractiva o diferencial.

La característica exterior de este generador, en caso aditivo, se obtiene como suma de las características derivación y serie, pudiendo dar curvas prácticamente planas, lo que indica la constancia de la tensión terminal con la corriente de carga. Si se incrementa el número de espiras en serie, la tensión terminal puede aumentar con la carga, lo que da lugar a la característica **hipercompuesta**. En caso contrario, la tensión puede reducirse con la carga como en el generador derivación, dando lugar a la característica **hipocompuesta**. La conexión diferencial presenta una caída de tensión elevada con el aumento de la carga, lo que hace útil su aplicación en generadores para soldadura en corriente continua. En la Figura 6.29*b* se muestran las características externas para excitaciones aditivas: hipercompuesta e hipocompuesta y de tipo diferencial.

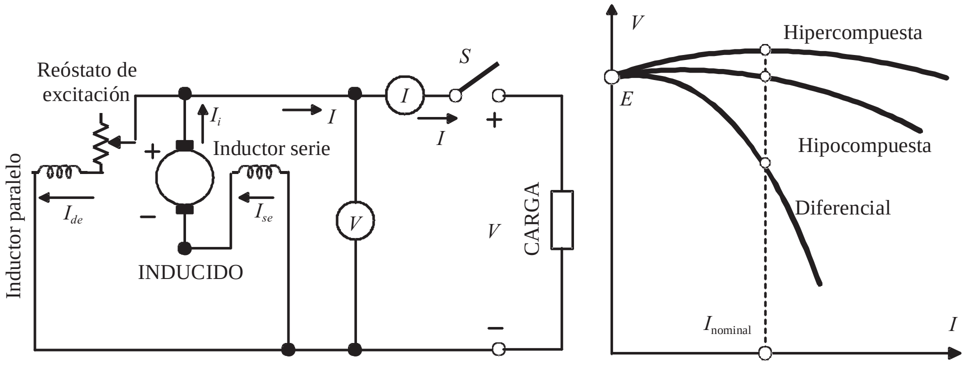


Figura 6.29. Generador compound y características externas.

Ejemplo de aplicación 6.4

La característica de vacío de un generador de c.c. tipo derivación que gira a 1.000 r.p.m. se expresa en la siguiente tabla de valores:

E	20	40	60	80	100	110	120
I_e	0,56	1,12	1,76	2,6	4	5	6,3

Calcular la tensión de la máquina en circuito abierto con una resistencia total del circuito de excitación de: a) 22 Ω; b) 30 Ω; c) Encontrar la magnitud de la resistencia crítica a la velocidad asignada de 1.000 r.p.m; d) Determinar la resistencia del circuito de campo para que la máquina suministre 100 V en vacío a la velocidad asignada; e) Hallar la velocidad crítica de la máquina en el apartado anterior.

Solución

a) En la Figura 6.30 se muestra la característica de vacío de la dinamo derivación a 1.000 r.p.m. Para determinar la tensión en vacío (f.e.m.) con $R_e = 22\ \Omega$, se construye la recta del inductor, definida por la ecuación:

$$V = E = R_e I_e = 22\ I_e$$

Para ello, en la abscisa correspondiente a $I_e = 1$ A, se tomará $V = E = 22$ V (punto A en la Fig. 6.30). La intersección de la recta anterior con la curva de vacío da una f.e.m. igual a 110 V (punto B).

b) De forma análoga al caso anterior se construye ahora la recta $V = 30\ I_e$ y se obtiene la intersección en el punto C, que corresponde a una f.e.m. aproximada de 82 V.

c) La resistencia crítica para $n = 1.000$ r.p.m. corresponde a la tangente a la curva de vacío *a*). Midiendo su valor en la Figura 6.30 resulta una $R_{cr} = 35\ \Omega$.

d) Para $E = 100$ V se obtiene una corriente de excitación de 4 A; en consecuencia, la resistencia de excitación necesaria será: $R_e = 100/4 = 25\ \Omega$.

e) La velocidad crítica para $R_e = R'_{cr} = 25\ \Omega$ corresponderá a la curva de vacío especificada para una velocidad n' tal que esta curva sea tangente (para $I_e \to 0$) a la recta

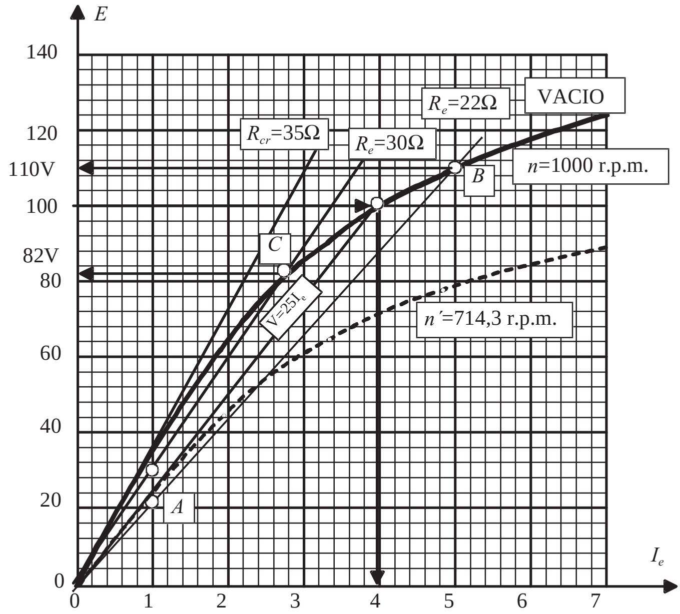


Figura 6.30.

$V = E = 25\ I_e$. Teniendo en cuenta que la resistencia crítica para n = 1.000 r.p.m. es de $R_{cr} = 35\ \Omega$, y como quiera que las curvas de vacío y las tangentes respectivas coinciden para $I_e \rightarrow 0$, se puede escribir:

$$\text{Para } n = 1.000 \text{ r.p.m.} \quad \Rightarrow \quad E = k_E n \Phi = R_{cr} I_e$$
$$\text{Para } n' = (\text{nueva velocidad}) \quad \Rightarrow \quad E' = k_E n' \Phi = R'_{cr} I_e$$

por lo que al dividir entre sí las f.e.m.s. anteriores resulta:

$$\Rightarrow \quad \frac{E}{E'} = \frac{n\Phi}{n'\Phi} = \frac{R_{cr} I_e}{R'_{cr} I_e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1.000}{n'} = \frac{35}{25} \quad \Rightarrow \quad n' = 1.000\,\frac{25}{35} \approx 714{,}3 \text{ r.p.m.}$$

Para comprobar la relación anterior de un modo gráfico, en la Figura 6.30 se ha construido la nueva curva de vacío correspondiente a la velocidad anterior (curva a trazos discontinuos). Las ordenadas (f.e.m.s.) de esta nueva curva son 714,3/1.000 ≈ 0,714 veces la original especificada a 1.000 r.p.m. El lector puede comprobar que la recta $V = 25\ I_e$ es tangente en el origen a esta curva de vacío.

Ejemplo de aplicación 6.5

Un generador de c.c. compuesto de larga derivación de 200 V, 10 kW, 4 polos tiene una resistencia del inducido, polos auxiliares, campo en serie y campo derivación de 0,1; 0,03; 0,07 y 100 Ω, respectivamente. Calcular el valor de la f.e.m. generada cuando la máquina trabaja a plena carga. Si la velocidad asignada es igual a 1.500 r.p.m. y el inducido tiene un devanado imbricado con 720 conductores, determinar el flujo por polo en estas condiciones. Prescíndase de la caída de tensión en escobillas.

Solución

El esquema de circuito es el mostrado en la Figura 6.31, donde se muestran los valores de las resistencias de los devanados.

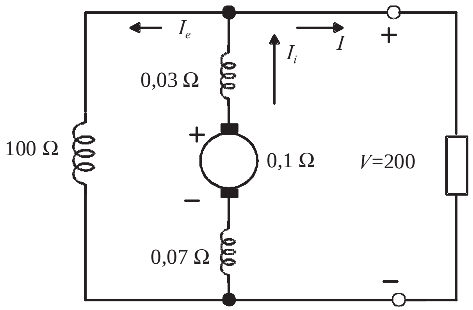


Figura 6.31.

A plena carga, la corriente I vale:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{10.000}{200} = 50 \text{ A}$$

Para una tensión terminal constante igual a 200 V, la corriente de excitación en el campo derivación es:

$$I_e = \frac{200}{100} = 2 \text{ A}$$

En consecuencia, la corriente de inducido vale:

$$I_i = I + I_e = 50 + 2 = 52 \text{ A}$$

La f.e.m. generada por la máquina tendrá una magnitud:

$$E = V + R_i I_i$$

donde en R_i hay que incluir la resistencia del campo inducido, campo en serie y polos auxiliares, resultando:

$$E = 200 + (0{,}07 + 0{,}1 + 0{,}03)\, 52 = 210{,}4 \text{ V}$$

Para calcular el valor del flujo por polo correspondiente hay que tener en cuenta que para un devanado imbricado el número de circuitos derivados coincide con el número de polos. Al aplicar después la ecuación general de la f.e.m. resulta:

$$E = 210{,}4 = \frac{n}{60} Z\Phi \frac{p}{c} = \frac{1.500}{60} 720\Phi \frac{2}{2}$$

de donde resulta un flujo de 11,68 mWb.

6.8. MOTORES DE C.C.: ASPECTOS GENERALES

Un motor de c.c. transforma una energía eléctrica de entrada en una energía mecánica de salida. Esencialmente consiste en una dinamo trabajando en régimen inverso, lo que está de acuerdo con el principio de reciprocidad electromagnética formulado por Faraday y Lenz.

Para comprender este principio básico de reciprocidad en el funcionamiento de una máquina de c.c., se va a considerar una dinamo derivación que suministra energía eléctrica a una red de c.c. de tensión constante, tal como se indica en la Figura 6.32*a*.

De acuerdo con la expresión (6.28), la aplicación del 2.º lema de Kirchhoff al circuito del inducido conduce a la siguiente ecuación:

$$E = V + R_i I_i + V_{esc} \tag{6.42}$$

que denominando $V_i = V + V_{esc}$ a la tensión neta en el inducido nos da una corriente I_i:

$$I_i = \frac{E - V_i}{R_i} \tag{6.43}$$

Si la f.e.m. E es superior a la d.d.p. V_i (prácticamente esta tensión coincide con la de la red), el sentido de la corriente en el inducido coincide con el de E; en consecuencia, la máquina trabaja como generador **suministrando** una potencia electromagnética EI_i. La máquina crea entonces un par resistente que se opone al de rotación, es decir, contrario al movimiento del motor primario.

Si se disminuye la f.e.m. del generador, reduciendo la velocidad de rotación o la excitación del inductor, cuando E se hace menor que la tensión V_i, la corriente I_i del inducido cambiará de sentido, como así lo expresa la ecuación (6.43); se dice entonces que la máquina produce una **fuerza contra-electromotriz**, ya que E se opone a la corriente I_i. En esta situación la máquina trabaja como motor y se produce un par electromagnético que coincide con el de rotación, lo que indica que el par ha pasado de ser resistente a ser motor. Desconectando el motor primario, la máquina de c.c. continuará girando en el mismo sentido que lo hacía cuando actuaba como generador pero desarrollando ella ahora su propio par motor. El que la máquina conserve el mismo sentido de giro trabajando como generador o como motor se debe a que se ha cambiado la polaridad de la corriente **en uno sólo** de los devanados. En las Figuras 6.32*a* y *b* se muestra esta acción, donde puede observarse que en ambos casos la corriente de excitación tiene el mismo sentido, pero que sin embargo la corriente I_i ha cambiado de signo. En definitiva, si se fija la polaridad eléctrica de los terminales de un motor

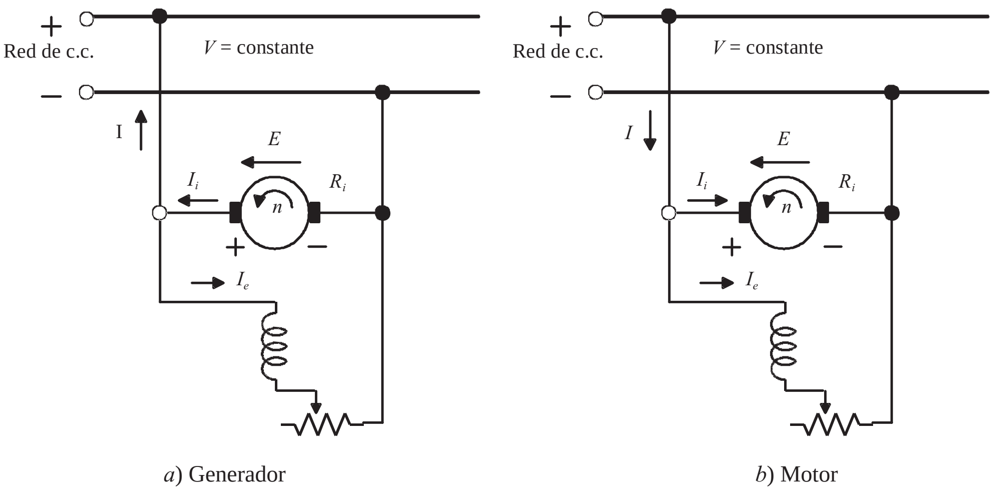


Figura 6.32. Funcionamiento de la máquina de c.c. como generador o como motor.

de c.c. y se mantiene el sentido de giro del rotor, cuando la máquina trabaja como generador, la escobilla positiva es el borne por donde **sale** la corriente del inducido, mientras que cuando funciona como motor, por esa escobilla es por donde **entra** la corriente de la red de corriente continua.

Si en el régimen de funcionamiento como motor se considera positivo el signo de la corriente I_i absorbida, al aplicar el 2.º lema de Kirchhoff al circuito del inducido de la Figura 6.32*b* se obtiene:

$$V = E + R_i I_i + V_{esc} \tag{6.44}$$

que no es más que la ecuación (6.43) en la que se han cambiado los signos de I_i, V_i y E.

Para determinar el proceso de transformación de energía mecánica en eléctrica en el motor de c.c. se ha de obtener una ecuación del balance de potencias. Para ello, si se multiplican ambos miembros de (6.44) por I_i resulta:

$$VI_i = EI_i + R_i I_i^2 + V_{esc} I_i \tag{6.45}$$

cuyos términos significan:

$P_i = VI_i$: Potencia eléctrica absorbida por el inducido del motor.
$P_{cui} = R_i I_i^2$: Pérdidas en el cobre del inducido.
$P_{esc} = V_{esc} I_i$: Pérdidas en los contactos de las escobillas.
$P_a = EI_i$: Potencia electromagnética desarrollada por la máquina.

De acuerdo con esta nomenclatura, el balance de potencias en el inducido se convierte en:

$$P_i = P_a + P_{cui} + P_{esc} \tag{6.46}$$

La potencia electromagnética P_a expresa la potencia mecánica total que produce el motor, y que da lugar, al dividir por la velocidad de giro, al **par interno** desarrollado por la máquina y cuya expresión ya se calculó en el epígrafe 6.3, definida por la ecuación (6.11):

$$T = \frac{EI_i}{2\pi \dfrac{n}{60}} \qquad [\text{N.m}] \tag{6.47}$$

si se sustituye en esta ecuación la f.e.m. E por su valor (6.6), se obtiene la siguiente expresión:

$$T = \frac{1}{2\pi}\frac{p}{c} Z\Phi I_i = K_T \Phi I_i \tag{6.48}$$

que coincide con la (6.10) demostrada por otro procedimiento. Esta ecuación indica que el par es directamente proporcional al flujo en el entrehierro y a la corriente del inducido.

Para calcular la potencia mecánica útil en el árbol del motor habrá que restar a la potencia electromagnética, P_a, las pérdidas rotóricas, que abarcan las pérdidas en el hierro P_{Fe} y las pérdidas mecánicas P_m de rozamiento y ventilación. En consecuencia, la potencia útil del motor P_2 se podrá poner:

$$P_2 = P_a - P_{Fe} - P_m \tag{6.49}$$

La potencia absorbida por la máquina P_1, en el caso de tener el motor excitación independiente, será igual a la potencia que llega al inducido P_i; sin embargo, en las máquinas autoex-

citadas la potencia de entrada tendrá que compensar también las pérdidas en el circuito de excitación P_{ex} debidas al efecto Joule en el cobre del inductor, resultando:

$$P_1 = P_i + P_{exc} \tag{6.50}$$

En la Figura 6.33 se muestra de una forma esquemática el reparto de potencias en el motor de c.c. La potencia de entrada P_1 es el producto de la tensión de alimentación por la corriente absorbida, y el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \tag{6.51}$$

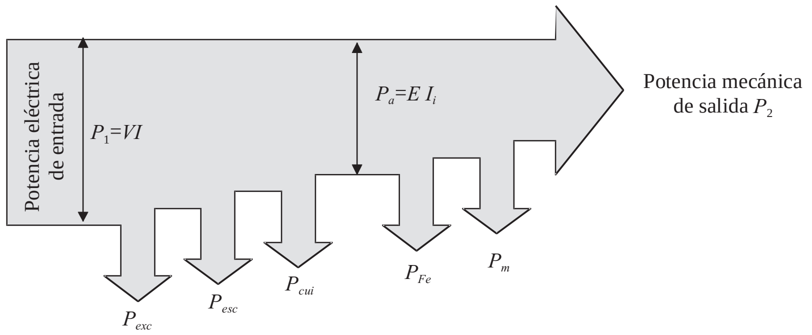


Figura 6.33. Balance de potencias en el motor de c.c.

Ejemplo de aplicación 6.6

Un motor tipo derivación de 500 V consume 4 A en vacío. La resistencia del inducido, incluidas las escobillas, es de 0,2 Ω y la corriente de excitación es de 1 A. Calcular la potencia de salida y el rendimiento cuando la corriente de entrada es de: a) 20 A; b) 100 A.

Solución

a) El motor en vacío consume una potencia:

$$P_0 = VI_0 = 500 \cdot 4 = 2.000 \text{ W}$$

Esta potencia se emplea en cubrir las pérdidas en el hierro P_{Fe}, las pérdidas mecánicas P_m, las pérdidas en el inducido (cobre, escobillas) y las pérdidas de excitación. Exceptuando las pérdidas en el inducido, que son proporcionales al cuadrado de la intensidad del inducido, todas las demás permanecen constantes cualquiera que sea el régimen de trabajo de la máquina. Con los datos del problema se tiene:

Pérdidas en el inducido en vacío: $R_i I_i^2 = 0{,}2\,(4 - 1)^2 = 1{,}8$ W
Pérdidas en el inductor: $VI_e = 500 \cdot 1 = 500$ W

Se observa que en vacío prácticamente se pueden despreciar las pérdidas en el inducido y en consecuencia se puede poner:

$$P_0 = 2.000 \text{ W} = P_{Fe} + P_m + 500 \quad \Rightarrow \quad P_{Fe} + P_m = 1.500 \text{ W}$$

Cuando la máquina absorbe una corriente de 20 A, la intensidad del inducido vale: $I_i = I - I_e = 20 - 1 = 19$ A.

La f.e.m. generada es: $E = V - R_i I_i = 500 - 0,2 \cdot 19 = 496,2$ V, y por tanto la potencia electromagnética es:

$$P_a = EI_i = 496,2 \cdot 19 = 9.427,8 \text{ W}$$

y la potencia mecánica de salida, de acuerdo con (6.49), será:

$$P_2 = 9.427,8 - 1.500 = 7.927,8 \text{ W}$$

Como la potencia eléctrica de entrada es:

$$P_1 = V \cdot I = 500 \cdot 20 = 10.000 \text{ W}$$

el rendimiento del motor en este régimen será:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{7.927,8}{10.000} = 79,27\,\%$$

b) De forma similar, cuando la corriente absorbida es de 100 A, resulta:

$$E = V - R_i I_i = 500 - 0,2 \cdot (100 - 1) = 480,2 \text{ V}$$

La potencia electromagnética es:

$$P_a = EI_i = 480,2 \cdot 99 = 47.540 \text{ W}$$

y la potencia mecánica de salida será:

$$P_2 = P_a - (P_{Fe} + P_m) = 47.540 - 1.500 = 46.040 \text{ W}$$

Como la potencia absorbida por el motor de la red es:

$$P_1 = V \cdot I = 500 \cdot 100 = 50.000 \text{ W}$$

el rendimiento de la máquina será ahora:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{46.040}{50.000} = 92,08\,\%$$

6.9. MOTORES DE C.C.: CARACTERÍSTICAS DE FUNCIONAMIENTO

Los diferentes tipos de motores de c.c. se clasifican de acuerdo con el tipo de excitación, de forma análoga a la que se hacía con los generadores, y así se tiene: motores con excitación independiente, serie, derivación y compuesta. En cada caso el par electromagnético viene determinado por la expresión (6.48):

$$T = K_T \Phi I_i \tag{6.52}$$

Desde un punto de vista práctico, estos motores de c.c. presentan una gran ventaja sobre los motores de c.a., debido a su posibilidad de regulación de velocidad. De acuerdo con la ecuación (6.44), si se incluye en R_i la resistencia del inducido y escobillas se tiene:

$$V = E + R_i I_i \tag{6.53}$$

Teniendo en cuenta la expresión general de la f.e.m.:

$$E = \frac{n}{60} Z\Phi \frac{p}{c} = K_E n\Phi \tag{6.54}$$

y al sustituir en (6.53), despejando la velocidad n, se obtiene:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \Phi} \tag{6.55}$$

que indica la posibilidad de regular la velocidad de un motor de c.c. a base de controlar las siguientes variables:

a) *El flujo por polo producido por la corriente de excitación. Al disminuir el flujo, aumenta la velocidad de rotación, y* ***de ahí el peligro de poner en marcha el motor sin conectar la excitación, ya que dará lugar a un embalamiento del motor****, limitado únicamente por el magnetismo remanente de los polos.*

b) *La tensión de alimentación V, aplicada al motor. Al disminuir/aumentar la tensión de alimentación se reduce/aumenta la velocidad, tal como señala la ecuación (6.55).*

c) *La resistencia del circuito del inducido, lo que se consigue conectando en serie con este devanado una resistencia o reóstato variable. Al aumentar/disminuir la resistencia del inducido, la velocidad disminuye/aumenta, como cabe deducir de la ecuación (6.55).*

Estos métodos se emplean en la práctica de forma independiente o combinada para obtener unas características adecuadas al régimen de trabajo que se necesita, aunque hoy día se han sustituido por procedimientos electrónicos (véase Cap. 7).

Para invertir el sentido de rotación de un motor de c.c. es necesario invertir únicamente la corriente en **uno sólo** de los devanados: inducido o inductor. Si se modifican los sentidos de la corriente de ambos circuitos, el sentido de rotación del motor no se modifica (lo que se justifica por la aplicación de la Ley de Laplace: $\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B})$ a los conductores del inducido). En la práctica, se suele invertir preferentemente la corriente en el inducido para evitar los efectos de la gran autoinducción del inductor, sobre todo en excitaciones de tipo derivación y compuesta.

Un aspecto importante en los motores de c.c. lo constituye el proceso de **arranque**. Hay que tener en cuenta que de acuerdo con (6.53) la corriente del inducido tiene una magnitud:

$$I_i = \frac{V - E}{R_i} \quad \Rightarrow \quad I_i \text{ (arranque directo)} = \frac{V}{R_i} \tag{6.56}$$

como quiera que en el momento de la puesta en marcha la velocidad es nula, se tiene en ese momento una f.c.e.m. también nula, por lo que la corriente del inducido en ese instante será muy elevada, debido a que entonces el motor ofrece a la tensión de la red sólo una pequeña resistencia R_i. Para proteger el motor contra esta corriente de arranque tan fuerte, se utilizan *reóstatos de arranque* conectados en serie con el inducido, pero que también tienen unión con el inductor ya que deben cumplir varias misiones simultáneamente, a saber:

1) *Deben permitir el paso de corriente por el inductor antes o como mucho al mismo tiempo que por el circuito del inducido.*
2) *No pueden realizar el corte del circuito inductor con tensión total o sin asegurar un circuito de descarga para las corrientes de autoinducción del inductor.*
3) *Es deseable que permitan un cambio fácil del sentido de rotación.*

En la Figura 6.34 se muestra el interior de un reóstato de arranque para el accionamiento de un motor de c.c. tipo derivación y que cumple las misiones anteriores. El reóstato tiene tres terminales *L*, *F* y *A*, que se conectan respectivamente a la línea de alimentación, al circuito del inductor y al del inducido (¡*es importante no confundirse con estas conexiones ya que cualquier confusión entre ellas provoca un comportamiento defectuoso del motor*!). La resistencia total de arranque (que se hace con hilo de aleaciones especiales de hierro-níquel o constantán y en forma de muelle en espiral, aunque también se utilizan para motores de gran potencia resistencias de hierro fundido sumergidas en aceite de transformador), se subdivide en diversos tramos, y que en el caso de la Figura 6.34 se han reducido a cuatro: R_1, R_2, R_3 y R_4, y que tienen conexiones a unas piezas de latón denominadas *plots* 1, 2, 3, 4, y 5. Los valores de las resistencias entre dos plots consecutivos se calculan de tal modo que se mantenga la corriente de arranque en cada paso dentro de un rango, conforme el motor va aumentando la velocidad. El movimiento del reóstato se realiza mediante una manivela que en la posición inicial toca *un plot aislado* o *muerto* (posición *off* o de parada). El operador mueve la manivela en el sentido de las agujas del reloj, por medio de un mango o manivela aislante, venciendo la acción antagonista de un muelle en espiral. Al pasar la manivela a la posición 1, el motor inicia su marcha, añadiéndose al inducido la resistencia total del reóstato ($R_1 + R_2 + R_3 + R_4$), lo que permite limitar al máximo la corriente de arranque I_i del inducido. Conforme la manivela pasa por los plots 2, 3 y 4 el motor se va acelerando porque se va reduciendo la resistencia que introduce el reóstato de arranque que está en serie con el inducido del motor, hasta que finalmente en la posición del plot 5, se ha eliminado totalmente la resistencia en serie, quedando aplicada toda la tensión *V* de la red al inducido.

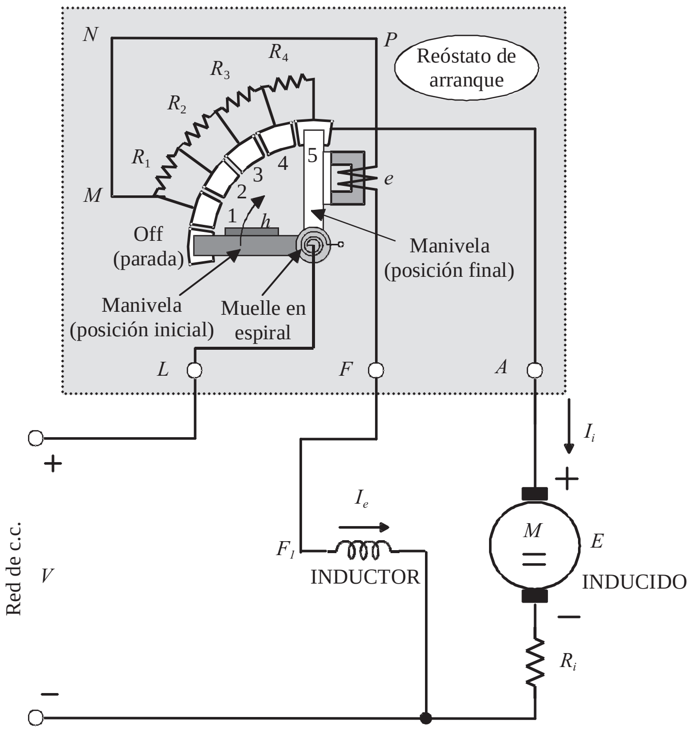


Figura 6.34. Reóstato de arranque y su conexión.

Debe observarse en la Figura 6.34 que esta misma resistencia de arranque se introduce en serie con el devanado inductor pero en sentido contrario, porque en el plot 1 el inductor se alimenta con toda la tensión de la red por el camino que va desde la manivela hasta el terminal *F*, a través de la línea *MNP* y el electroimán *e*. En esta situación el inductor lleva la máxima corriente para que el flujo sea máximo y mínima la velocidad. Conforme se mueve la manivela se va introduciendo la resistencia del reóstato de arranque en el circuito inductor para que el motor vaya subiendo de velocidad, ya que simultáneamente al inducido le llega más tensión y al inductor menos. Por ejemplo cuando la manivela pasa del plot 1 al plot 2, la resistencia en serie con el devanado inductor ha pasado de cero (se desprecia la resistencia del electroimán *e*) a R_1 y el circuito del inducido que tenía en el plot 1 la resistencia en serie ($R_1 + R_2 + R_3 + R_4$) ha pasado a tener en el plot 2 la resistencia en serie ($R_2 + R_3 + R_4$). En definitiva lo que ocurre con este reóstato de arranque es que a medida que se va reduciendo la resistencia que se introduce en el circuito del inducido, se va aumentando simultáneamente la resistencia del circuito inductor. El paso de la corriente por ambos circuitos es simultánea tal como se exigía en la condición 1 mencionada anteriormente.

Por otra parte la manivela lleva acoplada en su parte anterior una pieza de hierro *h*, para que cuando llegue a la posición final del plot 5, quede enclavada mecánicamente debido a la atracción magnética ejercida por el electroimán *e* sobre la pieza de hierro *h*, venciendo la acción antagonista del muelle en espiral. Obsérvese en la Figura 6.34 que este electroimán *e* está en serie con el circuito inductor del motor, por lo que la propia corriente de excitación I_e circula por la bobina del electroimán *e* para producir la fuerza de atracción necesaria. Es por ello que si la tensión de la red *V* disminuyera notablemente, la fuerza ejercida por el electroimán sería insuficiente para pegar la pieza de hierro *h* y la manivela regresaría automáticamente a la posición de parada (*off*) debido a la mayor fuerza del muelle antagonista. De este modo si en un instante posterior se restableciera la tensión a su valor nominal o asignado, se evitaría la alta corriente de arranque que aparecía al haber quedado la manivela en la posición final sobre el plot 5. Es por ello que este electroimán recibe el nombre de *relé de protección de mínima tensión*. Del mismo modo, esta desconexión automática del reóstato de arranque se produciría si por alguna causa se abriera el circuito de excitación, ya que entonces la corriente I_e se anularía, por lo que el flujo inductor se reduciría al valor correspondiente al magnetismo remanente de los polos, lo que según la expresión (6.55) provocaría un embalamiento peligroso del motor. También el paso de la posición final 5 del reóstato de arranque a la posición cero se puede hacer de una forma manual, basta con iniciar el movimiento de la manivela en sentido contrario a las agujas del reloj para que una vez que se despegue la pieza de hierro *h* del electroimán *e* se vuelva automáticamente la manivela al punto muerto o de parada (*off*), por la acción mecánica del muelle en espiral. Obsérvese que en este punto muerto se produce la desconexión de la red tanto del circuito inductor como del inducido, sin embargo el circuito inductor no se ha cortado ya que sigue unido al circuito del inducido a través de toda la resistencia del reóstato de arranque y el electroimán *e*; de este modo el inducido constituye una resistencia de descarga a través del reóstato de arranque y la producción de chispa es muy atenuada, puesto que la mayor parte de la energía almacenada en la autoinducción del inductor se disipa en este circuito cerrado por el inducido. Con ello se justifica la condición 2) antes mencionada que deben cumplir los reóstatos de arranque.

Algunos reóstatos de arranque incluyen además en su caja interior un *relé de protección de sobrecorriente* del motor, que consiste en un segundo electroimán cuya bobina se conecta en serie con el inducido de la máquina, de tal modo que cuando la corriente de este circuito supera un cierto valor, la armadura de este electroimán cierra un contacto que puentea los terminales del electroimán *e*, por lo que se produce la desexcitación de éste, lo que hace que

la manivela retorne bruscamente a la posición *off* de parada, protegiendo así al motor de las sobrecorrientes peligrosas. El ritmo de paso del reóstato de arranque de un plot al siguiente depende de la experiencia del operador, pero debe ser lenta y progresiva, para evitar los picos de corriente que pueden dañar al motor.

De cualquier modo, tenga el reóstato de arranque uno o dos relés de protección, una vez finalizada la operación de arranque, si se desea obtener una variación fina de la velocidad del motor se puede conseguir incluyendo un reóstato de regulación entre los punto F y F_1 de la Figura 6.34 para que esté en serie con el devanado de excitación. Ambas operaciones de arranque y regulación se simplifican notablemente utilizando combinadores (*controllers*) especiales que con una misma manivela realizan ambas acciones simultáneamente e incluso la inversión de corriente en uno de los devanados para conseguir cambiar el sentido de rotación del motor. También se pueden utilizar resistencias fijas sustituyendo a los reóstatos y que se van intercalando en los circuitos del inducido (arranque) y el inductor (regulación) mediante la acción combinada de contactores y relés de tiempo. En la actualidad todas estas operaciones se realizan con la ayuda de convertidores electrónicos (véase el Capítulo 7); sin embargo, por motivos didácticos se supondrá a lo largo de este capítulo que se utilizan reóstatos similares a los explicados aquí para realizar la maniobras correspondientes en los motores de c.c, ya que permiten explicar con sencillez la respuesta de estas máquinas, analizando con detalle la relación $n = f(T)$ que tanta importancia tiene en el diseño de los accionamientos eléctricos.

6.9.1. Motores de c.c. con excitación independiente y derivación. Sistema de regulación Ward-Leonard

Los esquema de conexiones para el arranque y regulación de velocidad de estos motores de c.c. son similares entre sí y se muestran en la Figura 6.35. En el caso de excitación independiente (Fig. 6.35*a*), los circuitos del inductor y del inducido se alimentan de fuentes distintas, mientras que en el caso de motor derivación (*shunt*) las fuentes coinciden. Es por ello que si la tensión de alimentación al inducido se supone constante ($V = V_e$) no hay diferencia práctica en el comportamiento de estos dos tipos de motores, y por ello en este epígrafe se van a estudiar ambas máquinas al mismo tiempo.

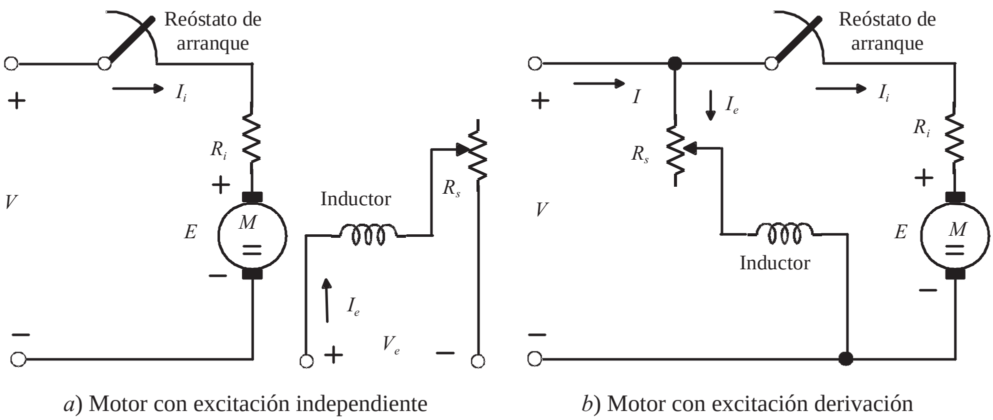


Figura 6.35. Motores con excitación independiente y derivación.

En principio la explicación se ciñe al motor derivación, pero cuando existan diferencias con el motor con excitación independiente se tratará éste de modo concreto. En cualquier caso, durante la puesta en marcha interesa que el flujo en el entrehierro posea su valor máximo, de esta forma el motor podrá desarrollar el par de arranque necesario con la corriente mínima posible en el inducido. Es por ello que desde el primer instante de la puesta en marcha, el devanado de excitación debe de estar conectado a la tensión de la red; además, el reóstato R_s conectado en serie con el inductor deberá tener la mínima resistencia para que sea también máxima la corriente de excitación o campo. Para deducir analíticamente las características $n = f(T)$ de estos motores se va a suponer inicialmente que trabajan en la zona lineal de la curva de magnetización. De acuerdo con las expresiones (6.52), (6.53) y (6.54), se tiene:

$$T = K_T \Phi I_i \quad ; \quad V = E + R_i I_i \quad ; \quad E = K_E n \Phi \qquad (6.57)$$

de donde resulta:

$$I_i = \frac{V - K_E n \Phi}{R_i} \qquad (6.58)$$

que conduce a una expresión de la velocidad en función del par:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \Phi} = \frac{1}{K_E \Phi} V - \frac{R_i}{K_E K_T \Phi^2} T \qquad (6.59)$$

Estando funcionando el motor derivación con un par resistente determinado, al aumentar éste se producirá un frenado en la máquina, disminuyendo la velocidad del rotor; como consecuencia de ello la f.c.e.m. $E = K_E n \Phi$ del motor se reducirá, por lo que según (6.58) aumentará la corriente absorbida por el inducido y el par de la máquina $T = K_T \Phi I_i$ se elevará igualándose con el nuevo par resistente ofrecido por la carga. De acuerdo con la expresión (6.59), la curva par-velocidad $n = f(T)$ del motor derivación (y por extensión, del motor con excitación independiente) es una línea recta, como así se muestra en la Figura 6.36*a*. La ecuación de esta recta para los valores asignados de tensión aplicada, resistencia asignada del inductor y resistencia asignada del inductor (sin resistencia adicional en el circuito de campo) se denomina ***característica natural de la máquina***.

La velocidad del motor en vacío (para $T = 0$) viene definida por el término $n_0 = V/K_E \Phi$ de la ecuación (6.59). Para altos pares de carga, aumenta la corriente del rotor y por ello se reduce el flujo resultante a consecuencia de la reacción del inducido; de ahí que en realidad la característica $n = f(T)$ de estos motores se desvíe ligeramente de la recta anterior. La caída de velocidad con el aumento del par en la curva anterior es muy pequeña (del orden del 5 por 100 al 10 por 100), lo que indica que los motores derivación presentan una característica de carga *dura* o *rígida* (similar a la de los motores asíncronos) y por ello se utilizan en aquellas aplicaciones que requieran una velocidad casi constante: ventiladores, bombas centrífugas, cintas transportadoras, máquinas herramientas, etc.

De acuerdo con la expresión (6.59), y como ya se ha indicado en el epígrafe 6.9, la regulación de velocidad de los motores derivación e independiente se consigue de las formas siguientes: *a) ajustando la tensión del inducido; b) variando la resistencia del circuito del inducido (aunque este procedimiento es poco práctico por las pérdidas que se producen, y de ahí su bajo rendimiento); c) cambiando la resistencias del circuito de excitación, que regula a su vez el flujo del motor.* Estudiemos a continuación cada uno de estos métodos.

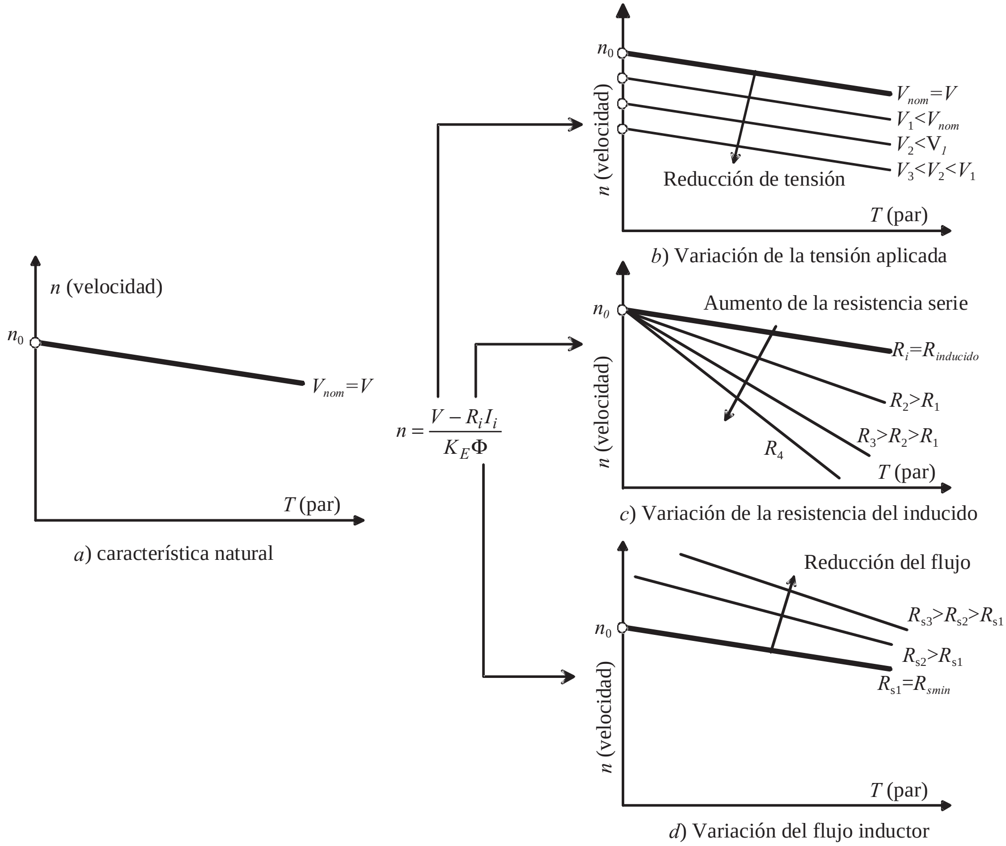


Figura 6.36. Características par-velocidad de un motor derivación o shunt.

a) Regulación de velocidad por cambio en la tensión aplicada al inducido

Este sistema de control solamente se puede aplicar al motor con excitación independiente, ya que es el que tiene separados los circuitos de excitación y de inducido. Al reducir la tensión de alimentación V, y de acuerdo con (6.58), la corriente I_i disminuye, por lo que el par desarrollado por el motor se reduce y, al hacerse inferior al par resistente, se produce una disminución de la velocidad de la máquina. Al contrario, si aumenta la tensión aplicada, se produce una elevación de la velocidad. En la Figura 6.36*b* se muestran las curvas (rectas) par-velocidad que se obtienen cuando se regula la velocidad de un motor de c.c. con excitación independiente empleando este procedimiento. Se observa que la velocidad en vacío $n_0 = V/K_E\Phi$ va cambiando con este método, ya que ésta es proporcional a la tensión aplicada; sin embargo, no se modifican las pendientes de las rectas respectivas (porque no se altera ni el valor del flujo ni la resistencia en serie del inducido). Es decir, resultan una serie de rectas paralelas a la característica natural de la máquina y que están por debajo de ésta, ya que la tensión aplicada se va disminuyendo por debajo de la tensión asignada (que sería la máxima prevista para no dañar los aislamientos de la máquina).

b) Regulación de velocidad por cambio en la resistencia en serie con el inducido

Al introducir una resistencia adicional en el circuito del inducido se produce un aumento muy fuerte en la pendiente de la característica par-velocidad de la máquina, lo que está justificado por la ecuación (6.59). Este sistema es válido tanto para los motores con excitación derivación como para motores con excitación independiente. En la Figura 6.36*c* se muestra la evolución de las rectas correspondientes. Como ya se ha indicado, este procedimiento de control de velocidad es bastante antieconómico, ya que al circular la elevada corriente de inducido por esta resistencia adicional (reóstato) las pérdidas por efecto Joule son muy elevadas, y es por ello que solamente se utiliza en motores de pequeña potencia. Obsérvese en la Figura 6.36*c* que todas las rectas que se obtienen (que se denominan ***características artificiales*** o ***reostáticas***) pasan por el punto correspondiente a la velocidad de vacío de la máquina n_0 (ya que esta velocidad depende solamente de la tensión aplicada V y del flujo inductor Φ).

c) Regulación de velocidad por cambio en la resistencia en serie con el inductor

Al introducir una resistencia adicional en el circuito del inductor se produce una disminución en el flujo inductor de la máquina (tanto si el motor es con excitación independiente o derivación), lo que se traduce en un aumento en la velocidad del motor. Para comprender la sucesión de fenómenos que resultan, téngase en cuenta que al introducir una resistencia adicional en el circuito inductor con ayuda de la resistencia o reóstato variable R_s de la Figura 6.35 se produce una disminución tanto de la corriente de excitación como del flujo inductor. Como consecuencia de ello, se reduce la f.c.e.m. del motor, lo que provoca un aumento de la corriente del inducido absorbida por la máquina. El par del motor $T = K_T \Phi I_i$ aumenta, ya que la disminución de flujo está compensada con creces por el aumento en la corriente del inducido. Como consecuencia del aumento del par motor se produce una elevación de la velocidad de la máquina.

La explicación analítica de lo anterior se justifica con la ayuda de la ecuación (6.59), que volvemos a repetir aquí:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \Phi} = \frac{1}{K_E \Phi} V - \frac{R_i}{K_E K_T \Phi^2} T \tag{6.60}$$

Es evidente que al reducirse el flujo se produce un aumento de la velocidad en vacío n_0, que se deduce de la ecuación anterior:

$$n_0 = \frac{1}{K_E \Phi} V \tag{6.61}$$

y un aumento sustancial de la pendiente de las rectas correspondientes, que vienen definidas por el valor del coeficiente que afecta al par en la ecuación (6.60):

$$-\frac{R_i}{K_E K_T \Phi^2} \tag{6.62}$$

De este modo, si se desprecia la reacción de inducido de la máquina, al variar la resistencia del inductor se obtienen un haz de rectas que están por encima de la característica natural del motor, tal como se muestra en la Figura 6.36*d*. En resumen:

a) *En la regulación de velocidad por ajuste de la tensión aplicada al inducido (caso de motores con excitación independiente), cuanto menor es la tensión aplicada, menor es la velocidad, y cuanto mayor es la tensión, más elevada es la velocidad que alcanza el motor. Existe una velocidad máxima que puede alcanzar la máquina con este procedimiento, y corresponde al valor máximo de la tensión permitida (tensión asignada).*

b) *La regulación por variación de la resistencia del inducido solamente se aplica a pequeñas máquinas en virtud de su bajo rendimiento. Cuanto mayor es la resistencia que se añade al circuito del inducido, tanto menor será la velocidad que adquiere la máquina. En definitiva, se produce una mayor caída de tensión en el circuito serie añadido, por lo que llegará una tensión menor al motor. Esto es, resulta una variante al caso anterior de control por tensión en el inducido.*

c) *En la regulación por resistencia de excitación, cuanto mayor es la resistencia de este circuito menor es el flujo y mayor es la velocidad, y a la inversa, cuanto mayor es el flujo menor es la velocidad. Existe una velocidad mínima que puede adquirirse con este método y que se presenta cuando circula por el circuito de campo la máxima corriente permitida por los devanados.*

Cuando un motor de c.c. funciona con sus valores de tensión, corriente de excitación y potencia asignadas o nominales se dice que gira a la *velocidad base (asignada)*. La regulación por control de la tensión aplicada al inducido se realiza para velocidades inferiores a la velocidad base, pero no para velocidades superiores a ella, ya que requeriría una tensión mayor que la asignada, por lo que podría dañarse el inducido. La regulación por control de la corriente de excitación se emplea para velocidades superiores a la velocidad base.

Cuando se requiere un accionamiento eléctrico que tenga una regulación de velocidad amplia (por ejemplo, del orden de 30 a 1), el motor más adecuado es el de ***excitación independiente***, en el que se controla tanto la tensión del inducido como la corriente de excitación de un modo independiente. Si la tensión en los bornes se puede regular suavemente desde cero hasta un valor máximo, es posible obtener una gama extensa de velocidades sin necesidad de emplear reóstatos de arranque, lo que hace que este sistema tenga un gran rendimiento. Existen varios esquemas de regulación, pero el más conocido se denomina **sistema Ward-Leonard**. Consiste en un motor asíncrono trifásico que lleva acoplado mecánicamente un generador de c.c. de excitación separada, cuyo ajuste permite obtener diferentes tensiones de salida en escobillas. El generador alimenta posteriormente el inducido de un motor de c.c. con excitación independiente (Fig. 6.37). La tensión necesaria para la alimentación de los inductores se obtiene de un pequeño generador en derivación (excitatriz) acoplado al mismo eje mecánico del grupo motor de c.a.-generador de c.c. La polaridad del inductor del generador principal se puede invertir con objeto de proceder al cambio del sentido de marcha del motor de c.c.

Durante la puesta en marcha se actúa sobre el reóstato del generador R_g para que la tensión de salida del generador sea reducida y evitar así fuertes corrientes de arranque. Para una determinada corriente I_i suministrada por el generador y absorbida por el motor, la variación de velocidad desde cero a un límite inferior n_1, que es la velocidad base se efectúa a flujo constante en el valor correspondiente a plena excitación (corriente de excitación asignada), aumentando progresivamente la tensión del generador V hasta alcanzar la tensión asignada del motor. En estas condiciones, el par desarrollado por el motor es:

$$T = K_T \Phi I_i = C_1 \text{ (constante)} \tag{6.63}$$

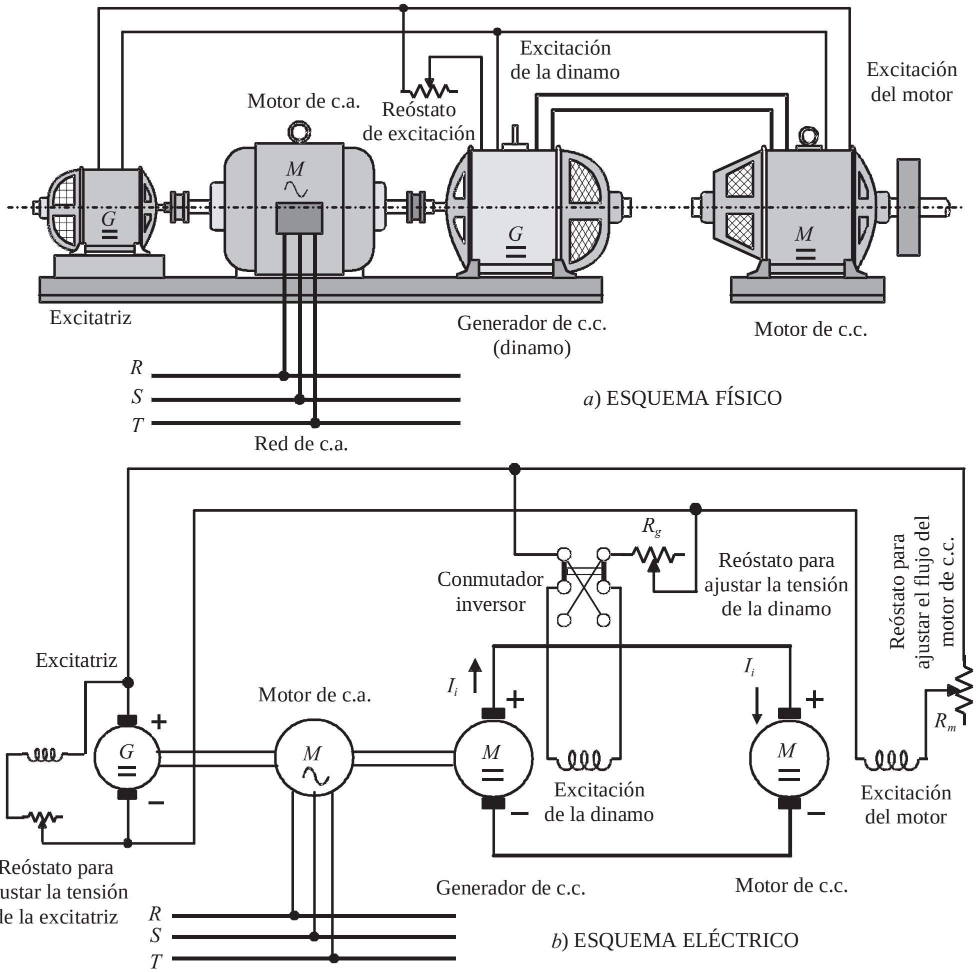


Figura 6.37. Sistema de regulación de velocidad Ward-Leonard.

Si se desprecia la caída de tensión en el circuito del inducido, la velocidad del motor viene expresada por:

$$n = \frac{V}{K_E\Phi} = C_2V \tag{6.64}$$

donde C_2 es una constante. La potencia desarrollada por el motor en estas condiciones será:

$$P = T\frac{2\pi n}{60} = C_1\frac{2\pi}{60}C_2V = A \cdot V \tag{6.65}$$

en la que A representa una constante. De este modo, en esta fase, el par se mantiene constante y la potencia va aumentando linealmente con la velocidad, que a su vez va elevándose conforme aumenta la tensión aplicada V. Este modo de funcionamiento está representado por la parte izquierda de las curvas par, potencia mostradas en la Figura 6.38.

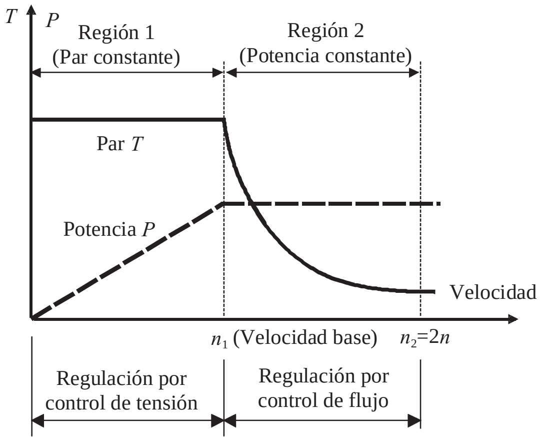


Figura 6.38. Regulación de velocidad a potencia constante y a par constante.

A partir de la velocidad base n_1, el control de la misma se lleva a cabo manteniendo constante la tensión aplicada (que en la etapa anterior había alcanzado el valor asignado) y reduciendo el flujo del motor, y de este modo se cumple:

$$P = V_n I = \text{costante} \quad ; \quad T = \frac{P}{2\pi \dfrac{n}{60}} \quad ; \quad V = V_n = \text{costante} = K_E \Phi n \qquad (6.66)$$

lo que indica que en esta segunda etapa la potencia se mantiene constante y que al mismo tiempo, siendo constante el producto del flujo por la velocidad (ecuación de una hipérbola), el par se irá reduciendo de un modo hiperbólico a medida que aumenta la velocidad. Esta situación está representada en la parte derecha de la Figura 6.38, donde la velocidad del motor va aumentando hasta llegar a su valor máximo, definido por n_2.

El sistema Ward-Leonard se ha empleado ampliamente en la industria para el accionamiento de los trenes de laminación (fábricas siderúrgicas), en los ascensores de velocidad media y elevada en grandes edificios, para accionar máquinas de arrastre de papel, grúas, etc. Hoy día existen grupos Ward-Leonard estáticos a base de convertidores electrónicos que suministran una tensión variable para alimentar tanto el inductor como el inducido del motor eliminando el sistema rotativo motor de c.a.-dinamo, lo que mejora el rendimiento de grupo y reduce el nivel de ruido.

6.9.2. Motor de c.c. con excitación serie

El esquema de conexiones de este tipo de motor es el indicado en la Figura 6.39. El flujo de la máquina depende de la corriente del inducido $I = I_i$, y en consecuencia depende de la carga. Si no hay saturación en el circuito magnético, el flujo es directamente proporcional a la corriente I_i, y la característica de carga se puede obtener de las ecuaciones básicas (6.52), (6.53) y (6.54):

$$T = K_T \Phi I_i \quad ; \quad V = E + R_i I_i \quad ; \quad E = K_E n \Phi \qquad (6.67)$$

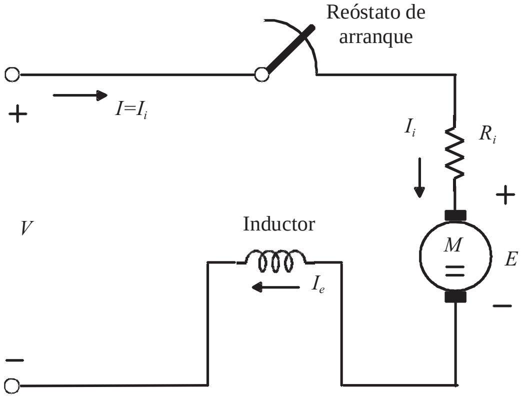


Figura 6.39. Motor serie de c.c.

que en el supuesto de que el motor no esté saturado y se cumpla la proporcionalidad $\Phi = K_I I_i$ resulta:

$$T = K_T K_I I_i^2 \quad \Rightarrow \quad I_i = \sqrt{\frac{T}{K_T K_I}} \tag{6.68}$$

lo que conduce a una característica del par teniendo en cuenta (6.55) que viene definida por la siguiente ecuación:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \Phi} = \frac{V}{K_E K_I I_i} - \frac{R_i}{K_E K_I} = \frac{1}{K_E}\sqrt{\frac{K_T}{K_I}}\frac{V}{\sqrt{T}} - \frac{R_i}{K_E K_I} \tag{6.69a}$$

y denominando a y b a las siguientes constantes:

$$a = \frac{1}{K_E}\sqrt{\frac{K_T}{K_I}} \quad ; \quad b = \frac{R_i}{K_E K_I}$$

la ecuación (6.69a) se transforma en:

$$n = a\frac{V}{\sqrt{T}} - b \approx a\frac{V}{\sqrt{T}} \quad \Rightarrow \quad n^2 T = aV = \text{constante} \tag{6.69b}$$

Donde se ha tenido en cuenta que al ser la resistencia del inducido R_i muy pequeña, el término b es despreciable, por lo que con *tensión de alimentación constante el par de un motor serie varía en relación inversa con el cuadrado de la velocidad*. En la Figura 6.40 se muestra la representación de la curva anterior $n = f(T)$, en la que el par de arranque es el que tiene la máquina para $n = 0$ y que de acuerdo con (6.69) vale $T_{arr} = a^2V^2/b^2$ y que debido al bajo valor de b, nos indica que el par de arranque de estos motores es muy elevado (debe señalarse que en condiciones de saturación, al ser el flujo constante, puede demostrar el lector que la característica par/velocidad tiende a ser una hipérbola equilátera nT = constante). Si se desprecia la reacción del inducido y la saturación magnética, se puede considerar que al duplicarse el par aplicado al eje del motor, la corriente consumida por el mismo aumenta [de acuerdo con la primera ecuación (6.68)] sólo un 140 por 100 del valor original, y el número de revoluciones, si se tiene en cuenta (6.69b), cae hasta un 70 por 100 del valor primitivo.

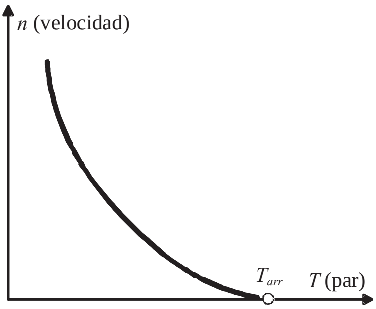


Figura 6.40. Curvas par-velocidad de un motor serie.

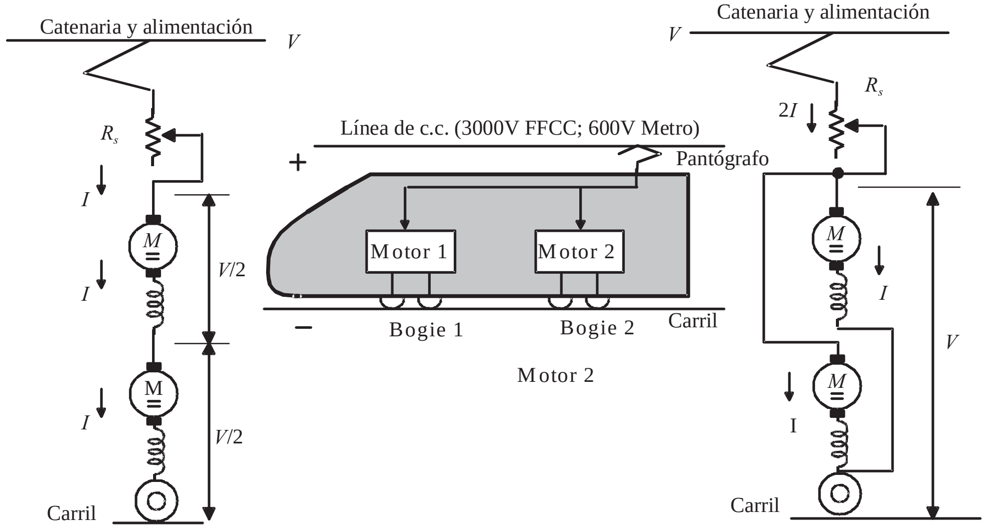
En un motor derivación esta misma sobrecarga no altera prácticamente la velocidad, pero en cambio, la máquina consumiría una corriente doble de la inicial. El motor en serie puede, por tanto, soportar elevadas sobrecargas, aumentando con ello sólo moderadamente la corriente. Esto constituye su más valiosa propiedad. Al disminuir el par resistente, el motor reduce lentamente su consumo de corriente, aunque su velocidad se eleva rápidamente y, para cargas inferiores al 25 por 100 de la asignada, esta velocidad adquiere valores peligrosos para la integridad del motor. Por esta razón el motor serie ***no debe ser arrancado en vacío o con una carga pequeña***.

Las propiedades tan valiosas de este motor lo hacen apropiado para la tracción eléctrica: trenes, tranvías, trolebuses y también en grúas donde son necesarios altos pares a bajas velocidades y viceversa. La regulación de la velocidad de estos motores, a diferencia con el motor derivación, se realiza solamente por control de la tensión aplicada al motor. Este procedimiento puede realizarse de manera económica si se dispone por lo menos de dos motores (pueden ser también cuatro o seis), como sucede en los ferrocarriles eléctricos urbanos o interurbanos. Cada coche motor va equipado con dos motores serie, uno acoplado al *bogie** delantero que impulsa las ruedas motrices delanteras y otro acoplado al boje trasero impulsando sus respectivas ruedas traseras (Fig. 6.41).

Las velocidades de ambos motores son iguales en todo momento. La variación de velocidad se consigue con la conexión serie-paralelo de ambos motores, de esta forma pueden obtenerse dos velocidades básicas de trabajo con un buen rendimiento energético. Inicialmente los motores están conectados en serie a través de una resistencia variable que se va eliminando gradualmente mediante un combinador de tambor** hasta que se obtiene una tensión en bornes de cada motor, mitad de la línea. Con ello se obtiene la primera posición de marcha. En este momento, al no existir ninguna resistencia externa en el circuito, se obtiene un gran rendimiento del conjunto. Cuando se desea aumentar la velocidad del vehículo se cambia la conexión en serie de los motores y se pasa a paralelo insertando al mismo tiempo entre ellos y la línea una resistencia exterior. Esta resistencia se va eliminando poco a poco hasta que los motores funcionan a plena tensión de línea, obteniendo la segunda posición estable de funcionamiento.

* El término *bogie* es un anglicismo que se emplea mucho en el mundo ferroviario, aunque en castellano existe el vocablo equivalente *boje*, que se utiliza muy poco.

** Un combinador (*controller*) consiste en un tambor metálico con conexiones adecuadas para realizar por medio de una manivela de accionamiento las operaciones de arranque, regulación de velocidad e inversión en los motores de tracción. Hoy día se ha sustituido totalmente por dispositivos automáticos electrónicos.



a) CONEXIÓN SERIE DE LOS MOTORES

b) CONEXIÓN PARALELO DE LOS MOTORES

Figura 6.41. Conexión en serie y en paralelo de motores serie de c.c. en tracción eléctrica.

Para comparar ambos tipos de conexiones se van a suponer despreciables las resistencias de los circuitos de ambos motores y se va a admitir que el circuito magnético no está saturado. De esta forma las ecuaciones generales del par y la velocidad en cada máquina son:

$$n = \frac{V_i - R_i I_i}{K_E \Phi} \approx \frac{V_i}{K_E \Phi} = \frac{V_i}{K_E K_I I_i} = C_1 \frac{V_i}{I_i}$$

$$T = K_T \Phi\, I_i = K_T K_I I_i^2 = C_2 I_i^2 \qquad (6.70)$$

donde C_1 y C_2 son constantes, K_I expresa la proporcionalidad entre el flujo y la corriente y V_i indica la tensión en bornes de cada motor. Si se considera una carga que ofrece un par constante, de acuerdo con (6.70) las corrientes del inducido en cada tipo de acoplamiento son idénticas, resultando el esquema de reparto de intensidades que se muestra en la Figura 6.41, y se cumple:

a) **CONEXIÓN SERIE**: $V_i = V/2 \quad ; \quad I_i = I$

$$n_s = C_1 \frac{V/2}{I} \quad ; \quad T_s = C_2 I^2 \qquad (6.71)$$

b) **CONEXIÓN PARALELO**: $V_i = V \quad ; \quad I_i = I$

$$n_p = C_1 \frac{V}{I} = 2n_s \quad ; \quad T_p = C_2 I^2 = T_s \qquad (6.72)$$

es decir, a igualdad de par, con la conexión paralelo puede obtenerse una velocidad doble que con el acoplamiento serie.

6.9.3. Motor de c.c. con excitación compuesta

El esquema de conexiones de este motor es el indicado en la Figura 6.42*a*. El devanado de excitación serie puede conectarse de forma que refuerce el campo derivación (aditivo) o que

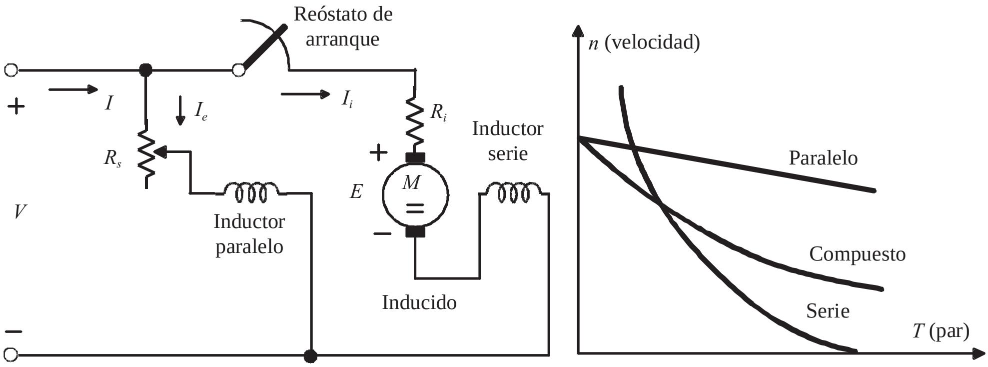


Figura 6.42. Motor con excitación compuesta. Curvas par-velocidad de los motores de c.c.

se oponga al mismo (diferencial). La corriente del devanado derivación es constante, mientras que la intensidad del arrollamiento serie aumenta con la carga; de esta forma, se obtiene un flujo por polo que aumenta también con la carga, pero no tan rápidamente como en el motor serie. La característica mecánica de estos motores es la mostrada en la Figura 6.42*b*, y es intermedia entre las curvas del motor derivación y serie.

Ejemplo de aplicación 6.7

Un motor tipo derivación de 240 V tiene una resistencia de inducido (incluyendo las escobillas y los polos auxiliares) de 0,04 Ω y una resistencia de campo o excitación de 100 Ω. a) Hallar el valor de la resistencia que debe añadirse al circuito inductor para incrementar la velocidad de 1.200 a 1.500 r.p.m. cuando la corriente de alimentación sea de 200 A; b) Con una resistencia de campo como en el caso a), hallar la velocidad cuando la corriente de alimentación sea de 100 A. Si la máquina gira como generador para dar 200 A a 240 V, hallar: c) la corriente de campo a 1.200 r.p.m.; d) la velocidad cuando la corriente de excitación sea de 2 A. NOTA: La curva de magnetización se supone lineal.

Solución

a) El esquema de la máquina es el mostrado en la Figura 6.43. Con R_e = 100 Ω la corriente de excitación vale 240/100 = 2,4 A. Si la corriente de alimentación es de 200 A, la intensidad que atraviesa el inducido es:

$$I_i = I - I_e = 200 - 2{,}4 = 197{,}6 \text{ A}$$

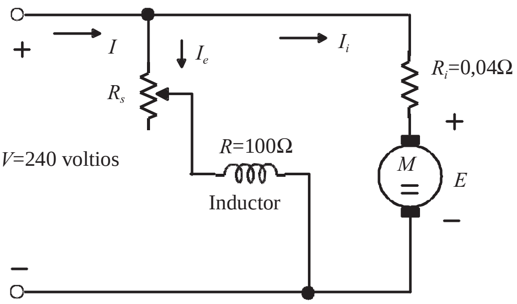


Figura 6.43.

En consecuencia, la f.e.m. del motor en estas condiciones será:

$$E = V - R_i I_i = 240 - 0{,}04 \cdot 197{,}6 = 232{,}1 \text{ V}$$

De acuerdo con la expresión (6.54), la f.e.m. es igual a:

$$E = K_E n \Phi$$

y como quiera que se considera lineal la curva de magnetización, se podrá poner:

$$E = K_e n I_e$$

Es decir, la f.e.m. es directamente proporcional a la velocidad y a la corriente de excitación. Si se denominan E' e I_e' los valores de la f.e.m. y corriente en el inductor a 1.500 r.p.m., resultará la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{E}{E'} = \frac{nI_e}{n'I_e'} \quad ; \quad \frac{232{,}1}{E'} = \frac{1.200 \cdot 2{,}4}{1.500 \cdot I_e'}$$

y por tanto:

$$E' = 120{,}88\, I_e' \tag{1}$$

Ahora bien, las magnitudes E' e I_e' responden a las siguientes ecuaciones de circuito:

$$E' = V - R_i I_i \quad ; \quad I_i = I - I_e'$$

y se puede poner:

$$E' = V - R_i\,(I - I_e')$$

que sustituyendo valores conduce a la ecuación:

$$E' = 240 - 0{,}04\,(200 - I_e') = 232 + 0{,}04 \cdot I_e'$$

y teniendo en cuenta (1) se obtienen los valores:

$$E' = 232{,}1 \text{ V} \quad ; \quad I_e' = 1{,}92 \text{ A}$$

En consecuencia, la resistencia total del circuito de excitación será:

$$R_e' = \frac{V}{I_e'} = \frac{240}{1{,}92} = 125\ \Omega$$

Como el inductor tenía 100 Ω de resistencia, habrá que añadir una resistencia en el circuito de 125 − 100 = 25 Ω.

b) La corriente del inducido será en este caso:

$$I_i = I - I_e' = 100 - 1{,}92 = 98{,}08 \text{ A}$$

que conduce a una f.e.m. E'':

$$E'' = V - R_i I_i = 240 - 0{,}04 \cdot 98{,}08 = 236{,}07 \text{ V}$$

y aplicando ahora la relación de proporcionalidad de f.e.m.s. queda:

$$\frac{E}{E''} = \frac{nI_e}{n''I_e''} \quad ; \quad \frac{232{,}1}{236{,}07} = \frac{1.200 \cdot 2{,}4}{n'' \cdot 1{,}92}$$

de donde resulta una velocidad de 1.525,6 r.p.m.

c) Denominando E_g a la f.e.m. del generador, al aplicar la proporcionalidad de f.e.m.s. resulta:

$$\frac{E}{E_g} = \frac{nI_e}{n_g I_{eg}} \quad ; \quad \frac{232{,}1}{E_g} = \frac{1.200 \cdot 2{,}4}{1.200 \cdot I_{eg}}$$

es decir: $E_g = 96{,}71\ I_{eg}$. En un generador se cumplen además las siguientes ecuaciones de circuito:

$$I_i = I + I_{eg} \quad ; \quad E = V + R_i I_i = V + R(I + I_{eg})$$

Sustituyendo valores queda: $E_g = 240 + 0{,}04\ (200 + I_{eg}) = 248 + 0{,}04\ I_{eg}$, que junto con la expresión $E_g = 96{,}71\ I_{eg}$ dan como soluciones:

$$E_g = 248{,}1\ V \quad ; \quad I_{eg} = 2{,}56\ \text{A}$$

d) En este caso, la corriente de inducido es igual a 200 + 2 = 202 A, que conduce a una f.e.m. E'_g:

$$E'_g = 240 + 0{,}04 \cdot 202 = 249{,}08\ \text{V}$$

y al aplicar la proporción de f.e.m.s. se obtiene:

$$\frac{232{,}2}{248{,}08} = \frac{1.200 \cdot 2{,}4}{n \cdot 2} \quad ; \quad n = 1.539{,}1\ \text{r.p.m.}$$

Ejemplo de aplicación 6.8

Un motor tipo serie de 110 V cuando gira a 1.500 r.p.m. y consume 35 A desarrolla un par electromagnético de 20 N.m. La resistencia del motor es de 0,3 Ω. ¿A qué velocidad girará el motor: a) cuando el par desarrollado sea de 15 N.m, suponiendo que el flujo sea proporcional a la corriente; b) cuando la corriente sea el doble, suponiendo que el flujo aumente un 30%?

Solución

a) El esquema de circuito es el que se muestra en la Figura 6.44. La f.c.e.m. del motor cuando absorbe una corriente de 35 A es:

$$E = V - R_i I_i = 110 - 0{,}3 \cdot 35 = 99{,}5\ \text{V}$$

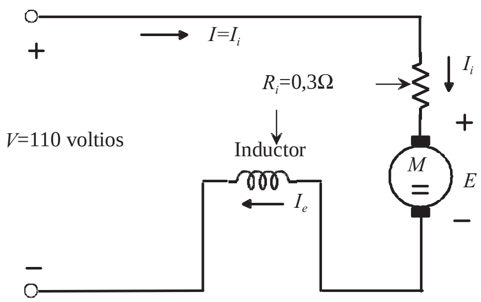


Figura 6.44.

Igualando la potencia electromagnética a la potencia mecánica, resulta:

$$EI_i = T\frac{2\pi n}{60} \quad ; \quad 99{,}5 \cdot 35 = 20\,\frac{2\pi n}{60}$$

es decir, $n = 1.662{,}8$ r.p.m.

Si se denominan E', I_i' y n' la f.c.e.m., la corriente del inducido y la velocidad de rotación del motor cuando desarrolla un par de 15 N.m, se cumplirá:

$$E'I_i' = T'\frac{2\pi n'}{60} = (V - R_i I_i')I_i'$$

que al sustituir valores da:

$$15 \cdot \frac{2\pi n'}{60} = (110 - 0{,}3 \cdot I_i')I_i' \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que en el supuesto de considerar el flujo proporcional a la corriente, la f.e.m. puede ponerse:

$$E = K_E n\Phi = KI_i n$$

y al comparar las f.e.m.s. en los dos regímenes de funcionamiento se obtiene:

$$\frac{E}{E'} = \frac{nI_i}{n'I_i'} \;\Rightarrow\; \frac{99{,}5}{E'} = \frac{1.662{,}8 \cdot 35}{I_i'n'} \;\Rightarrow\; E' \approx \frac{1}{585}\,I_i'n'$$

es decir:

$$E' = 110 - 0{,}31 \cdot I_i' = \frac{1}{585}\,I_i'n'$$

y teniendo en cuenta la relación (1), resultan los siguientes valores:

$$I_i' = 30{,}31\,A \quad ; \quad n' = 1.947{,}3 \text{ r.p.m.}$$

b) Si la corriente es el doble, la f.c.e.m. tendrá un valor:

$$E'' = V - R_i I_i'' = 110 - 0{,}3\,(2 \cdot 35) = 89 \text{ V}$$

Al expresar las f.c.e.m.s. en función de los flujos, resulta:

$$E = K_E n\Phi \quad ; \quad E'' = K_E n''\Phi''$$

y teniendo en cuenta que $\Phi'' = 1{,}3\ \Phi$, queda la relación:

$$\frac{99{,}5}{89} = \frac{1.662{,}8}{1{,}3n''}$$

que da un valor de 1.144,1 r.p.m.

* 6.10. MOTOR DE C.C.: MÉTODOS DE FRENADO

Cuando se utilizan los motores de c.c. en los accionamientos eléctricos no solamente se necesita arrancar y regular la velocidad con suavidad y precisión, sino que también a menudo se requiere parar el motor rápidamente. Este régimen de funcionamiento se denomina frenado, y se puede realizar por procedimientos mecánicos o eléctricos. En el primer caso se utiliza la fuerza de rozamiento entre una llanta rotórica acoplada al accionamiento y unas zapatas que la aprisionan con mayor o menor fuerza para conseguir la parada de la máquina en el momento requerido; en el segundo caso se produce el

frenado eléctrico haciendo funcionar el motor de c.c. como generador cuya energía suministrada procede de la energía cinética de todas las masas giratorias acopladas al rotor. Una particularidad del frenado eléctrico es que su acción desaparece cuando la máquina se detiene, por lo que deben utilizarse en combinación con frenos mecánicos para conseguir mantener la carga del accionamiento en reposo o paro total. El frenado eléctrico que se explica en este epígrafe se aplica normalmente en tracción eléctrica y en los aparatos de elevación y transporte, como es el caso de ascensores, montacargas, grúas y otros. Existen tres métodos de frenado eléctrico, a saber: *a*) ***regenerativo*** o por recuperación de energía, *b*) dinámico o ***reostático*** y *c*) ***a contracorriente***.

a) Frenado regenerativo o por recuperación de energía (*regenerative braking*):

Este régimen de frenado solamente es posible si la máquina de c.c. que funciona en régimen motor se mueve por el mecanismo accionado con una velocidad superior a la correspondiente a su marcha en vacío n_0. Considérese, por ejemplo, un motor de c.c. con excitación independiente (o también derivación) como se muestra en la Figura 6.45*a*; si se denomina R_i a la resistencia total del circuito del inducido, el valor de la corriente absorbida por la máquina en las condiciones de funcionamiento como motor viene expresada por:

$$I_i = \frac{V - E}{R_i} = \frac{V - K_E n\Phi}{R_i} \tag{6.73}$$

En la expresión anterior E es la f.c.e.m. del motor, cuyo valor es inferior a la tensión aplicada V, por lo que la corriente absorbida I_i tiene el sentido mostrado en la Figura 6.45*a*. De acuerdo con la expresión (6.59), la característica par-velocidad de la máquina en régimen motor viene definida por:

$$n = \frac{V}{K_E\Phi} - \frac{R_i}{K_E K_T \Phi^2} T \tag{6.74}$$

que es la ecuación de una recta en un sistema de coordenadas $n = f(T)$ cuya pendiente es proporcional a la resistencia total del circuito del rotor. Si la resistencia adicional de arranque es cero, la resistencia del inducido es $R_{i1} = R_i$ y la recta correspondiente es la *CBAD* señalada en la Figura 6.45*b*, que se denomina ***característica mecánica natural del motor***. En esta misma figura se muestran otras dos rectas con mayor resistencia en el circuito del inducido, R_{i2} y R_{i3}. Si se considera un régimen permanente en el que el inducido no tiene ninguna resistencia adicional en serie y se denomina T_r al par resistente de la carga, el punto correspondiente de funcionamiento en esta situación se encuentra en el primer cuadrante de la característica par-velocidad del motor, y es el señalado por A en la Figura 6.45*b*.

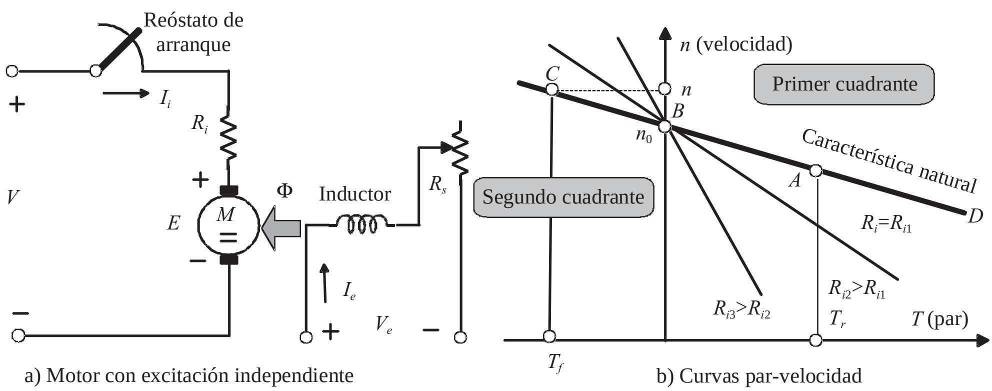


Figura 6.45. Motor con excitación independiente. Frenado regenerativo o por recuperación de energía.

Para un determinado flujo inductor Φ, existe una velocidad para la cual la f.c.e.m. E del motor es igual a la tensión de red V y cuyo valor es la velocidad de vacío n_0, de tal modo que según (6.73) se cumple:

$$V = E = K_E n\Phi \quad \Rightarrow \quad n_0 = \frac{V}{K_E \Phi} \tag{6.75}$$

La máquina funciona entonces en el punto de trabajo B, límite entre el primero y segundo cuadrante de la curva par-velocidad de la Figura 6.45*b*. En este punto de trabajo, y de acuerdo con (6.73), la corriente del inducido I_i es igual a cero, por lo que el motor no puede desarrollar ningún par electromagnético en el eje (ya que $T = K_T \Phi I_i = 0$).

Ahora bien, si por cualquier procedimiento se hace girar la máquina a una velocidad n superior a la de vacío n_0, es evidente que la f.c.e.m. del motor E será superior a la tensión aplicada V, de tal modo que la corriente I_i del inducido cambiará de signo respecto al mostrado en la Figura 6.45*a*. En esta situación la máquina de c.c. trabajará como generador y la red actuará como un receptor de energía, frenando a la máquina. La ecuación característica par-velocidad vendrá definida por la ecuación (6.74) (pero en la zona negativa de los pares), que es en definitiva la continuación de la característica mecánica en régimen motor que se extiende al segundo cuadrante del sistema de coordenadas $n = f(T)$. Es por ello que en régimen de frenado regenerativo, el punto de trabajo en la curva par-velocidad se traslada al segundo cuadrante y se ha señalado por C en la Figura 6.45*b*. La máquina funcionará como generador en el tramo BC de la característica par-velocidad. Debe señalarse también que cuanto mayor sea la resistencia R_i del circuito del inducido, tanto mayor será la velocidad de rotación en régimen generador para un mismo par de frenado, como así lo puede comprobar el lector en la Figura 6.45*b* para diversos valores de las resistencias de inducido.

Este tipo de frenado se utiliza en la tracción eléctrica cuando un tren baja por una pendiente elevada. Al superar el tren la velocidad de vacío n_0, se devuelve energía a la red y esta energía es aprovechada por los diversos ferrocarriles que estén circulando por la misma vía alimentados por la misma catenaria que el tren considerado. También este tipo de frenado es posible en los accionamientos de máquinas de elevación y transporte durante el descenso de las cargas, limitando la velocidad de caída de las mismas.

El frenado regenerativo de un motor serie es algo más complicado. Téngase en cuenta que las curvas par-velocidad de un motor serie están limitadas al primer cuadrante, y obsérvese en la Figura 6.40 que en este tipo de motores, cuando el par tiende a cero la velocidad tiende a un valor muy elevado. Esto significa que el motor serie no puede pasar por sí mismo del régimen motor al régimen de frenado regenerativo aumentando simplemente la velocidad. Esto se debe a que al aumentar la velocidad se produce, según indica la ecuación (6.69), una reducción de par, lo que se traduce, según señala (6.68), en una reducción de la corriente del inducido, que es la misma que atraviesa los polos inductores del motor y de este modo el flujo inductor disminuye, por lo que la f.c.e.m. del motor E se acerca más al valor de la tensión de alimentación de la red V, pero sin conseguir sobrepasarla. Es por ello que para producir el frenado regenerativo de un motor serie debe desconectarse el devanado de excitación de su unión con el inducido y se debe conectar a un pequeño generador externo, que puede ser incluso la propia red, aunque en este caso, teniendo en cuenta que en un motor serie el devanado inductor tiene poca resistencia eléctrica, debe limitarse la corriente que circula a su través, introduciendo una resistencia externa en serie con este devanado; de este modo el comportamiento del motor serie en régimen de frenado regenerativo es similar al de motor con excitación independiente comentado anteriormente.

b) Frenado reostático o dinámico (*rheostatic* o *dynamic braking*)

El frenado dinámico hace uso del comportamiento de un motor como generador. Si se desconecta el inducido de un motor de la red de alimentación *mientras permanece conectada la excitación*, la máquina no producirá par motor (ya que $I_i = 0$) y debido a la acción del par resistente se acabará parando al cabo de un cierto tiempo, que dependerá de la energía cinética almacenada en el sistema rotativo. Pero si al separar el inducido de la red se carga inmediatamente con una resistencia de carga, *manteniendo en todo momento la excitación del inductor*, la acción de frenado aumentará enormemente. En esta situa-

ción la energía producida por el motor que funciona como generador es transformada en calor por efecto Joule en las resistencias de carga conectadas al inducido del motor. En la Figura 6.46*a* se muestra el esquema eléctrico correspondiente para un motor con excitación independiente.

Cuando el conmutador *S* de la Figura 6.46*a* está situado en la posición 1, el inducido se alimenta de la red de c.c. y la máquina funciona en régimen motor absorbiendo una corriente I_i de la red en el sentido señalado. Al pasar el conmutador *S* a la posición 2 se carga el inducido sobre una resistencia externa R_{ext}, lo que provocará una inversión en el sentido de la corriente. Si se considera que en el momento de la conmutación la f.c.e.m. del motor es igual a *E*, el valor de la corriente I_i es:

$$I_i = -\frac{E}{R_i + R_{ext}} = -\frac{K_E n \Phi}{R_i + R_{ext}} \tag{6.76}$$

es decir, tiene un valor negativo y por consiguiente el par de frenado desarrollado por la máquina es negativo y de valor:

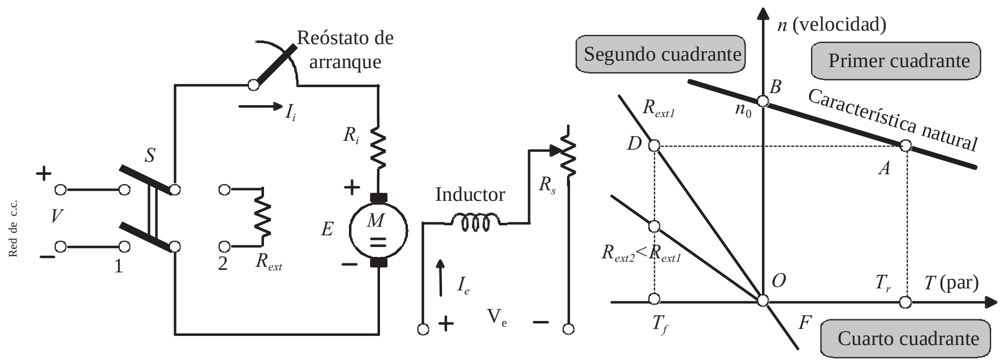
$$T = K_T \Phi I_i = -\frac{K_T K_E n \Phi^2}{R_i + R_{ext}} \tag{6.77}$$

esto es, el par de frenado es proporcional a la velocidad e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito del inducido $R_i + R_{ext}$. De la ecuación anterior se obtiene el valor de la velocidad *n*:

$$n = -\frac{T(R_i + R_{ext})}{K_T K_E \Phi^2} \tag{6.78}$$

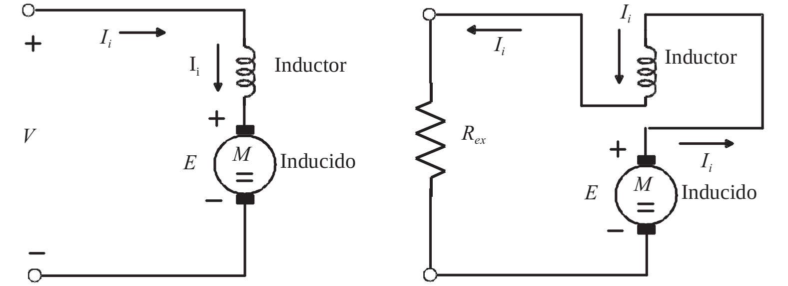
En este caso de frenado reostático o dinámico, las características par-velocidad para diversas resistencias de carga externas son las mostradas en la Figura 6.46*b*, que son rectas que pasan por el origen de coordenadas y que tienen lugar en el segundo cuadrante. Supóngase que la máquina está funcionando como motor en el punto de trabajo *A*. En el momento de conectar el inducido sobre la resistencia externa R_{ext} comienza el régimen de frenado dinámico, y como debido a la inercia del rotor, la velocidad no puede cambiar instantáneamente, no habrá variación en la f.c.e.m. del motor y el punto de funcionamiento se traslada a *D*, en el que se tiene un par de frenado T_f. A partir de este momento la velocidad de rotación se va reduciendo siguiendo la recta *DO*, hasta llegar a pararse en el punto *O*. En este momento debe desconectarse el motor de la red, ya que en caso contrario la máquina puede comenzar a girar en sentido contrario siguiendo el tramo de la recta *OF* del cuarto cuadrante.

Para conseguir el frenado dinámico de un motor serie hay que tener en cuenta que si se conserva el mismo sentido de rotación y las mismas conexiones entre el inductor y el inducido, la máquina en régimen generador es imposible de cebar, ya que la corriente inductora tiende a anular el magnetismo



a) Motor con excitación independiente b) Curvas par-velocidad

Figura 6.46. Frenado reostático de un motor de c.c. con excitación independiente.



a) Conexiones como motor serie *b*) Conexiones en régimen de frenado dinámico

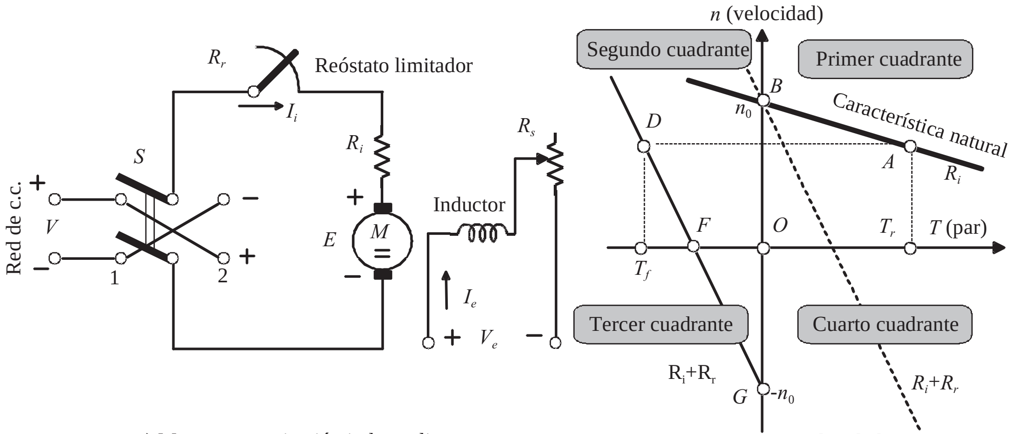
Figura 6.47. Conexiones para el frenado reostático de un motor serie de c.c.

remanente de los polos. *Una máquina serie sólo se puede cebar como generador si su sentido de rotación es opuesto al que tenía como motor*. Si se desea cebar con el mismo sentido de rotación que tenía funcionando como motor, es necesario invertir las conexiones entre el inductor y el inducido, tal como se señala en la Figura 6.47, para conservar de este modo el sentido de la corriente inductora (pese a la inversión de la corriente en el inducido) que tenía en régimen motor. En algunos casos el frenado dinámico se realiza separando los circuitos inductor e inducido y funcionando el conjunto como una máquina con excitación independiente, de un modo análogo al señalado anteriormente.

c) Frenado a contracorriente (*counter current braking* o *plugging*)

Este procedimiento de frenado se emplea cuando es necesario parar repentinamente un motor para luego poder invertir su marcha, como en ciertas aplicaciones de trenes de laminación de acerías y grúas de puerto. Sin alterar las conexiones del inductor, se aplica tensión al inducido en sentido inverso, lo que ocasiona un frenado brusco, el motor se para y luego inicia la marcha en sentido inverso. En algunos casos se abre el interruptor principal en el instante en que el rotor pasa a la situación de reposo, o sea, justamente antes de que el motor comience a girar en sentido contrario.

En la Figura 6.48*a* se muestra el esquema eléctrico de frenado a contracorriente o contramarcha de un motor con excitación independiente. Inicialmente el conmutador *S* está en la posición 1 y la máquina



a) Motor con excitación independiente *b*) Curvas par-velocidad

Figura 6.48. Frenado a contracorriente de un motor de c.c. con excitación independiente.

funciona como motor absorbiendo el inducido una corriente I_i en el sentido mostrado en la Figura 6.48*a*. Si la resistencia limitadora de la corriente del inducido es $R_r = 0$, el valor de la corriente anterior es:

$$I_i = \frac{V - E}{R_i} \tag{6.79}$$

lo que da lugar a la curva par-velocidad expresada en (6.74), y que para un par resistente T_r corresponde al punto de funcionamiento *A* de la característica mecánica natural de la Figura 6.48*b*.

Cuando el conmutador *S* pasa a la posición 2, se invierte la polaridad de la tensión aplicada al motor, y como en los primeros instantes el rotor continuará girando en el mismo sentido que llevaba previamente, la f.c.e.m. del motor *E* permanecerá invariable y se producirá una corriente de sentido contrario al señalado en la Figura 6.48*a*, cuyo valor es:

$$I_i = -\frac{V + E}{R_i + R_r} \tag{6.80}$$

donde R_r es una resistencia que se coloca en serie con el inducido para limitar la fuerte corriente producida en el período de frenado y que en la práctica suele emplearse una resistencia doble que la utilizada para limitar la corriente de arranque en régimen motor. La característica par-velocidad en este período de frenado viene definida por:

$$T = K_T \Phi I_i = -K_T \Phi \frac{V + E}{R_i + R_r} \quad \Rightarrow \quad n = -\frac{V}{K_E \Phi} - \frac{T(R_i + R_r)}{K_T K_E \Phi^2} \tag{6.81}$$

que corresponde a la recta *DFG* que transcurre por el segundo y tercer cuadrante de las características mecánicas de la Figura 6.48*b*, en la que se observa que para $T = 0$ se tiene $n = -(V/K_E\Phi) = -n_0$.

Si se supone que la máquina está trabajando inicialmente como motor en el punto *A* en la *característica mecánica natural*, al producirse la conmutación, además de cambiar la polaridad de la tensión aplicada a la máquina se introduce la resistencia limitadora R_r en el circuito del inducido, y la máquina pasará a trabajar en el punto *D* del segundo cuadrante, ejerciendo un par de frenado T_f. Este par de frenado provoca una deceleración del rotor y la velocidad de la máquina se va reduciendo siguiendo la recta *DF*. Al pasar el motor por el punto *F* (velocidad cero) se desconecta el motor de la red. En caso de que no se realice esta operación, la máquina se irá acelerando en sentido contrario. Un proceso análogo al anterior se emplea para frenar un motor serie. En cualquier caso, el frenado a contracorriente es un método de muy bajo rendimiento debido a la gran cantidad de energía disipada en las resistencias colocadas en serie con el inducido.

* 6.11. FUNCIONAMIENTO DE UNA MÁQUINA DE C.C. EN CUATRO CUADRANTES

Como ha comprobado el lector en los epígrafes anteriores, el motor de c.c. es una máquina eléctrica muy versátil que permite una excelente regulación de velocidad y que puede funcionar con ambos sentidos de giro, produciendo pares electromagnéticos a favor o en contra del sentido de rotación, y es por ello que ha sido la máquina motriz por excelencia en aplicaciones de velocidad variable, conocidas modernamente como accionamientos eléctricos (*electric drives* en inglés): tracción eléctrica, trenes de laminación, maquinaria de elevación y transporte y otros.

Para describir los modos de funcionamiento de una máquina de c.c. se utiliza la representación en cuatro cuadrantes mostrada en la Figura 6.49. En el eje de abscisas se representa el par electromagnético que genera la máquina y que también sirve para representar la corriente que atraviesa el inducido, al ser proporcional el par a esta corriente. En el eje de ordenadas se representa la velocidad de giro, bien sea en rad/s o en r.p.m.; si se supone el flujo inductor constante, la f.c.e.m. del motor es proporcional a la velocidad, por lo que también el eje de ordenadas puede servir para representar la f.c.e.m. del motor, y si se tiene en cuenta que, debido a la pequeña caída de tensión en el inducido, se cumple $E \approx V$, el eje de

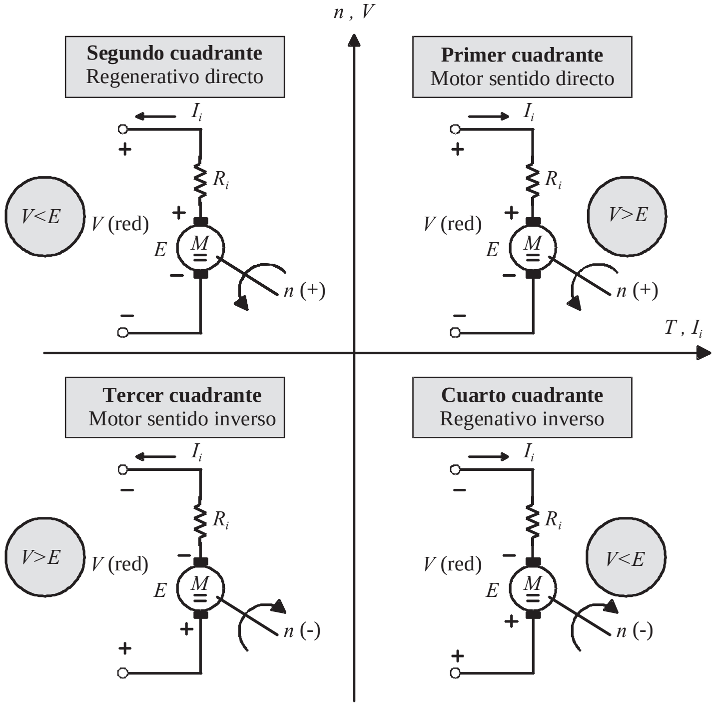


Figura 6.49. Funcionamiento de la máquina de c.c. en cuatro cuadrantes.

ordenadas representa también el eje de tensiones. Es decir, hay proporcionalidad de las características mecánicas $n = f_1(T)$ con $V = f_2(I_i)$.

De acuerdo con lo anterior, en la Figura 6.49 se ha señalado el eje de abscisas con las magnitudes T e I_i y el eje de ordenadas con n y V. Estas magnitudes se toman como positivas en el primer cuadrante, que corresponde al funcionamiento como motor girando en sentido directo o positivo (antihorario). La potencia mecánica desarrollada por el motor es el producto del par por la velocidad angular de giro, de tal modo que si estas dos magnitudes son positivas, su producto será positivo, indicando con ello que la *potencia mecánica es positiva cuando sale energía mecánica por el eje*. De un modo análogo, si V e I_i son positivos, será también positivo su producto, lo que indica que la *potencia eléctrica es positiva cuando la máquina absorbe energía de la red*. Para facilitar el estudio se ha incluido en cada cuadrante de la Figura 6.49 el circuito del inducido con los sentidos de la corriente y las polaridades tanto de la f.c.e.m. del motor como de la tensión aplicada a la máquina.

En el cuadrante 1, la velocidad y el par son positivos, y por consiguiente son positivos tanto la tensión como la corriente del inducido. De este modo es positiva la potencia eléctrica que absorbe la máquina y también la potencia mecánica que sale del eje del motor. Se produce una transformación de energía eléctrica en energía mecánica. Cuando la máquina trabaja en el cuadrante 2, la velocidad es positiva (giro directo) y por ello son también positivas tanto la tensión aplicada como la f.c.e.m. del motor; el par electromagnético y la corriente de inducido son negativos. En consecuencia, la máquina absorbe potencia mecánica por el eje (valor negativo) y se devuelve energía eléctrica a la red (valor positivo). Se ha producido un cambio en el sentido del flujo de energía en la máquina, que ahora funciona como generador en régimen de frenado regenerativo o por recuperación, aunque también esta energía eléctrica puede disiparse en una resistencia externa, como sucede en el frenado reostático o dinámico.

En el cuadrante 3, tanto el par como la velocidad son negativos, por lo que son negativos la tensión aplicada y la corriente absorbida. De este modo tanto la potencia mecánica como la potencia eléctrica

Tabla 6.2. Signos de las diversas magnitudes en los cuatro cuadrantes

Funcionamiento	*Cuadrante*	*Velocidad* n, Ω	*Par* T	*Tensión* V	*Corriente* I_i	*Potencia mecánica* $P_{mec} = T\Omega$
Motor directo	1	+	+	+	+	+
Frenado directo	2	+	−	+	−	−
Motor inverso	3	−	−	−	−	+
Frenado inverso	4	−	+	−	+	−

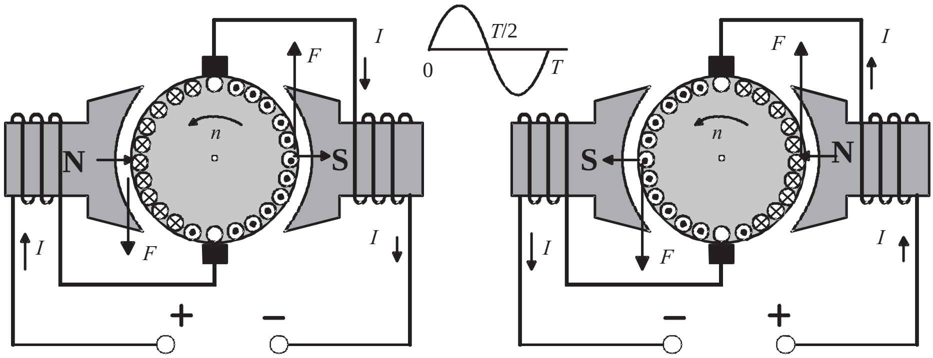
son magnitudes positivas. La máquina trabaja como motor girando en sentido inverso. Es evidente que para que se invierta el sentido de la corriente se debe cumplir que $|V| > |E|$, y de este modo el flujo energético se dirige de la red al motor. Cuando la máquina trabaja en el cuadrante 4, el par es positivo y la velocidad negativa, por lo que la potencia mecánica es negativa y procede del mecanismo accionado por el motor. La f.c.e.m. es negativa y la corriente del inducido es positiva, lo que se verifica si $|E| > |V|$, y se devuelve energía eléctrica a la red. La máquina funciona en régimen generador como freno regenerativo en sentido inverso, aunque también se puede frenar la máquina disipando la energía eléctrica sobre unas resistencias externas. En la Tabla 6.2 se resumen los conceptos anteriores, señalando los signos correspondientes de las diversas magnitudes implicadas, tanto eléctricas como mecánicas.

Debe destacarse que el uso de reóstatos de arranque y regulación por medio de resistencias eléctricas señalados en este capítulo, aunque son métodos muy didácticos para comprender su aplicación en el control de las máquinas de c.c., en la actualidad han caído en desuso, debido a que en estas resistencias se disipan grandes cantidades de energía en calor por efecto Joule, y de ahí los bajos rendimientos de estos accionamientos. En la actualidad, con el gran avance de la electrónica de potencia, el control de los motores de c.c. se realiza con convertidores electrónicos: rectificadores fijos, rectificadores controlados y *choppers*, cuyo estudio específico se realiza en el Capítulo 7, dedicado a los accionamientos eléctricos. Se puede adelantar aquí, a modo informativo, que los rectificadores convierten la c.a. en c.c. y solamente permiten el trabajo de la máquina de c.c. en el primer cuadrante. Los rectificadores controlados transforman la c.a. de la red en c.c. regulable, que incluso pueden modificar el signo de la tensión de salida variando una señal de control de encendido, y es por ello que pueden trabajar en los cuadrantes 1 y 4; incluso añadiendo un grupo dual en oposición, una máquina de c.c. puede trabajar en los cuatro cuadrantes. El chopper es otro tipo de convertidor electrónico que transforma una c.c. en otra c.c. de valor medio regulable, permitiendo el trabajo de una máquina de c.c. en dos o en cuatro cuadrantes. Estos convertidores electrónicos se utilizan con profusión en tracción eléctrica.

Debe destacarse que desde la década de 1980, y debido a la incorporación del microprocesador en los equipos de control industrial, se utilizan también en los accionamientos eléctricos de velocidad variable los motores de c.a. asíncronos y síncronos, de tal modo que se puede conseguir el funcionamiento en cuatro cuadrantes de un modo similar a los motores de c.c. Los métodos de regulación se explican en el Capítulo 7, dedicado a los accionamientos eléctricos.

6.12. MOTOR MONOFÁSICO DE C.A. CON COLECTOR DE DELGAS

Un motor de c.a. con colector es básicamente un motor de c.c. tipo serie que se ha adaptado a la corriente alterna mediante un adecuado diseño de su estructura eléctrica y magnética; su principio de funcionamiento se basa en la propiedad que tiene un motor de c.c. de conservar un sentido de giro determinado, cualquiera que sea la polaridad de la tensión de alimentación. En la Figura 6.50 puede apreciarse esta propiedad con una alimentación de c.a. En el caso *a*)



a) Semiperíodo 0 a *T*/2

b) Semiperíodo *T*/2 a *T*

Figura 6.50. Motor monofásico con colector de delgas. Principio de funcionamiento.

se representan los sentidos de las corrientes en el del inducido y los polos para el semiperíodo positivo de la onda sinusoidal. En la Figura 6.50*b* se muestran estos mismos sentidos para el semiperíodo negativo de la onda. En ambos casos el par resultante tiene sentido contrario a las agujas del reloj.

A diferencia con los motores de c.c., los motores de c.a. con colector se construyen con chapas magnéticas para reducir las pérdidas en el hierro que aparecen debido a la alternancia del flujo. Generalmente se emplea el motor tipo serie, debido a que el par que se obtiene en este caso es superior al tipo derivación (por ser superior el factor de potencia). Con la disposición serie se tiene una reactancia del devanado inductor inferior a la que existiría con el tipo derivación; hay que tener en cuenta que el coeficiente de autoinducción es proporcional al cuadrado del número de espiras, y como se ha explicado en este capítulo, este número es inferior en un inductor serie que en un inductor derivación, por lo que el motor serie presentará un mejor f.d.p. que el motor derivación, lo que se traduce en una mayor magnitud del par de carga. Para mejorar aún más el f.d.p. del motor se emplean alimentaciones de baja frecuencia que se obtienen de la red principal de 50 Hz, duplicando o triplicando el período de la onda, resultando frecuencias de 50/2 = 25 Hz y 50/3 = $16^{2}/_{3}$ Hz.

La f.e.m. inducida en los conductores del rotor de estos motores se debe en parte, a la variación del flujo inductor (**f.e.m. por acción transformadora**) y en parte al movimiento del rotor (**f.e.m. de movimiento** o velocidad). La existencia de esta doble f.e.m., hace que la conmutación sea difícil. Para mejorar la conmutación se reduce la reacción del inducido empleando arrollamientos de compensación, al igual que se hacía en los motores de c.c. En la Figura 6.51 se muestra el esquema simplificado de un motor serie de c.a. que incorpora un arrollamiento compensador que va conectado en serie con el inducido. De todas formas, pese a la utilización de los devanados compensadores, la conmutación en estos motores suele ser difícil debido a la aparición de la f.e.m. transformadora en la bobina cortocircuitada por las escobillas, que produce una corriente de circulación intensa que origina un fuerte chisporroteo en el colector.

Para mejorar la conmutación se suelen intercalar resistencias entre la unión de dos bobinas y el colector para reducir la corriente de cortocircuito, y también se recurre al empleo de tensiones reducidas en el colector para que disminuya la d.d.p. entre delgas consecutivas, y de ahí que estos motores tengan una tensión asignada límite entre 250 y 300 V. Otro procedi-

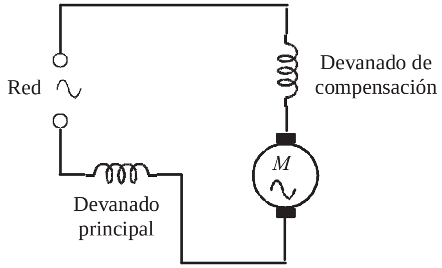


Figura 6.51. Motor de c.a. serie con devanado de compensación.

miento para mejorar la conmutación es emplear frecuencias de alimentación reducidas, que disminuyen la f.e.m. de acción transformador y que contribuyen además, como se ha indicado en los párrafos anteriores, a mejorar el f.d.p. de la máquina.

Los motores serie de c.a. con colector tienen sus mayores aplicaciones en la tracción eléctrica. En la Europa central (Alemania, Suiza, Dinamarca) se emplean con frecuencias de $16\,^2/_3$ Hz. En Estados Unidos se utilizan 25 Hz. En España se emplea corriente continua de 600 V a 1.500 V en trenes metropolitanos y de 3.000 V de c.c. en ferrocarriles de gran recorrido; sin embargo, el tren español de alta velocidad (AVE) tiene una alimentación de c.a. monofásica a 25 kV, 50 Hz. El arranque de estos motores serie se realiza por medio de un transformador reductor cuyo primario recoge la tensión de la línea de la catenaria y cuyo secundario tiene diversas tomas que van cerrándose por medio de contactores convenientemente regulados. En la Figura 6.52 se muestra esta idea. En el momento de la puesta en marcha se cierra el contacto 1, que aplica una pequeña tensión al motor, lo que provoca el arranque del mismo, posteriormente se irán cerrando los sucesivos contactos, teniendo la precaución de ir abriendo con anterioridad los precedentes para no dejar en cortocircuito ninguna parte del transformador.

Al cerrar el contacto 4 se tiene aplicada la máxima tensión al motor y éste desarrollará la velocidad más elevada. Este sistema de arranque tiene un gran rendimiento al no tener que disipar pérdidas por efecto Joule en reóstatos de arranque como ocurría en el caso de los motores de c.c. Existen también motores serie de c.a. de pequeña potencia, generalmente de

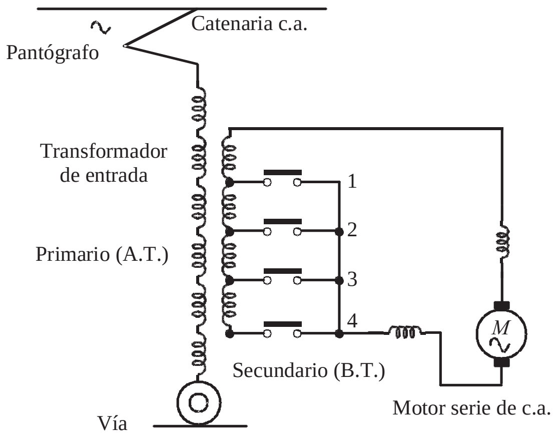


Figura 6.52. Arranque de un motor de c.a. monofásico en tracción eléctrica.

una fracción de CV, que se diseñan para funcionar indistintamente con c.c. o c.a. y que por ello reciben el nombre de **motores universales**. Se proyectan para tensiones comprendidas entre los 25 y 250 V, con frecuencias desde cero hasta 50 Hz. Los rendimientos suelen ser bajos (60-80 por 100) y las velocidades elevadas; generalmente la velocidad asignada es del orden de las 7.000 r.p.m., pero pueden obtenerse velocidades en vacío que lleguen a las 15.000-20.000 r.p.m. Estos motores se utilizan con mucha frecuencia en aplicaciones domésticas: batidoras, aspiradoras, secadores de pelo, taladros eléctricos, etc.

6.13. MOTORES DE C.C. SIN ESCOBILLAS (*Brushless Motors*)

Como ya se ha explicado a lo largo de este capítulo, el motor de c.c. es una máquina eléctrica con polos salientes en el estátor y un rotor en el que se sitúa el devanado del inducido que tiene conexiones al colector de delgas, que es donde se produce la conmutación de las corrientes de las bobinas del inducido, lo que origina un chisporroteo en el colector de delgas que produce no sólo un desgaste en el mismo, sino que provoca la emisión de radiaciones electromagnéticas. Este efecto generalmente no tiene importancia en muchos ambientes industriales, pero sí cuando el motor está cerca de emisoras de radio, como es el caso, por ejemplo, de las aplicaciones aeroespaciales, donde pueden coexistir muy cercanos el centro de comunicaciones aire-tierra de la aeronave y motores de c.c. de regulación de servomecanismos de a bordo, por lo que se pueden producir interferencias en las señales de telecomunicación, dificultándose la recepción desde Tierra. Debido a las buenas características de regulación de velocidad de un motor de c.c, que eran necesarias en estas aplicaciones aeroespaciales, es por lo que en la década de 1960 se desarrolló el motor de c.c. sin escobillas y que ha encontrado después aplicaciones en otros campos como son el accionamiento de los discos duros y motores para las disqueteras de ordenador, servomotores, etc.

Este tipo de motores y como se muestra en la Figura 6.53, tiene una disposición inversa a la clásica, es decir el inductor está en el rotor y no tiene devanados polares para evitar el uso de anillos deslizantes para la excitación de los mismos, sino que los polos están formados por imanes permanentes y con una estructura de polos cilíndricos o lisos. El inducido está en el estátor, por lo que la máquina no tiene colector de delgas y las conmutaciones de corriente en las bobinas del inducido se realizan con la ayuda de interruptores electrónicos (véase Capítulo 7). Debe tenerse en cuenta que en un motor clásico el número bobinas (y, por tanto, de delgas) es elevado, por lo que se produce un gran número de conmutaciones en cada vuelta del rotor. Si se emplearan muchas bobinas en los *motores brushless* se requerirían muchos transistores (que son los interruptores electrónicos encargados de las operaciones de conmutación). Es por ello que para simplificar estos motores y reducir el coste del equipo de control que da las órdenes de cierre y apertura a los interruptores, el número de bobinas se limita a tres, y de este modo solamente se requieren tres interruptores electrónicos y una alimentación de c.c. (lo que sería equivalente a un motor de c.c. convencional con escobillas y con tres delgas en el conmutador).

Debe destacarse además que el elemento más peculiar que tiene el motor sin escobillas, es el sistema de detección de la posición del rotor y que utiliza unos sensores específicos para que las conmutaciones electrónicas se realicen justo en el momento preciso (operación que en los motores convencionales se realiza de forma automática mediante las delgas del conmutador).

Estos sensores pueden ser de tipo fotoeléctrico o de tipo magnético (de efecto Hall). En el caso de la Figura 6.53 se han considerado para mayor claridad que los sensores son fotoeléctricos y que hay un total de tres a saber: A, B y C, cubriendo cada uno de ellos un rango de

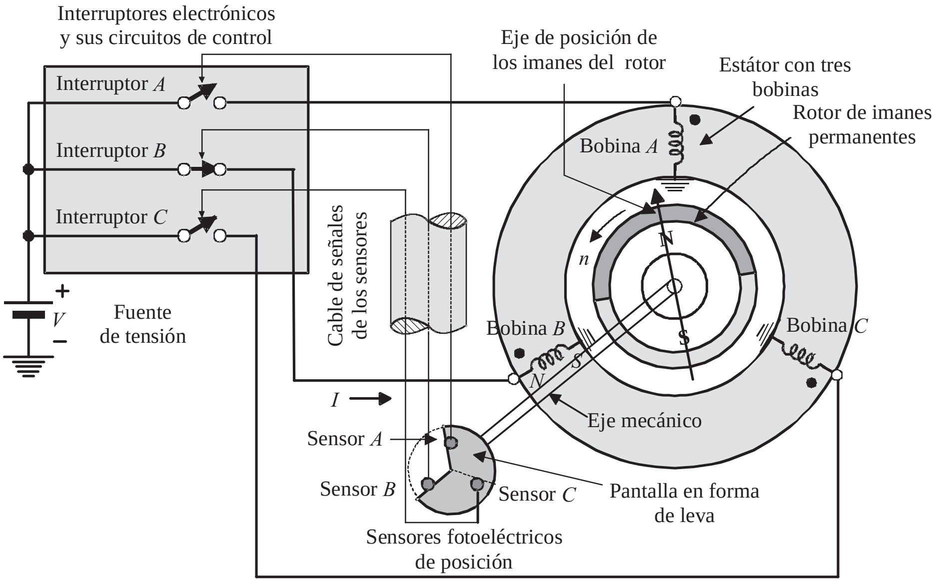


Figura 6.53. Esquema del motor de c.c. sin escobillas.

funcionamiento de 120°. Estos sensores luminosos están situados en la parte delantera de una pantalla opaca en forma de leva que tiene una abertura de 120°. La luz de activación viene de la parte de atrás de la leva. En la posición indicada, el eje del rotor (alineación de sus polos norte-sur, que suponemos que se mueve en el sentido contrario a las agujas del reloj), acaba de dejar la posición vertical cuando estaba alineado previamente con el eje de la bobina *A*. El motor funciona del modo siguiente:

1. Desde que el eje del rotor se separa de la posición vertical, se activa el sensor óptico *B* porque recibe la luz desde la parte de atrás de la pantalla luminosa en forma de leva, los sensores *A* y *C* (que están a ±120° respecto al anterior) están inactivos porque no reciben luz.
2. El sensor *B* manda cerrar el interruptor electrónico *B*, haciendo que circule una corriente continua *I* por la bobina *B*, de tal manera que se produce en ésta unos polos norte-sur tal como se señalan en la Figura 6.53, y de este modo interaccionan con los imanes del rotor haciendo que su eje se oriente con el correspondiente de la bobina *B*.
3. Este movimiento del rotor hace que a la vez gire la pantalla en forma de leva, provocando el apagado del sensor *B* (al dejar de recibir luz) y active al sensor óptico *C*, lo que provoca a su vez el cierre del interruptor *C*, que da alimentación a la bobina *C*, formándose los polos correspondientes que atraen a los imanes permanentes del rotor y hace que su eje se oriente con el eje de la bobina *C* y así sucesivamente.

En definitiva, la acción de los sensores ópticos (o magnéticos en su caso) es para activar durante un rango angular de 120° el interruptor electrónico correspondiente, para alimentar a las bobinas del estátor de un modo secuencial y conseguir de este modo un giro continuo del eje. Debido a que los transistores con los que se implementan los interruptores electrónicos funcionan durante una tercera parte de revolución, las pérdidas de potencia en los mismos son reducidas. Estos motores no necesitan prácticamente mantenimiento. Debido a la ausencia

del colector de delgas no tienen chisporroteos, por lo que se eliminan los riesgos de explosión o la emisión de radiaciones electromagnéticas. Pueden trabajar incluso sumergidos en líquidos ya que se les puede sellar de forma hermética. Se fabrican para potencias inferiores a 1 kW y pueden girar a velocidades muy elevadas (que pueden llegar a las 20.000 r.p.m.) y que dependen del ritmo de conmutación de los interruptores electrónicos empleados. El control de la corriente que circula por las bobinas y el ritmo de conmutación de los interruptores determinan la curva par-velocidad de estos motores que es similar a los motores clásicos de c.c. tipo derivación.

PROBLEMAS

6.1. Un generador de c.c. de 4 polos tiene un inducido con 564 conductores que gira a 800 r.p.m., siendo el flujo por polo de 20 mWb. La corriente que circula por los conductores es igual a 60 A. Calcular la corriente total, la f.e.m. y la potencia electromagnética desarrollada (EI_i) si el devanado es: *a*) ondulado; *b*) imbricado.

[Resp.: *a*) 120 A; 301 V; 36,12 kW. *b*) 240 A; 150,5 V; 36,12 kW.]

6.2. Un motor de c.c. tetrapolar tiene un inducido bobinado con un arrollamiento imbricado de 888 conductores. Las escobillas están desplazadas de la línea neutra en sentido contrario al movimiento del rotor un ángulo de 5 grados geométricos. Si la corriente total del inducido es igual a 90 A, calcular: *a*) Los amperivueltas por polo antagonistas y transversales; *b*) La corriente adicional necesaria en los polos para compensar la acción desmagnetizante, si el devanado de excitación tiene 1.200 espiras/polo.

[Resp.: *a*) 555 A.v/polo; 4.440 A.v/polo. *b*) 0,4625 A.]

6.3. Estimar el número de espiras que necesita cada uno de los polos de conmutación de un generador de 6 polos que suministra 200 kW a 200 V, sabiendo que el inducido tiene 540 conductores en conexión imbricada, el entrehierro interpolar es de 1 cm y la densidad de flujo en el mismo es de 0,3 Wb/m^2. Despreciar la reluctancia del hierro y la dispersión.

[Resp.: 10 espiras.]

6.4. Un generador tipo derivación desarrolla una f.e.m. de 130 V. Cuando se conecta una carga, la tensión terminal baja a 120 V. Hallar la corriente de carga si la resistencia del circuito de campo es de 10 Ω y la resistencia total del inducido de 0,05 Ω. Prescíndase de la reacción del inducido.

[Resp.: 188 A.]

6.5. Un generador tipo derivación de 4 polos, 1.500 r.p.m. tiene una curva de vacío (a velocidad asignada) definida por la siguiente tabla de valores:

I_e (A)	0	0,1	0,4	0,6	1	1,14	1,32	1,56	2,4	3,04
E (V)	6	20	80	120	200	220	240	260	300	320

Calcular: *a*) tensión en vacío que desarrollará la máquina cuando la resistencia total del circuito de excitación sea de 125 Ω; *b*) valor crítico de la resistencia del circuito de campo; *c*) tensión en vacío a 1.000 r.p.m. con una resistencia del inductor igual a 125 Ω; *d*) velocidad a la cual se hace crítica la resistencia de campo de 125 Ω.

[Resp.: *a*) 298 V. *b*) 200 Ω. *c*) 155 V; 925 r.p.m.]

6.6. Un generador tipo derivación tiene una característica de circuito abierto expresada por la ecuación:

$$E = \frac{200 I_e}{K + I_e}$$

Para una corriente de excitación de 1,5 A se obtiene una f.e.m. en vacío de 150 V. Determinar el valor de la resistencia crítica del devanado inductor en derivación y la tensión en vacío cuando la resistencia del campo es de 200 Ω.

[Resp.: 400 Ω; 100 V.]

6.7. La característica en vacío de un generador derivación que gira a 1.200 r.p.m. es:

E (V)	47	85	103	114	122	127	135	141
I_e (A)	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0

La resistencia del devanado inductor es de 55 Ω. Determinar: *a*) Resistencia que hay que añadir al circuito de campo para que la máquina genere una tensión de 120 V en vacío cuando gira a 1.200 r.p.m; *b*) Tensión en circuito abierto cuando se añade al inductor una resistencia de 20 Ω y la velocidad se reduce a 800 r.p.m.

[Resp.: *a*) 71 Ω. *b*) 83 V.]

6.8. Un generador tipo derivación de 200 V debe mantener una tensión constante entre terminales para todas las cargas. A plena carga, la velocidad cae un 10 por 100 y la caída de tensión en el inducido es de 10 V. La corriente de excitación en vacío es de 4 A y la curva de vacío viene definida por la siguiente tabla de valores:

E (V)	56	114	132	160	180	200	216	240
I_e (A)	0,8	1,6	2	2,6	3,2	4	4,8	6,3

Hallar el cambio en la resistencia del circuito de excitación desde vacío a plena carga.

[Resp.: 50 a 34 Ω.]

6.9. Un generador tipo compuesto, de gran derivación, suministra una corriente de carga de 50 A a 500 V y tiene unas resistencias de inducido, campo en serie y campo en derivación de 0,05; 0,03 Ω y 250 Ω, respectivamente. Calcular la f.e.m. generada y la corriente en el inducido. Considérese una caída de contacto de 1 V por escobilla.

[Resp.: 506,2 V; 52 A.]

6.10. Un motor tipo derivación de 240 V tiene una resistencia del inducido de 0,2 Ω. Calcular: *a*) el valor de la resistencia que debe introducirse en el circuito del inducido para limitar la corriente de arranque a 40 A; *b*) f.e.m. generada cuando el motor está girando a velocidad constante con esta resistencia adicional en el circuito para una corriente del inducido igual a 30 A.

[Resp.: *a*) 5,8 Ω. *b*) 60 V.]

6.11. Un motor tipo derivación de 250 V gira en vacío a 1.000 r.p.m. y absorbe una corriente de 5 A. La resistencia total del inducido es de 0,2 Ω y la del campo en derivación de 250 Ω. Calcular la velocidad cuando esté cargado y tome una corriente de 50 A, sabiendo que la reacción del inducido debilita el campo un 3 por 100.

[Resp.: 994 r.p.m.]

6.12. Un motor tipo derivación de 250 V tiene una resistencia de inducido de 0,5 Ω y una resistencia de campo de 250 Ω. Cuando mueve a 600 r.p.m. una carga cuyo par es constante, el inducido absorbe 20 A. Si se desea elevar la velocidad de 600 a 800 r.p.m., ¿qué resistencia debe insertarse en el circuito de excitación, suponiendo que la curva de magnetización sea una línea recta?

[Resp.: 88 Ω.]

6.13. Un motor tipo derivación de 250 V tiene una corriente de inducido de 20 A cuando gira a 1.000 r.p.m., venciendo el par de plena carga. La resistencia del inducido es de 0,5 Ω. ¿Qué resistencia debe insertarse en serie con el inducido para reducir la velocidad a 500 r.p.m. con el mismo par, y cuál será la velocidad si el par de carga se reduce a la mitad, estando dicha resistencia en circuito? Supóngase que el flujo permanece constante.

[Resp.: 6 Ω; 771 r.p.m.]

6.14. Un motor tipo derivación de 7,5 kW, 460 V, tiene una entrada de 8.500 W cuando desarrolla un par en el eje de 78,3 N.m a 900 r.p.m. ¿En qué tanto por ciento debe reducirse el campo para aumentar la velocidad a 1.050 r.p.m. con un par en el eje de 60,7 N.m? La resistencia del inducido es de 1 Ω, la resistencia del circuito de campo a 900 r.p.m. es de 770 Ω y las pérdidas mecánicas y en el hierro son constantes. Prescíndase de la reacción de inducido.

[Resp.: 14 %.]

6.15. Un motor tipo derivación de 250 V, con un flujo inductor constante, mueve una carga cuyo par varía con el cubo de la velocidad. Cuando gira a 500 r.p.m. el inducido absorbe 40 A. Hallar la velocidad a que girará si se conecta una resistencia de 25 Ω en serie con el inducido. Prescíndase de las pérdidas del motor.

[Resp.: 250 r.p.m.]

6.16. Se dispone de un motor derivación de 200 V, cuya excitación se mantiene constante. El circuito del inducido tiene en serie un reóstato de arranque. Calcular el número de secciones de este reóstato y las resistencias de cada sección, sabiendo que la resisten-

cia del inducido es de 0,5 Ω, y que las corrientes en este circuito deben estar comprendidas: *a*) entre 25 A y 50 A; *b*) entre 30 A y 50 A.
Sugerencia: Se deben demostrar las siguientes relaciones:

$$\frac{R_T}{R_i} = \gamma^n \quad ; \quad \frac{R_K}{R_{K-1}} = \gamma$$

donde R_T representa la resistencia total del circuito del inducido: propia + reóstato de arranque; R_i es la resistencia del inducido; R_{K-1} y R_K son las resistencias totales del circuito del inducido hasta las secciones $k - 1$ y k, respectivamente, del reóstato de arranque; γ es el cociente $I_{\text{máx}}/I_{\text{mín}}$ del inducido en el proceso de arranque.

[Resp: *a*) 3 secciones; 2 Ω, 1 Ω, 0,5 Ω. *b*) 4 secciones; 1,6 Ω, 0,96 Ω, 0,57 Ω, 0,346 Ω.]

6.17. Un motor serie, con un circuito magnético no saturado y con una resistencia de inducido despreciable, absorbe 50 A a 500 V cuando gira a una cierta velocidad con una carga dada. Si el par de carga varía con el cubo de la velocidad, hallar la resistencia adicional colocada en serie con el motor para poder reducir la velocidad: *a*) un 50 por 100; *b*) un 20 por 100.

[Resp.: *a*) 23,3 Ω. *b*) 6 Ω.]

6.18. Un motor serie de 240 V tiene una resistencia de 0,2 Ω. A la velocidad de 1.800 r.p.m. absorbe 40 A. Hallar la resistencia que debe añadirse: *a*) para limitar la velocidad a 3.600 r.p.m. cuando la corriente sea de 10 A, suponiendo un flujo proporcional a la corriente entre 10 y 40 A; *b*) para que la velocidad sea de 900 r.p.m. para una corriente de 60 A, sabiendo que el flujo a 60 A es un 18 por 100 mayor que el flujo a 40 A, ¿a qué velocidad girará el motor cuando se conecte directamente a la línea y absorba 60 A?

[Resp.: *a*) 12,2 Ω. *b*) 1,52 Ω; 1.500 r.p.m.]

6.19. Un motor serie de 4 polos gira normalmente a 600 r.p.m. con una alimentación a 250 V, absorbiendo 20 A. Todas las bobinas de campo están conectadas en serie. Estimar la velocidad y la corriente consumida por el motor si las bobinas se vuelven a conectar en dos grupos en paralelo de dos bobinas en serie. El par de carga es de tipo «ventilador», aumentando con el cuadrado de la velocidad. Supóngase que el flujo es directamente proporcional a la intensidad de excitación y prescíndase de las pérdidas de potencia y caídas de tensión.

[Resp.: 713,5 r.p.m.; 33,6 A.]

6.20. Un motor serie que tiene una resistencia de 1 Ω entre terminales mueve un ventilador, para el cual el par varía con el cuadrado de la velocidad. A 220 V el conjunto gira a 300 r.p.m. y absorbe 25 A. Debe aumentarse la velocidad a 400 r.p.m. aumentando la tensión. Hallar la tensión y la corriente para los casos límites siguientes: *a*) cuando el circuito magnético esté saturado, es decir, para flujo constante; *b*) cuando el circuito magnético esté no saturado, es decir, cuando el flujo sea directamente proporcional a la corriente.

[Resp.: *a*) 44,3 A; 304,5 V. *b*) 33,3 A; 380 V.]

Biografías

ARNOLD, Engelbert (1856-1911). Ingeniero suizo-alemán. Estudió en el Politécnico de Zurich (1878). En 1880 fue contratado por el Politécnico de Riga como ayudante del profesor Dettman, y junto con este profesor fundaron una empresa eléctrica que se dedicó a la construcción de dinamos con inducidos dentados. En 1891 pasó a formar parte de la compañía suiza Oerlikon, como director de Ingenieria, donde tuvo la oportunidad de proyectar máquinas eléctricas de gran tamaño. Más tarde aceptó el puesto de catedrático de electrotecnia de la Universidad Técnica de Karlsruhe. Este Centro, bajo la dirección de Arnold, adquirió gran fama en todo el mundo y en sus aulas se formaron multitud de ingenieros de todos los países. En 1906 fue nombrado Doctor Honoris Causa por la Universidad de Hannover. Fue uno de los pioneros que estudiaron con profundidad los devanados eléctricos de las máquinas de c.c. y los problemas de conmutación. Escribió diversos libros sobre máquinas eléctricas que fueron referencia en muchas empresas constructoras de maquinaria eléctrica y en universidades tecnológicas. Su obra póstuma fue *Die Weschselstromtechnik*, compuesta de cinco volúmenes que se escribieron entre los años 1903 y 1909 y donde participó su ayudante, el profesor Jens Lassen de La Cour.

BARLOW, Peter (1780-1862). Matemático, físico y astrónomo inglés. Fue profesor de la Academia militar de Woolwich (1806-1846) y miembro de la *Royal Society* en 1823. Cultivó fundamentalmente las matemáticas y la física, inventando procedimientos para evitar la interferencia de las grandes masas del hierro de un barco sobre la brújula. Inventó un telescopio acromático e hizo estudios notables sobre construcción de líneas férreas. En 1828 construyó la famosa rueda que lleva su nombre, que era una máquina dinamoeléctrica y que sirvió para demostrar la acción dinámica de una corriente eléctrica.

BRUSH, Charles Francis (1849-1929). Ingeniero e inventor americano. Se graduó como ingeniero de Minas en la Universidad de Michigan. Desde 1869 a 1871 se dedicó al análisis químico, y más tarde, entre 1871 y 1875, ocupó la dirección de una importante industria siderúrgica. En 1876 perfeccionó notablemente la dinamo eléctrica, patentando un generador que llevaba su nombre que producía una tensión variable controlada por la carga y una corriente constante que se utilizaba para el alumbrado de arco, con las lámparas conectadas en serie. En 1879 inventó un regulador de tensión. Fue premiado con la medalla Rumford en 1899 y recibió la medalla Edison en 1913.

GRAMME, Zenobe Theophile (1826-1901). Inventor belga. De formación eminentemente autodidacta, en 1856 se trasladó a París y trabajó en una sociedad industrial. Dotado de una gran intuición y habilidad para la invención. En 1867 obtuvo una patente por una máquina de c.a. y dos años más tarde, en 1869, patentó su famosa dinamo, que daba tensiones más elevadas que las conocidas hasta entonces y que resolvía la rectificación con el colector de delgas. En 1870 se unió al también inventor Hippolyte Fontaine, para explotar su dinamo. En la Exposición Internacional de Viena presentaron una dinamo Gramme de gran tamaño y pudieron demostrar que era reversible y que se podía usar como motor. Hizo también estudios sobre transporte de energía eléctrica.

HJORTH, Soren (1801-1870). Ingeniero civil danés. Fundó en 1844 la primera Sociedad danesa de ferrocarriles y fue más tarde el director del primer ferrocarril del Reino de Dinamarca. En 1848 se trasladó a Londres a la fábrica *Robinson y Co. Pimlico*, construyendo en sus talleres un motor eléctrico alternativo con electroimanes que recibió el único premio sobre máquinas eléctricas en la Exposición Universal de Londres de 1851. El mismo año volvió a Copenhague, haciendo investigaciones que le llevaron a enunciar el principio dinamoeléctrico. Este proyecto está depositado en los archivos de la Sociedad Real de las Ciencias; describe una máquina con un inductor de imanes permanentes pero que lleva arrolladas una serie de bobinas, por las cuales hace circular la corriente producida por la misma máquina. El proyecto fue realizado cuando Hjorth volvió a Londres en 1854 y se hicieron dos prototipos en la fábrica de W.T. Henley. Este invento se describe en dos patentes inglesas: la n.º 2.198, de 1854, y la n.º 806, de 11 de abril de 1855; esta última llevaba por

título: *An improved magnetoelectric battery*. Fue, sin embargo, Werner Von Siemens quien desarrolló técnica y comercialmente esta idea en la construcción de máquinas de c.c. y a quien se le atribuye por eso la paternidad del invento, pero el descubrimiento de Siemens tuvo lugar en 1866, es decir, once años más tarde que Hjorth.

HOBART, Henry Metcalf (1868-1946). Ingeniero americano. Se graduó en el MIT en 1889. En ese mismo año ingresó en la *Thomson-Houston*. En 1894 pasó a la *General Electric*, en la que fue ayudante de C.P. Steinmetz. Entre 1895 y 1913 trabajó en Berlín y Londres. En esta misma ciudad fue profesor en el University College (1908-1911). Autor de más de una docena de libros de ingeniería eléctrica, fundamentalmente en relación con las máquinas eléctricas, muchos de los cuales fueron traducidos al francés y al alemán. Escribió gran cantidad de artículos técnicos. Se le atribuyen cerca de 30 patentes en el campo de la ingeniería eléctrica.

HOPKINSON, Edward (1859-1922). Físico ingles. Estudió en el Owens College. En 1881 se doctoró en Ciencias en la Universidad de Londres, en la rama de Electricidad y Magnetismo. Al año siguiente fue ayudante de Sir Williams Siemens. Realizó ensayos en Porthus sobre el primer tranvía eléctrico del Reino Unido. Pionero en los estudios y proyectos de tracción eléctrica, fue el responsable del diseño de locomotoras eléctricas para los ferrocarriles ingleses. Recibió la medalla de oro de la Institución de Ingenieros Civiles en 1893 por sus trabajos en tracción eléctrica. Premio Telford y medalla George Stephenson. Se le atribuyen gran número de patentes en el campo de la ingeniería eléctrica, muchas de ellas en colaboración con su distinguido hermano el profesor John Hopkinson: como la dinamo y el motor Manchester, mejoras en el diseño de los circuitos magnéticos de las máquinas eléctricas, etc. Fue Presidente de la Institución de Ingenieros Mecánicos de Inglaterra.

JACOBI, Moritz Herman Von (1801-1875). Físico alemán, hermano del matemático Carlos Gustavo Jacobi. Trabajó como arquitecto en Königsberg y después fue profesor de arquitectura en Dorsat. En 1837 fue llamado por el zar a San Petersburgo; en ese mismo año descubrió la galvanoplastia, que le dio celebridad mundial. En 1839 construyó un motor eléctrico con electroimanes que empleó para propulsar un barco con ruedas sobre el río Neva. En 1840 construyó una línea telegráfica para la residencia del zar, pudiendo comprobar entonces la inutilidad del empleo de un doble hilo, ya que se podía hacer el retorno por tierra. Inventó el reóstato. Fue miembro de la Academia de Ciencias de San Petersburgo.

LANGSDORF, Alexander Suss (1878-1974). Ingeniero americano. Estudió en la Universidad de Washington. Director del Departamento de Ingeniería Eléctrica de esa Universidad en 1904. Fue también decano de la Escuela de Arquitectura (1916). Entre 1920 y 1926 dejó la enseñanza para trabajar en la industria privada, pero volvió nuevamente a la Universidad, siendo nombrado director de las Escuelas de Ingeniería y Arquitectura. En 1950 se retiró como catedrático y decano emérito de ingeniería eléctrica. Langsdorf escribió entre 1915 y 1920 dos libros sobre máquinas de c.c. y c.a. que le harían mundialmente famoso y que fueron traducidos a varios idiomas, entre ellos el español y el chino.

PACINOTTI, Antonio (1841-1912). Físico italiano. Estudió en Pisa, donde su padre era catedrático de Física. En 1860 construyó una dinamo con inducido en anillo, dotada con un primitivo conmutador. Una descripción de esta máquina fue publicada en 1865 en la revista *II Nuovo Cimento* (3 de mayo de 1865), donde demostraba la reversibilidad de esta máquina. Desde 1864 a 1873 fue profesor de física en Bolonia. En 1873 presentó en la Exposición de Viena tres modelos de su máquina y fue donde vio la dinamo de Gramme, que era muy similar. En el Jurado se encontraba lord Kelvin, y aunque se reconoció que la máquina de Pacinotti era anterior a la de Gramme, ésta tenía algunas modificaciones que la hacían distinta, por lo que Pacinotti solamente recibió un premio de progreso. En 1874 se trasladó a la Universidad de Cagliari, donde siguió con sus ensayos eléctricos. Más tarde, en 1882, volvió a la universidad de Pisa para ocuparse de la cátedra de física tecnológica. En 1883 propuso una aplicación de su inducido en anillo para transmitir a distancia movimientos

angulares; en realidad lo que proponía era un indicador bifásico con campo giratorio. Sin embargo, sería el genio de Ferraris el que descubriría más tarde la esencia del campo giratorio.

VARLEY, Samuel Alfred (1832-1921). Físico inglés. En 1852 ingresó en la Compañía inglesa de telégrafos. En su primera etapa trabajó, junto a su hermano Cromwell, en el desarrollo de diversos inventos telegráficos. En 1866 inventó una dinamo autoexcitada, análoga a la construida por Charles Wheatstone y Werner V. Siemens. Por el desarrollo de esta máquina recibió la medalla de oro de la Exposición Internacional de 1885. Desarrolló la dinamo compound en 1878, lo que fue motivo de litigio con la Compañía anglo-americana Brush. En 1892 la Cámara de los Lores se decidió finalmente a favor de Varley. Propuso la subdivisión del núcleo de hierro en los transformadores para reducir las pérdidas por corrientes de Foucault. Fue uno de los miembros fundadores del IEE en 1871, nombrándose a Sir Williams Siemens el primer presidente.

WARD-LEONARD, Harry (1861-1915). Ingeniero eléctrico americano. Nació en 1861 en Cincinnati murió en abril de 1915 en New York. Se graduó a los veintidós años en el *Massachusetts Institute of Technology* en 1883. Al acabar su carrera trabajó dos años con Edison y en 1887 fue contratado como ingeniero ayudante en la *Western Electric Light Co.* de Chicago. En 1888 creó la empresa Leonard-Izard, realizando importantes proyectos sobre centrales eléctricas y tracción eléctrica. En 1891 patentó el célebre control de velocidad de motores de c.c. y que desde entonces lleva su nombre. Este invento lo justificó más tarde con un artículo publicado en la revista Transactions AIEE de 1896, Vol. 13, pags. 377-386, que llevaba por título: *Volts versus Ohms-the speed regulation of Electric Motors*. Se deben a él otros inventos como el frenado por recuperación de energía o regenerativo, el disyuntor de doble brazo, diversos sistemas de alumbrado para trenes, etc.; en total alrededor de 100 patentes en diversos campos de la ingeniería eléctrica. Premiado con la medalla de oro en la Exposición de París de 1900 y también en la de San Louis de 1904. *Fellow del American Institute of Electrical Engineers*, falleció en el mes de abril de 1915 en el hotel Astor de New York durante un banquete que celebraba el Instituto Americano de Ingenieros Eléctricos (AIEE).

WILSON, Ernest (1863-1932). Ingeniero inglés. De familia humilde, empezó trabajando en una escuela de aprendices de la empresa Geenwood y Batley, donde vio construir alternadores tipo Brush y Ferranti. Seguía también clases nocturnas en el Yorkshire College y debido a su buen aprovechamiento obtuvo una beca para estudiar en Alemania. En 1886 se matriculó en la *Königlische Technische Hochschule* en Hannover, donde fue alumno de Kohlrausch, teniendo un aprendizaje eficaz en ensayos de máquinas y en el idioma alemán. Al volver a Inglaterra en 1887 ingresó en la empresa que los hermanos Siemens tenían en este país y llegó a ser ayudante personal de Alexander Siemens. Wilson trabajó en el diseño de los equipos eléctricos de las primeras locomotoras construidas para los ferrocarriles de la ciudad de Londres. Durante este período de tiempo él asistía a las clases de John Perry y Silvanus Thompson en el *Findsbury Technical College*. Interesado por el diseño de máquinas eléctricas, sabía que en el King's College se había creado el Laboratorio Siemens y nombrado catedrático de ingeniería eléctrica a John Hopkinson en 1890, quien a su vez eligió a Wilson como profesor de Laboratorio en 1891. En 1898 era profesor ayudante y al año siguiente, debido a la trágica muerte en accidente de montaña del profesor Hopkinson, Wilson pasó a sustituirle en su cátedra, llevándola con dignidad hasta su jubilación en 1930. Como profesor era infatigable y llegó a publicar más de 80 artículos propios y 30 más en colaboración. Su célebre libro sobre tracción eléctrica se publicó en 1897 y fue tomado como de consulta en muchos centros extranjeros. En 1888 inventó el motor de c.a. polifásico con colector de delgas. En 1891 inventó el motor de c.a. con conmutador con conexión serie, y H. Görges patentó en ese mismo año otro con conexión *shunt*.

Referencias

CHAPMAN, S. J.: *Máquinas eléctricas.* McGraw-Hill Latinoamericana, S. A., Bogotá, 1987.

CHATELAIN, J.: *Traité d'électricité,* Vol. X: *Machines électriques*. Editions Georgi, Lausanne, 1983.

CHILIKIN, M.: *Accionamientos eléctricos.* Ed. Mir, Moscú, 1972.

CORTES CHERTA, M.: *Teoría general de máquinas eléctricas.* UNED, Madrid, 1976.

DAGNEAUX, J; LULLY, R.: *Electrotecnia. Teoría general y máquinas de corriente continua y de corriente alterna. Tomo I.* Editorial Dossat, S. A., Madrid, 1962.

DAWES, CH. L.: *Tratado de electricidad,* tomo 1: *Corriente continua.* Ed. G. Gili, Barcelona, 1966.

DEL TORO, V.: *Electric Machines and Power Systems.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1985.

EL-HAWARY, M. E.: *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications.* Reston Books, Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J., 1986.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, Ch.: *Electric Machinery,* 2nd edition McGraw-Hill Book, New York, 1961.

FOUILLÉ, A.: *Électrotechnique a l'usage des ingénieurs. Tome 2: Machines Électriques.* Huitième Édition; Paris, 1969.

FRAILE MORA, J.: *Funcionamiento de un motor de corriente continua con colector de estado sólido.* Revista Metalurgia y Electricidad. Madrid, N.º 443, Agosto de 1974, pp. 125-128.

GEHMLICH, D. K.; HAMMOND, S. B.: *Electromechanical Systems.* McGraw-Hill Book, New York, 1967.

GÖNEN, T.: *Electrical Machines.* Power International Press. Carmichael, California, 1998.

GRAY, A.; WALLACE, G. A.: *Electrotecnia. Fundamentos teóricos y aplicaciones prácticas.* Ed. Aguilar, Madrid, 1967.

GURU, B. S.; HIZIROGLU, H.R.: *Electric Machinery and Transformers.* 2nd Ed. Oxford University Press, New York, 1995.

HINDMARSH: *Electrical Machines.* Pergamon Press, Elnsford, N. Y., 1965.

IVANOV-SMOLENSKY, A.: *Electrical Machines,* tomo 3. Mir Publishers, Moscow 1983.

JUREK, S. F.: *Electrical Machines for Technicians and Technician Engineers.* Longman, London, 1972.

KASATKIN, A.; PEREKALIN, M.: *Curso de Electrotecnia.* Ed. Cartago, Buenos Aires, 1960.

KENJO, T.; NAGAMORI, S. : *Permanent-Magnet and Brushless DC Motors*. Clarendon Press, Oxford, 1985.

KOSOW, I.: *Electric Machinery and Transformers.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1972.

KOSTENKO, M. P.; PIOTROVSKI, L. M.: *Máquinas eléctricas,* tomo I. Ed. Mir, Moscú, 1975.

LANGSDORF, A. S.: *Principios de máquinas de c.c.* Ed. Castillo, Madrid, 1964.

LIWSCHITZ-GARIK, M.: *Direct Current Machines.* Van Nostrand Co., Princeton, N. J., 1946.

MATSCH, L. W.: *Máquinas electromagnéticas y electromecánicas.* Representaciones y Servicios de Ingeniería, S. A., México, 1974.

NAGRATH, I. J.; KOTHARI, D. P.: *Electric Machines.* Tata McGraw-Hill Publishing Co., New Delhi, 1985.

PARKER SMITH, S.: *Problemas de Ingeniería Eléctrica.* Ed. Selecciones Científicas, Madrid, 1961.

RAPP, J.: *Tratado práctico de Electrotecnia. Tomo II: Máquinas Eléctricas.* 12.ª Edición. Jesús Rapp, Editor, Bilbao, 1989.

RIMINI, C.: *Electrotecnia General.* tomo II. Ed. G. Gili de México, 1955.

SANJURJO NAVARRO, R.: *Máquinas eléctricas.* McGraw-Hill Interamericana de España, S. A., Madrid, 1989.

SEGUIER, G.; NOTELET, F.: *Electrotechnique Industrielle.* Technique et Documentation, París, 1977.

SISKIND, CH.: *Direct Current Machinery.* McGraw-Hill, New York, 1952.

SLEMON, G. R.; STRAUGHEN, A.: *Electric Machines.* Addison-Wesley Pub., Reading, Massachusetts, 1980.

STEIN, R.; HUNT, Jr. W. T.: *Electric Power System Components. Transformers and Rotating Machines.* Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1979.

VESHENEVSKI, S.: *Características de los motores en el accionamiento eléctrico.* Ed. Mir, Moscú, 1972.

TRENKMANN, H.: *Teoría, Cálculo y Construcción de las Máquinas de c.c.* Escuela del Técnico Electricista, Tomo IV. Ed. Labor, Barcelona, 1962.

CAPÍTULO 7

Accionamientos eléctricos

7.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores de este libro dedicado a las máquinas eléctricas se ha destacado la importancia del control de velocidad de los motores eléctricos. Las técnicas estudiadas en estos capítulos han explicado los métodos convencionales de regulación y control de máquinas eléctricas en los que se utilizaban reóstatos de arranque y regulación, combinación motor-generador (grupo Ward-Leonard) y transformadores de tensión variable. Con el desarrollo tan espectacular de la electrónica desde el descubrimiento del transistor en 1947 por los Laboratorios Bell, y sobre todo gracias a la aparición en el mercado en 1957, lanzado por los Laboratorios de la General Electric, del tiristor o SCR (*semiconductor controlled rectifier)*, un dispositivo semiconductor capaz de realizar una *conmutación controlada* con altos niveles de potencia, dio comienzo a una nueva era en la utilización de circuitos de control estático para conseguir una regulación en las máquinas eléctricas con una alta fiabilidad y rendimiento. Este área de la ingeniería eléctrica se conoce con el nombre de **electrónica de potencia** o también electrónica industrial, y se ha desarrollado enormemente en los últimos años debido al descubrimiento de nuevos dispositivos de conmutación como: interruptores de apagado por puerta o GTO (*gate turn off switches*), transistores de unión bipolar o BJT (*bipolar junction transistors*), transistores bipolares de puerta aislada o IGBT (*insulated gate bipolar transistors*), transistores MOSFET (*metal-oxide semiconductor field-effect transistors*), tiristores controlados MOS o MCT (*MOS-controlled Thyristors*), etc.

En principio, la electrónica de potencia se utilizó para obtener c.c. de las redes de c.a., lo que era necesario para la alimentación de motores de c.c., para las industrias electroquímicas, que necesitaban este tipo de energía en los procesos de electrólisis, galvanoplastia, etc. Los dispositivos electrónicos fueron en principio válvulas electrónicas o tubos de vacío, después rectificadores de vapor de mercurio y por fin los rectificadores semiconductores. A continuación, se procedió a la regulación de velocidad de los motores de c.c. por medio de grupos giratorios Ward-Leonard, tiratrones (válvulas de gas con electrodo de control) y más tarde con tiristores (tiratrones semiconductores o de estado sólido). Siempre que se requería una regulación de velocidad se acudía a los motores de c.c. por su facilidad en el control electrónico. Como ya se sabe, los motores de c.c. son mucho más caros que los motores de c.a. asíncronos a igualdad de potencia, y además tienen una parte muy frágil, que es el conmutador o colector de delgas, que requería un cuidadoso mantenimiento. La regulación de velocidad de los motores asíncronos permaneció en estos años desconocida por la dificultad en el control electrónico. La invención del microprocesador en 1971 permitió vencer estas dificultades y en la actualidad se fabrican

convertidores electrónicos excelentes para la regulación y control de motores asíncronos, que están sustituyendo a los motores de c.c. en aplicaciones de velocidad variable.

Este capítulo, dedicado a los accionamientos eléctricos, representa una simbiosis entre la electrotecnia y la electrónica y pretende dar una visión moderna aunque simplificada de los procedimientos existentes para la regulación y control de motores eléctricos. Comienza el capítulo explicando de un modo breve el funcionamiento de los principales dispositivos electrónicos que se utilizan en el control de máquinas eléctricas: diodos, tiristores, etc. A continuación, se describen los principales tipos de convertidores que se emplean en la regulación: rectificadores clásicos, rectificadores controlados mono y trifásicos, recortadores o troceadores (conocidos en inglés como *choppers*), inversores y cicloconvertidores. Finalmente se aplican estos conocimientos para estudiar el comportamiento de los motores eléctricos alimentados por convertidores electrónicos, comenzando con la regulación de los motores de c.c. y después con los de corriente alterna tipos asíncrono y síncrono. El fin primordial de los accionamientos eléctricos es adaptar la electrónica a las máquinas eléctricas para conseguir relaciones par/velocidad que se adapten a las diferentes condiciones de servicio. Los convertidores electrónicos consiguen puestas en marcha suaves de los motores, evitando las grandes corrientes de arranque tradicionales; pueden ajustar su rampa de aceleración hasta la velocidad de régimen con relativa facilidad debido a las unidades de control, que incorporan circuitos integrados digitales y microprocesadores, permitiendo asimismo con interfaces adecuadas un control por ordenador desde una consola alejada de la máquina.

7.2. DISPOSITIVOS SEMICONDUCTORES DE POTENCIA

La electrónica de potencia está basada en el empleo de dispositivos semiconductores que trabajan en *conmutación*, esto es, dispositivos que en virtud de sus características de uso actúan como simples interruptores estáticos que pueden estar abiertos o cerrados, es decir, o bien bloquean la tensión aplicada o bien conducen la corriente sin ninguna restricción. Se considera que no hay estados intermedios, excepto el breve tiempo durante el que se produce el período transitorio de la conmutación. Los dispositivos empleados: diodos y transistores de potencia, tiristores, GTO, IGBT, etc., se basan en el uso de materiales semiconductores. Para estudiar su comportamiento no es necesario profundizar en los fenómenos que ocurren internamente en el semiconductor, sino más bien analizar y comprender sus formas de actuación, conociendo sus respuestas en forma de curvas características específicas y las limitaciones reales que presentan estos componentes. El objetivo, por consiguiente, de este epígrafe es exponer de una forma simplificada los diversos dispositivos utilizados en electrónica de potencia y la forma en que trabajan. Como quiera que se basan en el empleo de materiales semiconductores, consideramos que es importante iniciar este apartado explicando lo que son estos materiales.

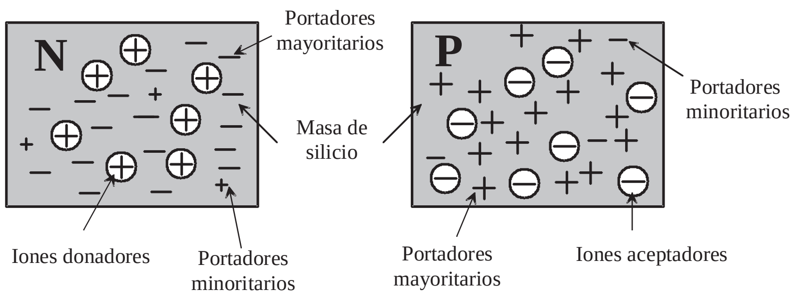
7.2.1. Introducción

Los semiconductores son materiales que tienen una resistividad cuyo valor está comprendido entre la de un conductor y un aislador. Los dos semiconductores más importantes en electrónica son el germanio y el silicio; estos elementos están situados en la columna IV de la Tabla Periódica y tienen 4 electrones de valencia en su última capa. La estructura cristalina de ambos elementos es un tetraedro en el que cada átomo comparte un electrón de valencia con cuatro átomos vecinos formando enlaces covalentes; de este modo la capa electrónica de cada átomo tiene un total de ocho electrones: cuatro propios y otros cuatro pertenecientes a los

átomos vecinos; en esta situación es imposible distinguir cuáles de los electrones de valencia son propios y cuáles extraños, ya que ambos se han convertido en electrones comunes del cristal semiconductor. A temperatura cercana al cero absoluto, un semiconductor se comporta como un aislador, y no conduce la corriente porque no hay electrones libres; pero al elevarse la temperatura, el enlace de los electrones de valencia se debilita y algunos de ellos, en virtud del movimiento térmico, pueden abandonar sus átomos. El electrón escapado se convierte en libre y allí donde estuvo hasta entonces se origina un sitio libre; este sitio libre en el enlace interatómico del semiconductor se llama convencionalmente **hueco**. Cuanto más alta es la temperatura del semiconductor, tanto mayor es el número de *electrones libres y de huecos* que surgen en él. De este modo, la formación de un hueco en la masa del semiconductor se debe a la salida de un electrón de valencia de la envoltura del átomo y corresponde a la aparición de una carga eléctrica positiva igual a la carga negativa del electrón. En un *semiconductor puro* o *intrínseco* el número de electrones que se liberan en cada instante es igual al número de huecos que se forman en ese mismo tiempo. Su número total a la temperatura ambiente es relativamente pequeño, por eso la conductividad eléctrica de este semiconductor, denominada intrínseca, es pequeña (por ejemplo, en el caso del germanio, hay un electrón [hueco] libre por cada $5 \cdot 10^{10}$ átomos de germanio).

Sin embargo, el hecho sobresaliente de un semiconductor intrínseco es que, al añadir aunque sólo sea una cantidad insignificante de impureza en forma de átomos de otros elementos, su conductividad se eleva enormemente. Este proceso se denomina *dopado*, y según sea la estructura atómica de estos elementos que se añaden, la conducción en el semiconductor se hace bien por electrones o bien por huecos. Así, si se sustituye en un cristal semiconductor de silicio un átomo del mismo por un átomo de un elemento de valencia cinco (por ejemplo, de antimonio), se producirán cuatro enlaces o apareamientos entre electrones del antimonio y del semiconductor, pero el quinto electrón de valencia del antimonio sobra y queda libre. Cuantos más átomos de antimonio se introduzcan en el semiconductor, tantos más electrones libres habrá en su masa. El antimonio constituye de este modo un elemento *donador de electrones*. El semiconductor creado se demonina *extrínseco de tipo N* (de tipo Negativo), ya que la conducción se produce debido a este excedente de electrones de un modo análogo al proceso de conducción en los metales.

En la Figura 7.1*a* se representa de un modo gráfico el material N. Obsérvese el gran número de electrones libres en este material, representados por los signos (−), en la masa de silicio, y que constituyen los *portadores mayoritarios* de este tipo de semiconductor. Los iones donadores del material N son positivos, ya que han perdido un electrón, y por ello se han representado por círculos blancos con un signo (+) en su interior. También existe un número



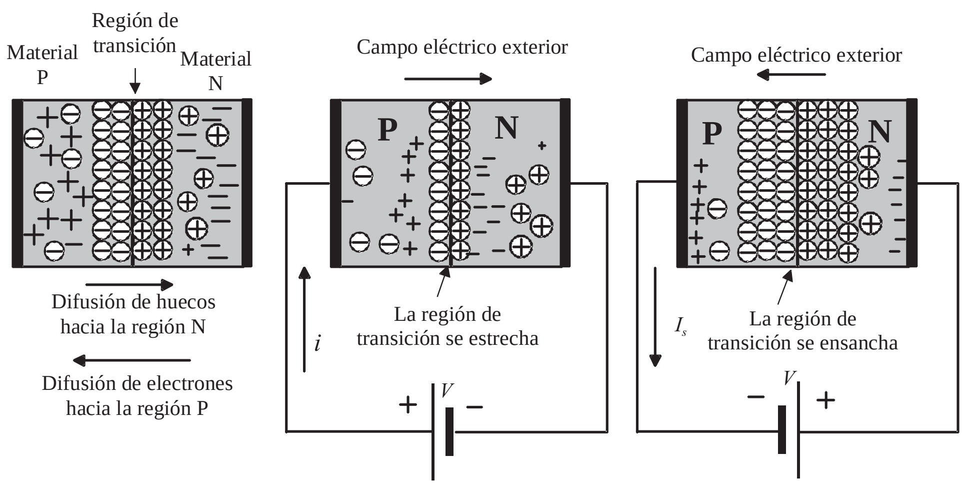
a) Material tipo N *b*) Material tipo P

Figura 7.1. Materiales semiconductores.

escaso de huecos generados térmicamente, y que se han señalado con signos (+) en la masa de silicio; representan los *portadores minoritarios* del semiconductor tipo N.

Algo totalmente distinto sucede si el dopado se realiza con un elemento trivalente, por ejemplo, de indio. En este caso, cada átomo del metal indio, con sus tres electrones de valencia, enlaza solamente con tres de los átomos vecinos del semiconductor; para enlazar con el cuarto átomo le falta un electrón, y así, se origina un hueco; éste, como es natural, puede llenarse con un electrón cualquiera desprendido de un enlace de valencia del semiconductor. Cuantos más átomos de indio se introduzcan en el cristal de silicio, tantos más huecos habrá en su masa, de tal modo que al romperse los enlaces entre átomos, los electrones correspondientes se moverán de hueco en hueco en toda la masa del semiconductor, y así en cada instante el número de huecos será mayor que el número de electrones libres. El indio constituye de este modo un elemento *aceptador de electrones*. El semiconductor creado se demonina *extrínseco de tipo P* (de tipo Positivo), lo que significa que el fenómeno de la conducción de corriente en la masa del semiconductor tipo P va acompañado de la continua generación y desaparición de cargas positivas (huecos) que se comportan de este modo como portadores de corriente. En la Figura 7.1*b* se representa de un modo gráfico el material P. Obsérvese el gran número de huecos libres en este material, representados por los signos (+) en la masa de silicio y que constituyen los *portadores mayoritarios* de este tipo de semiconductor. Los iones aceptadores del material P quedan de este modo cargados negativamente y por ello se han representado por círculos blancos con un signo (−) en su interior. También existe un número escaso de electrones generados térmicamente y que se han señalado con signos (−) en la masa de silicio; representan los *portadores minoritarios* del semiconductor tipo P.

Cuando se realiza una unión entre los materiales P y N, tal como se indica en la Figura 7.2*a*, se dispone de un número preponderante de electrones libres en la región N y de huecos en la región P. Los electrones libres de la región N se difundirán hacia la región P, mientras que los huecos de la región P se difundirán hacia la región N. Los electrones libres que procedan de la zona N llegarán a una región en que la proporción de huecos es grande, lo que les hará recombinarse rápidamente con ellos, y viceversa, los huecos procedentes de la



a) Unión PN *b*) Unión PN con tensión directa *c*) Unión PN con tensión inversa

Figura 7.2. Uniones PN.

zona P se recombinarán con los electrones. Debido a este proceso, aparece una región de transición (zona de deplexión) en la que quedan al descubierto iones negativos en el lado P e iones positivos en el lado N, formándose de este modo una barrera de potencial que se opone a posteriores recombinaciones por difusión de portadores mayoritarios. Existe al mismo tiempo una corriente de arrastre debida a los portadores minoritarios, ya que si un electrón de la región P se acerca a la unión, caerá bajo la influencia de la barrera de potencial que en ella existe y pasará a la zona N, y del mismo modo, si un hueco de la región N se acerca a la unión, la barrera de potencial lo empujará a la región P. Como consecuencia de todo ello no hay corriente neta, ya que la *corriente de difusión de los portadores mayoritarios es equilibrada con la corriente de arrastre de los portadores minoritarios,* como consecuencia del campo eléctrico de la barrera.

Si se aplica una d.d.p. externa a la unión PN con la polaridad mostrada en la Figura 7.2*b* (se dice entonces que la *polarización es directa* o *positiva*), se produce una circulación de corriente que aumenta mucho con la tensión aplicada; esto se debe a que la pila produce un campo eléctrico que hace que los electrones de la región N se desplacen hacia la región P (en definitiva, del menos al más de la pila), mientras que los huecos de la región P se moverán al encuentro de los electrones, desde el terminal positivo al negativo. Al encontrarse en el límite de las regiones, *zona de deplexión* de la unión PN, los electrones se comportan como si saltasen a los huecos y como resultado unos y otros dejan de existir. El contacto metálico unido al polo negativo de la pila puede ceder a la región tipo N una cantidad de electrones prácticamente ilimitada, respondiendo así a la disminución de electrones en esta región, y el contacto unido al polo positivo de la pila puede aceptar de la región tipo P la misma cantidad de electrones, lo que equivale a la introducción en ella de la cantidad de huecos correspondiente. En este caso la zona de deplexión se estrecha, aumentando el número de portadores que se difunden a través de la unión, lo que da como resultado la circulación de una *corriente directa* a través del diodo, que se incrementa conforme aumenta la d.d.p. aplicada por la pila. Cuando se intercambian los polos de la pila (Fig. 7.2*c*), circula una débil corriente I_s de saturación. En este caso el comportamiento de las cargas eléctricas en el diodo es otro. Ahora el campo eléctrico aplicado por la pila hace que los electrones de la región N se alejen de la unión PN y se desplacen hacia el contacto positivo del diodo, y los huecos de la región P, hacia el contacto negativo; como resultado, la zona de deplexión se ensancha y se forma una región pobre en electrones y huecos y que por ello ofrece gran resistencia a la corriente. No obstante, en esta zona tendrá lugar un pequeño intercambio de portadores de corriente entre las regiones de la unión, por eso pasa corriente a través de la unión, pero su intensidad es mucho menor que la directa. Esta corriente recibe el nombre de *corriente inversa*.

Los diversos dispositivos semiconductores que se explican en este epígrafe utilizan diversas composiciones de materiales P y N, formando uniones semiconductoras similares a la aquí explicada, que en el caso más simple del diodo es una única unión P-N, en el caso del transistor son dos uniones P-N-P o N-P-N y en el caso de los tiristores son tres uniones P-N-P-N. Cada dispositivo tiene sus propiedades características, dependiendo de la disposición de uniones semiconductoras y de la forma en que se inyecta corriente a las mismas o se polarizan mediante tensiones adecuadas.

7.2.2. Diodos rectificadores

Estos dispositivos se basan en una unión semiconductora tipo **P-N**. Si se considera simplemente una barra de silicio, dopada en un lado para obtener un semiconductor tipo P y en el otro un semiconductor tipo N, la unión PN representa la frontera entre ambas configuracio-

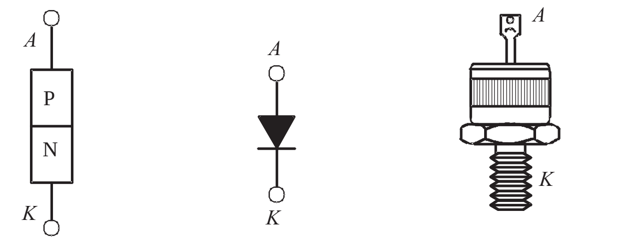
nes. El diodo tiene por ello dos terminales, el que se conecta al material P es el ánodo (A) y el que se conecta al material N es el cátodo (K). En la Figura 7.3 se muestra en *a*) la unión P-N del diodo rectificador y en *b*) el símbolo utilizado para su representación. La forma externa del encapsulado de un diodo suele ser cilíndrica para los diodos de señal y los rectificadores de pequeña corriente y se construye con vidrio, metal o plástico; el cátodo suele distinguirse con una banda de color o un punto, aunque a veces el encapsulado lleva grabado el símbolo del diodo para la fácil identificación de los terminales.

Para rectificadores de alta corriente, el *chip* rectificador se monta directamente sobre un metal base, cuyo cátodo acaba en forma de tornillo (Fig. 7.3*c*) para que pueda roscarse sobre una placa metálica (el chasis del equipo o en disipadores de calor especiales) de tal forma que se tenga un camino fácil para la conducción térmica y se disipe el calor producido en la unión. La conexión del ánodo se hace con un hilo conductor unido a la parte superior del chip y sale hacia fuera a través de un sellado de cerámica o vidrio.

Los diodos pueden ser de baja potencia, denominados entonces **diodos de señal**, y de gran potencia (para corrientes superiores a 1 A), recibiendo entonces el nombre de **rectificadores**. La característica tensión-corriente de un diodo real es la indicada en la Figura 7.4*a*. Como ya se ha indicado, cuando se aplica una polarización positiva, el diodo conduce de tal forma que la corriente aumenta mucho con la tensión aplicada.

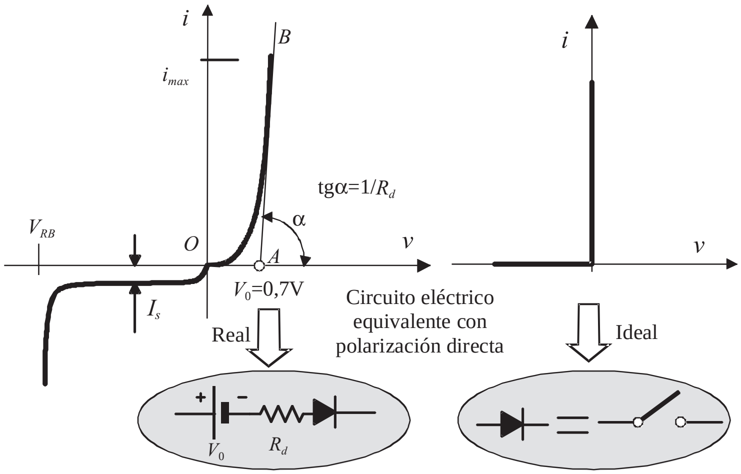
Cuando la polarización es negativa, es decir, se intercambian los polos de la pila, el diodo lleva una débil corriente I_s de saturación. Esta corriente recibe el nombre de *corriente inversa* del diodo.

En la Figura 7.4*a* se observa la característica $I = f(V)$ del diodo y se ve que la respuesta es *no lineal*. Se puede obtener un modelo lineal o circuito equivalente del diodo en la zona correspondiente a polarizaciones directas o positivas y que es útil en algunas aplicaciones (el modelo puede completarse para extenderlo a la curva completa). La idea para realizar el modelo es sustituir la curva de la respuesta real por varios segmentos que se adapten lo más posible a la misma; entonces cada segmento representa una propiedad lineal sobre su rango. Para la característica directa del diodo de la Figura 7.4*a*, se observa que la línea AB corta al eje de abscisas para un valor de tensión de $V_0 = 0{,}7$ V, que representa el valor de la barrera de potencial para un diodo de silicio. La línea OA se considera como corriente cero, lo que indica que el diodo no comienza a conducir hasta que no se aplique un potencial externo del orden de 0,7 V, opuesto a la batería. Es fácil deducir que el circuito equivalente podrá representarse por el esquema indicado en la parte inferior de la Figura 7.4*a*. El valor V_0 es la intersección de la recta AB con el eje de tensiones y R_d es la resistencia directa, que viene representada por la inversa de la pendiente del tramo AB. Este modelo puede ser útil cuando el diodo trabaja con pequeñas tensiones y corrientes, como sucede con el diodo de señal que generalmente se utiliza en la modificación y control de información, como es el caso de la electrónica digital,



a) Unión PN *b*) Símbolo del diodo *c*) Forma constructiva

Figura 7.3. Diodo rectificador.



a) Característica real de un diodo *b*) Característica ideal de un diodo

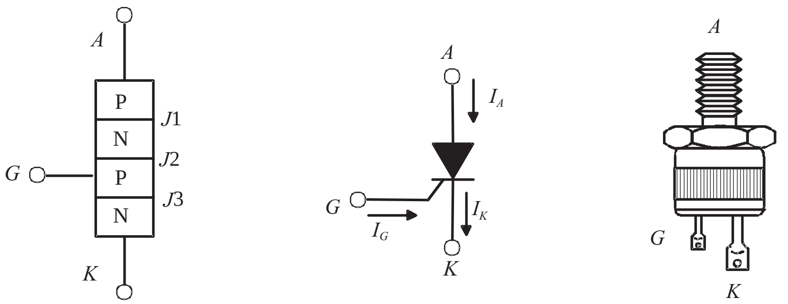
Figura 7.4. Curvas real e ideal del diodo.

donde los diodos se pueden emplear como puertas lógicas para direccionar la información. Téngase en cuenta que el diodo no empieza realmente a conducir hasta que no se aplique una tensión directa de por lo menos 0,7 V; es claro que si se aplica una d.d.p. inferior a este valor el diodo no conducirá, lo que podría interpretarse como que la señal externa es de sentido inverso, lo cual no es cierto. En consecuencia, cuando se empleen diodos como detectores de señal será preciso que las d.d.p. que se apliquen superen el umbral de 0,7 V para obtener una información útil; con señales inferiores quedará una incertidumbre en el conocimiento de la polaridad de la tensión aplicada.

Cuando se emplean diodos para grandes potencias, como es el caso de la ***rectificación***, es claro que la d.d.p. de 0,7 V más la caída interna del diodo, que pueden suponer un total de 1 V, no representarán más que un pequeño porcentaje de la tensión total, por ello lo que se hace en **rectificación** es considerar el diodo como ideal con la respuesta representada en la Figura 7.2*b*; es decir, el diodo conduce cuando se aplica tensión directa, presentando una resistencia nula, y no conduce con polarización inversa, presentando entonces resistencia infinita; este comportamiento hace que se pueda considerar el diodo como un interruptor de dos posiciones (conducción/no conducción, o en inglés: ON/OFF). Esta simplificación es muy ventajosa en el estudio de los circuitos rectificadores, que se hará más adelante. La corriente directa *i* está limitada por el calentamiento en el material semiconductor. En la actualidad existen diodos rectificadores que pueden llevar una corriente de 5.000 amperios y con tensiones inversas de pico de 5 kV.

7.2.3. Tiristor o rectificador controlado

El siguiente grupo o categoría de dispositivos son los **rectificadores controlados**, que también se denominan rectificadores controlados de silicio o semiconductor (SCR: *Semiconductor Controlled Rectifiers*) o simplemente **tiristores**. Estos elementos son dispositivos de tres terminales: ánodo (*A*), cátodo (*K*) y puerta (*G*), correspondientes a tres uniones semiconductoras (P-N-P-N). En la Figura 7.5*a* se muestra la composición interna de un tiristor, en la Figura 7.5*b* el símbolo correspondiente y en la Figura 7.5*c* un tipo de configuración externa típica.

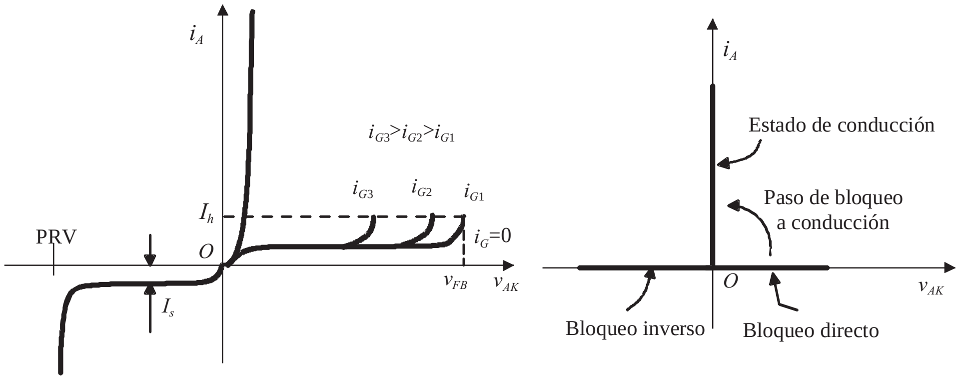


a) Composición interna *b*) Símbolo *c*) Forma constructiva

Figura 7.5. Tiristor.

Los tiristores tienen propiedades semejantes a los diodos rectificadores cuando funcionan con tensiones negativas; al aplicar una tensión inversa (ánodo negativo respecto al cátodo), la unión central *J*2 tiene polarización positiva mientras que las uniones *J*1 y *J*3 quedan polarizadas inversamente y es por ello que circula entonces una pequeña corriente de dispersión por el circuito. Si se aumenta la tensión inversa hasta un valor conocido como tensión de ruptura inversa V_{RB} *(reverse breakdown voltage),* se produce un efecto de avalancha en las uniones *J*1 y *J*3 y la corriente se eleva bruscamente, pudiendo causar la destrucción del tiristor. Cuando se aplican tensiones positivas (ánodo positivo respecto al cátodo), la corriente que llevan es despreciable y que se debe a la pequeña corriente de dispersión de la unión central *J2*, que queda polarizada inversamente. Sin embargo, si la tensión directa ánodo-cátodo alcanza un valor crítico, denominado tensión de ruptura directa V_{FB} *(forward breakdown voltage),* el tiristor pasa al estado de conducción. Si habiendo aplicado tensiones positivas se introduce una corriente en el electrodo de puerta (en el sentido puerta-cátodo), se reduce la tensión de ruptura directa; para una corriente de puerta suficientemente elevada (del orden de 20 a 200 mA) se elimina la región de bloqueo directo y el tiristor inicia su conducción comportándose como un diodo. Cuando el dispositivo está conduciendo, se puede eliminar o desconectar la corriente de puerta y el tiristor sigue en conducción, estado ON (lo que indica que en la práctica es suficiente aplicar un pequeño impulso de corriente a la puerta durante un tiempo del orden de 10 a 50 microsegundos para iniciar la conducción del tiristor, sin ser necesario mantener constantemente la corriente de puerta). Sin embargo, si la corriente principal o de ánodo es inferior a un valor crítico, denominado corriente de mantenimiento I_h (que es del orden de 20 mA para un tiristor de 500 V, 100 A), el dispositivo pasa al estado de bloqueo o no conducción. En la Figura 7.6 se muestran las curvas características reales e ideales de los tiristores, donde se aprecian los hechos mencionados.

Teóricamente el apagado del tiristor se produce de una forma natural cuando la corriente de ánodo es nula (en realidad cuando es inferior a I_h), y esta forma de desconexión se denomina por ello apagado por ***conmutación natural*** o conmutación en línea; esta última denominación procede de que al trabajar el tiristor en redes de c.a., la corriente pasará por cero al final de cada semiciclo positivo, produciéndose una desconexión natural en sincronismo con la tensión de línea. Esta forma de actuar es la que tienen los tiristores cuando trabajan como rectificadores controlados para suministrar una c.c. regulada a partir de una red de alimentación de c.a. Sin embargo, cuando se utiliza el tiristor en una red de c.c., la corriente no pasa por cero de una forma natural (no hay semiciclos negativos), y en este caso se deben usar circuitos especiales para lograr el apagado del dispositivo, a base de hacer que la corriente principal se



a) Característica real de un tiristor *b*) Característica ideal de un tiristor

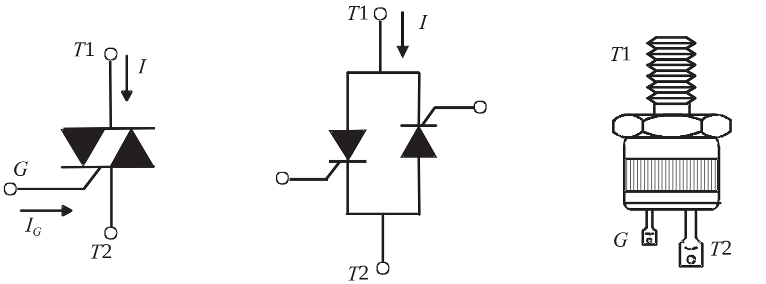
Figura 7.6. Curvas real e ideal de un tiristor.

anule, inyectando corriente en sentido contrario (es decir, entre cátodo y ánodo); se dice entonces que el apagado del tiristor, estado OFF, se produce por ***conmutación forzada***. Esta forma de trabajar es la que se utiliza en los inversores y choppers. Otro aspecto a considerar es que, si se aplica una tensión directa inmediatamente después de anularse la corriente de ánodo, al tiristor no le dará tiempo a bloquear la tensión directa y comenzará a conducir sin haber aplicado ningún impulso de disparo a la puerta. Es necesario por ello mantener el dispositivo polarizado inversamente durante un tiempo finito antes de aplicar tensiones directas. Este período se conoce como tiempo de apagado t_{off} del tiristor (que es del orden de 10 a 100 microsegundos). También se puede producir un encendido intempestivo del tiristor, si se aplica una tensión directa muy rápida, lo que se conoce como *dv/dt* de encendido; para evitar este problema se suele colocar un circuito serie resistencia-condensador, que se conecta en paralelo con los terminales ánodo-cátodo y que se denomina *red snubber*.

Otro aspecto a considerar es que si la corriente de ánodo sube muy rápidamente (*di/dt* alta), se puede averiar o destruir el tiristor; para evitar este problema suelen colocarse inductancias en serie con el dispositivo. En la práctica del control de motores eléctricos suele ser suficiente la inductancia de los propios devanados de la máquina, no necesitándose ninguna bobina adicional. La caída de tensión directa en los tiristores cuando están conduciendo es algo superior a la de los diodos rectificadores, ya que en este caso oscila entre 1 y 2,5 V, dependiendo de la tensión de alimentación del circuito. Los valores límites de corriente y tensión máxima de pico en estos componentes son comparables con los de los diodos. En la industria se utilizan tiristores que pueden llevar corrientes de 6.000 A, con tensiones inversas máximas de 12 kV, pero con frecuencias de conmutación muy limitadas que no suelen superar los 300 a 400 Hz. Su aplicación más importante está como rectificadores e inversores controlados en instalaciones de c.c. en alta tensión (HVDC, *high voltage direct current*, corriente continua en alta tensión) y en el accionamiento de grandes motores (hasta 25-30 MW).

Un dispositivo SCR especial que equivale a dos tiristores conectados en paralelo-inverso es el **triac**. En la Figura 7.7 se muestra el símbolo correspondiente. El triac funciona como un tiristor tanto en en los semiperíodos positivos como negativos; es decir, cuando *T*1 es positivo respecto a *T*2, el triac entra en conducción al aplicar un impulso de puerta positivo. Al contrario, si *T*2 es positivo respecto a *T*1, el dispositivo se activa al aplicar un impulso negativo a la puerta.

El triac se utiliza ampliamente en aplicaciones de pequeña potencia en el control de alumbrado de lámparas de incandescencia, en la regulación de velocidad de licuadoras, bati-



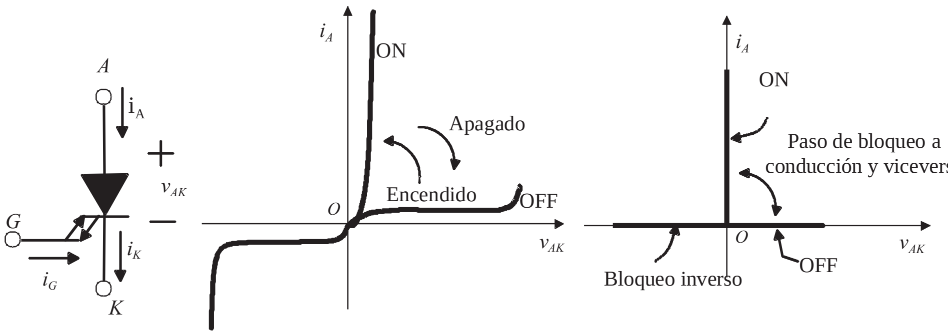
a) Símbolo del triac *b*) Circuito equivalente *c*) Forma constructiva

Figura 7.7. Triac: Símbolo, circuito y forma constructiva.

doras domésticas y también en el control de taladros eléctricos de mano. El triac es más económico que el empleo de dos tiristores en oposición; sin embargo, su capacidad *dv/dt* es más bien reducida y con tiempos de apagado elevados, y por ello no se fabrica ni se emplea en alta potencia.

7.2.4. Tiristor de apagado por puerta (GTO)

El tiristor de apagado por puerta (*gate-turn-off*), conocido vulgarmente por sus iniciales GTO, puede pasar al estado de conducción (encendido) aplicando un impulso positivo a la corriente de puerta, al igual que en los tiristores convencionales, pero tienen además la ventaja frente a estos últimos de que pueden desconectarse (apagado) también aplicando a la puerta un impulso de corriente pero de signo negativo. Debe destacarse, sin embargo, que la corriente que debe aplicarse a la puerta para producir el apagado del GTO es muy elevada, y corresponde a una relación i_A/i_G pequeña y que en la práctica varía entre 3 y 5. Por ejemplo, para un GTO típico de 2.500 V, 1.000 A, se requiere un pico de corriente de puerta negativa del orden de 250 A. Como quiera que en el proceso de apagado tanto la corriente como la tensión tienen valores elevados, las pérdidas por conmutación son grandes y es por este motivo por lo que sus aplicaciones se limitan a circuitos con frecuencias de conmutación inferiores a 1 kHz. Se fabrican GTO con valores asignados o nominales de 6 kV y corrientes de 6 kA. En la Figura 7.8 se indica el símbolo de este tiristor, junto con las curvas reales e ideales que rigen su funcionamiento.



a) Símbolo del GTO *b*) Curvas reales *c*) Curvas ideales

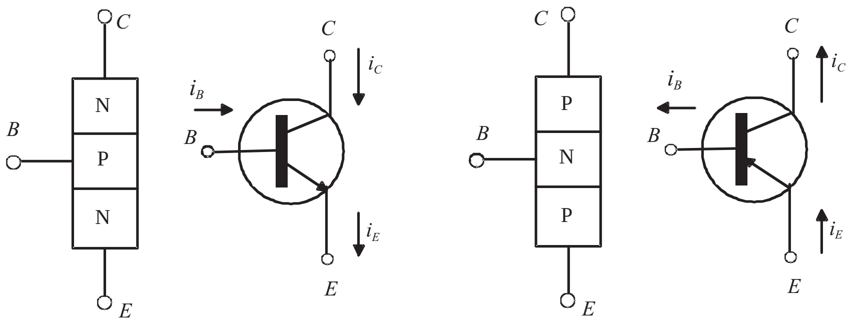
Figura 7.8. Tiristor GTO. Símbolo, curvas reales e ideales.

7.2.5. Transistor bipolar de unión (BJT)

El transistor de unión *bipolar (bipolar junction transistor)* es un dispositivo de tres terminales, formado por dos uniones PN creadas en un único cristal semiconductor. Esta disposición, junto con una polarización adecuada, permite utilizar el transistor como amplificador de corriente. El transistor de unión se denomina también transistor bipolar para distinguirlo de otros transistores empleados en electrónica, como son el transistor de efecto de campo (FET), transistor uniunión (UJT), etc. El transistor fue descubierto en diciembre de 1947 por los físicos americanos Bardeen y Brattain y el nombre procede de la contracción de la expresión inglesa «**Trans**fer res**istor**».

Hay dos tipos de configuraciones del transistor bipolar, el NPN y el PNP. En la Figura 7.9 se representan ambos tipos junto con los símbolos empleados para su identificación en los esquemas. El transistor NPN (Fig. 7.9*a*) tiene una región tipo P entre dos tipo N, mientras que el transistor PNP (Fig. 7.9*b*) tiene una región tipo N entre dos tipos P. Los tres terminales externos se conocen con el nombre de **emisor**, **base** y **colector**. Hoy día los transistores son casi todos de silicio y la configuración más frecuente es la NPN. En los símbolos de identificación, la flecha representa el emisor y señala el sentido real del flujo de cargas positivas en la región del emisor para cada tipo de transistor. También se han mostrado en la Figura 7.9 los sentidos reales de las intensidades en la base y colector.

En electrónica de potencia los transistores trabajan siempre en *conmutación*, es decir, en las zonas de **corte y saturación**. Para ello los terminales de colector y emisor se conectan al circuito principal y el terminal de base se toma como electrodo de control. En la Figura 7.10 se muestra un transistor de potencia utilizado en control de motores, junto con las curvas características reales e ideales del mismo. Si la corriente de base es cero, $i_B = 0$, el transistor está en corte o apagado (OFF), actuando como un interruptor abierto. Sin embargo, si se aplica una corriente a la base suficientemente grande para llevar el transistor a la zona de saturación, entonces el transistor conduce, estado ON, y actúa como un interruptor cerrado. En esta situación la tensión $v_{CE(sat)}$ es del orden de 1 o 2 V, por lo que las pérdidas por conducción en el BJT son relativamente pequeñas. Debe destacarse que el transistor es un dispositivo activo controlado por corriente, ya que la corriente de base determina si el estado del transistor es abierto o cerrado. Para mantener el transistor en conducción, la corriente de base debe ser suficiente (es necesario que la corriente de base i_B sea superior a i_C/h_{FE}, siendo i_C la corriente de colector y h_{FE} la denominada ganancia de corriente en c.c. del transistor).



a) Transistor NPN *b*) Transistor PNP

Figura 7.9. Tipos de transistores.

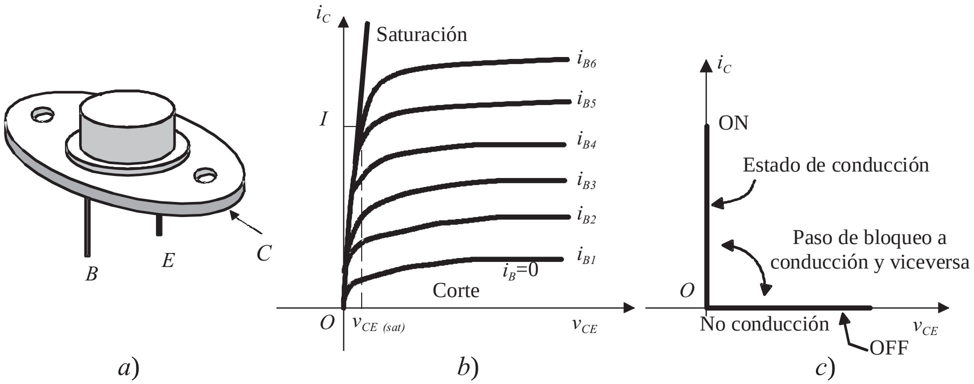


Figura 7.10. Transistor de potencia: Forma constructiva, curvas reales e ideales.

Los transistores preparados para tensiones y corrientes elevadas se conocen con el nombre de transistores de potencia, y en la práctica se construyen mediante conexiones especiales entre transistores como el tipo Darlington, que es una combinación tipo paralelo entre dos transistores y que se fabrican directamente en una misma pastilla de circuito integrado o chip. Existen transistores de potencia preparados para tensiones de 1.500 V y corrientes de 1.000 A, con tiempos de conmutación que van desde 400 ns hasta 5 μs.

7.2.6. Transistor MOSFET

El transistor de potencia MOSFET (*metal oxide semiconductor-field effect transistor*) es un transistor que conmuta muy rápidamente (del orden de 200 ns), por lo que se utiliza en las aplicaciones con alta frecuencia (del orden de 1 MHz) y baja potencia (unos pocos kW). Existen diversos nombres comerciales para este tipo de transistores, como HEXFET (de la empresa americana International Rectifier), SINMOS (Siemens) y TIMOS (Motorola). En la Figura 7.11 se muestra el símbolo correspondiente y las curvas de comportamiento real e ideal.

Los tres terminales se denominan: *drenador* D (*drain*), *fuente* S (*source*) y *puerta* G (*gate*). La corriente circula en el sentido drenador-fuente. El dispositivo tiene muy poca capacidad de bloqueo a la tensión inversa y por ello lleva integrado en su interior un diodo en sentido inverso. Al contrario que un transistor bipolar BJT, que es un dispositivo que dispara por corriente, un MOSFET es un dispositivo controlado por tensión (esta tensión es del orden de 5 V). Cuando se aplica una tensión positiva entre la puerta y la fuente V_{GS} positiva, el transistor entra en conducción. La puerta está aislada por una capa de óxido de silicio SiO_2, por lo que la impedancia de entrada de este dispositivo es muy elevada, lo que tiene la ventaja de que se puede actuar directamente con lógica digital CMOS o TTL, ya que la corriente de actuación de puerta es menor de 1 mA.

El MOSFET conmuta muy rápidamente y las pérdidas en este proceso son despreciables; sin embargo, cuando conduce (estado ON) su caída de tensión es alta, por lo que las pérdidas por conducción son elevadas. Por ejemplo, para un MOSFET de 400 V, 10 A, la caída de tensión es de 2,5 V y esta caída se incrementa con la temperatura y la corriente. Existen en el mercado MOSFET que llegan a 1.000 V, 100 A y 50 nanosegundos de tiempo de conmutación.

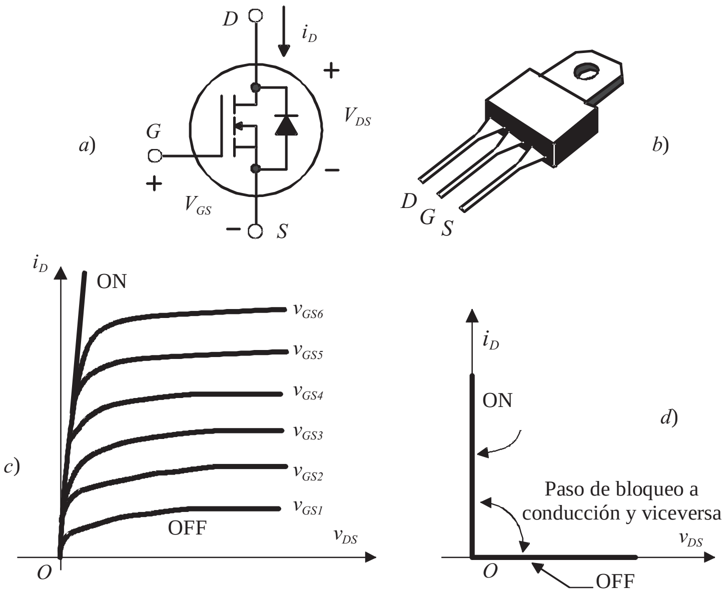


Figura 7.11. Transistor MOSFET: Símbolo, forma constructiva y curvas reales e ideales.

7.2.7. Transistor bipolar de puerta aislada IGBT

El transistor bipolar de puerta aislada IGBT (*insulated gate bipolar transistor*) es un dispositivo semiconductor de potencia híbrido, que combina las propiedades del transistor de unión BJT y del MOSFET. La puerta es tipo MOSFET, lo que le da una gran impedancia de entrada y la conducción o encendido del IGBT se hace por tensión como en el MOSFET. Al igual que el BJT, el IGBT tiene una caída de tensión en el estado de conducción que es reducida. La velocidad de conmutación es significativamente más pequeña que el MOSFET y del orden del BJT. El símbolo es el mostrado en la Figura 7.12 y también sus curvas de funcionamiento. Existen en el mercado IGBT de 2.000 V, 3.000 A y que son valores muy superiores a los transistores de unión BJT. La frecuencia de conmutación es del orden de 20 kHz.

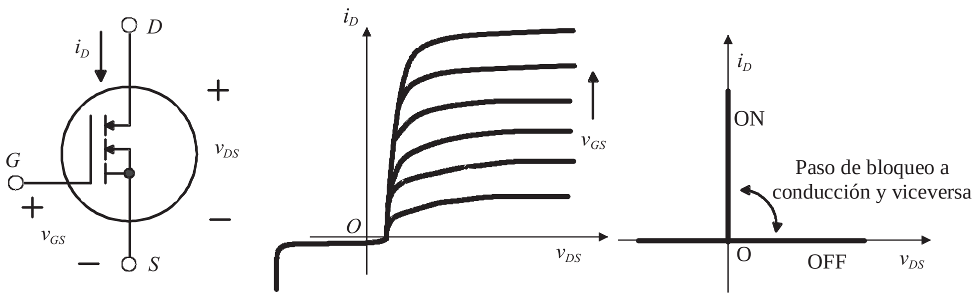


Figura 7.12. Transistor bipolar de puerta aislada IGBT: Símbolo, curvas reales e ideales.

7.2.8. Tiristor MCT

El tiristor controlado MOS, denominado por sus iniciales MCT (*MOS-controlled thyristor*), es un semiconductor de potencia híbrido que combina las propiedades del MOSFET y del tiristor. Es el componente electrónico más reciente (año 1988) y su símbolo es el mostrado en la Figura 7.13. El MCT es básicamente un tiristor que se enciende o se apaga por medio de una puerta tipo MOSFET. Tiene una alta *di/dt* (del orden de 100 A/μs) y un tiempo de apagado de 1,5 μs. Estas características, tan superiores a los demás dispositivos comentados anteriormente, le hacen que se considere el dispositivo de conmutación ideal, por lo que se le augura un gran futuro para su uso en accionamientos de motores de media y alta potencia. Existen en la actualidad MCTs de 4.500 V y 250 A.

7.2.9. Funcionamiento ideal de los dispositivos semiconductores

Los dispositivos semiconductores de potencia hasta aquí mencionados corresponden a la mayoría de los tipos existentes en el mercado. Pese a esta gran diversidad, se pueden clasificar en las tres categorías fundamentales mostradas en la Figura 7.14, a saber: *a*) *diodos rectificadores*, que sólo pueden conducir corriente en un sentido (de ánodo a cátodo) y no disponen de electrodo de control; *b*) *tiristores*, que conducen en un solo sentido, siempre que se aplique una corriente de control al electrodo de puerta. Los *triacs* se pueden incluir en esta categoría y pueden conducir la corriente en ambos sentidos actuando sobre la corriente de puerta. En ambos dispositivos SCR (rectificadores controlados de silicio) se pasa al estado de desconexión o apagado por conmutación natural, al anularse la corriente de ánodo; *c*) *dispositivos autoconmutados*, en el que se incluyen de una forma genérica todos los demás, es decir: GTO, BJT, MOSFET, IGBT y MCT. Se han representado en la Figura 7.14*c* para mayor sencillez por un único símbolo, en forma de interruptor al que se le añade una flecha para indicar la propiedad unidireccional de la corriente en todos ellos. Disponen de un electrodo de control denominado puerta (o base, en el caso de los BJT) que permite tanto el apagado como el encendido de los mismos (autoconmutados).

Evidentemente, cada uno de los dispositivos estudiados tiene propiedades específicas, como capacidad de llevar corriente, bloqueo a la tensión inversa, tiempo de encendido y apagado, frecuencia máxima de conmutación, etc., pero a nivel funcional se comportan como simples interruptores estáticos, que permiten la circulación de corriente en el sentido de la flecha cuando entran en conducción (*estado ON*) y no dejan pasar la corriente cuando están

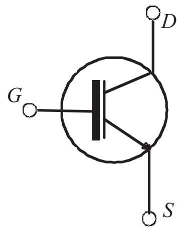
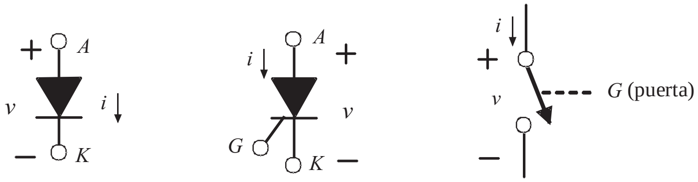


Figura 7.13. Símbolo del Tiristor MCT.



a) Diodo rectificador *b*) Tiristor *c*) Dispositivo autoconmutado

Figura 7.14. Categorías de dispositivos semiconductores de potencia.

apagados (*estado OFF*). En lo que sigue en este capítulo se supondrá que estos interruptores estáticos cumplen las condiciones ideales siguientes:

a) *En el estado OFF no dejan pasar la corriente a través de ellos, bloqueando tanto las tensiones directas como inversas aplicadas.*
b) *En el estado ON conducen las corrientes permitidas sin que se produzcan caídas de tensión apreciables.*
c) *La conmutación encendido-apagado (ON-OFF) o viceversa se produce instantáneamente al dar señal al electrodo de control (puerta o base en su caso).*
d) *La potencia necesaria para actuar (disparar) el interruptor es despreciable.*

7.3. CONVERTIDORES ELECTRÓNICOS DE POTENCIA

7.3.1. Introducción

Los convertidores electrónicos de potencia están basados en el uso de dispositivos semiconductores como los explicados en el epígrafe 7.2 y que trabajan en conmutación comportándose como **interruptores estáticos** que pueden estar cerrados o abiertos y que se considera a partir de ahora que tienen un funcionamiento ideal.

Antes de señalar los diversos tipos de convertidores conmutados es interesante comprender la ventaja que ellos presentan frente a los sistemas clásicos convencionales basados en ajustar la tensión en una carga, que puede ser una resistencia, un motor, etc., introduciendo una resistencia variable en serie con la carga para provocar una caída de tensión intermedia. Para ello se va a considerar el ejemplo mostrado en la Figura 7.15, en el que se dispone de una fuente de c.c. de 200 V que debe suministrar una potencia de 500 W a una resistencia eléctrica de 20 ohmios. En el caso de la Figura 7.15*a* se considera el sistema clásico que utiliza una resistencia en serie y en la Figura 7.15*b* se considera un interruptor electrónico señalado por un símbolo como el indicado en la Figura 7.14*c* que se va a abrir y cerrar de un modo periódico, haciendo variar de este modo el valor medio de la tensión de c.c. que llega a la resistencia de carga. Vamos a comparar los rendimientos de ambos circuitos.

Indudablemente, si se conecta la resistencia de carga de 20 ohmios directamente a la fuente de c.c. de 200 V, la potencia disipada en la carga sería:

$$P = R \cdot I^2 = \frac{V_s^2}{R} = \frac{200^2}{20} = 2.000 \text{ W}$$

Para limitar la potencia en esta carga es necesario incluir una resistencia en serie R_s tal como se indica en la Figura 7.15*a*. Podemos determinar el valor de esta resistencia calculando

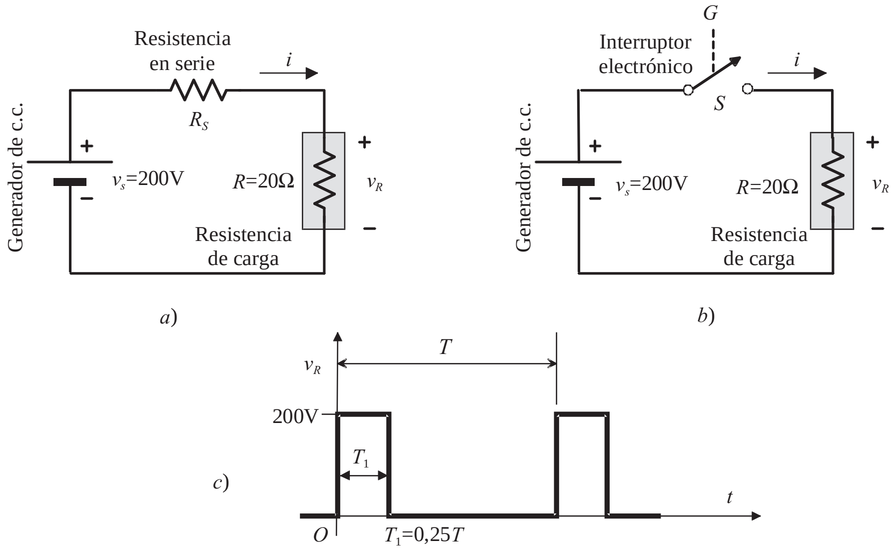


Figura 7.15. Estudio comparativo de un divisor de tensión y un interruptor electrónico.

previamente la tensión que debe llegar a la carga V_R para que la potencia disipada en R sea igual al valor requerido de 500 W. De acuerdo con la ecuación anterior, se debe cumplir:

$$P = 500 = R \cdot I^2 = \frac{V_R^2}{R} = \frac{V_R^2}{20} \quad \Rightarrow \quad V_R = \sqrt{20 \cdot 500} = 100 \text{ V}$$

y en consecuencia la caída de tensión que deberá haber en la resistencia en serie será de 200 − 100 = 100 voltios, lo que indica que R_s debe ser igual a R y, por tanto, igual 20 ohmios y en R_s se disiparán también 500 W; de este modo el rendimiento energético del circuito es del 50 por 100, ya que la fuente de c.c. debe producir 1.000 W, de los cuales 500 W se disipan en R_s y los otros 500 W se disiparán en la resistencia de carga R.

Si se utiliza el circuito de la Figura 7.15*b*, es indudable que si el *interruptor electrónico* S está siempre cerrado, la potencia disipada en la resistencia de carga sería, como ya se ha indicado antes, de 2.000 W; por otro lado, si el interruptor está abierto, la resistencia de carga no consumirá energía; ahora bien, si el interruptor se cierra y se abre periódicamente y se gradúa el cociente T_1/T (véase Fig. 7.15*c*), se podrá lograr la potencia deseada de 500 W. Como quiera que se requiere una potencia de 500 W frente a 2.000 W, el cociente T_1/T deberá ser:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{500}{2.000} = 0{,}25$$

Es decir, si el interruptor o conmutador electrónico está cerrado el 25 por 100 del tiempo, entonces la potencia media disipada en la resistencia de carga será el 25 por 100 de 2.000 W, esto es, 500 W, que es el valor que se deseaba conseguir. Es evidente que con este procedimiento toda la energía que produce la fuente de c.c. se entrega a la carga, sin ninguna pérdida intermedia. En la práctica, como quiera que el interruptor no es ideal, existe alguna pérdida en este dispositivo pero de valor muy reducido; por ejemplo, si se considera que el

interruptor electrónico es un transistor de unión cuya caída en conducción es del orden de 2 V, y teniendo en cuenta que la corriente que absorbe la resistencia de carga en directo es $I = 200/20 = 10$ A, entonces la potencia perdida en el transistor será de $2 \cdot 10 = 20$ W, pero como esto ocurre durante un 25 por 100 del tiempo de funcionamiento, la potencia media perdida será sólo del $25\% \cdot 20 = 5$ W, y de este modo de los 500 W que entrega la fuente, 5 W se disiparán en el interruptor electrónico (transistor) y llegarán a la carga 495 W, lo que representa un rendimiento energético del 99 por 100. El análisis anterior es muy simplificado pero permite comprender por qué los convertidores electrónicos se han impuesto en el control y regulación de máquinas eléctricas.

Los diversos tipos de conversión que se utilizan en la práctica se pueden clasificar en función de los tipos de señales, bien sean de c.a. o de c.c., que utilizan y responden a los grupos o clasificaciones siguientes:

a) ***Conversión corriente alterna a corriente continua:*** En este caso se dispone de una red de c.a. que se transforma por medio de una rectificación en una señal unidireccional, que más tarde se filtra por medio de bobinas y condensadores para obtener una salida aplanada que representa una onda de c.c. casi pura. Los convertidores utilizados se denominan **rectificadores**. Se puede variar la salida de c.c. utilizando un rectificador controlado o **tiristor**; en esta situación el convertidor se puede utilizar, como se verá más adelante, en la regulación de velocidad de motores de c.c.

b) ***Conversión corriente continua a corriente continua:*** Una tensión de c.c. se transforma en otra c.c. de amplitud menor e incluso mayor. Los convertidores que realizan esta aplicación se denominan **choppers** o **recortadores**. Este sistema se utiliza en la regulación de velocidad de trenes metropolitanos que disponen de una alimentación de 600 V y que recortando esta señal, de un modo análogo al señalado en la Figura 7.15*c*, pueden regular la velocidad de los motores de c.c. encargados de realizar la tracción del tren.

c) ***Conversión de corriente continua a corriente alterna:*** Se dispone de una red de c.c. que se conmuta de una forma adecuada para obtener corriente alterna. Los convertidores que realizan esta operación se denominan **inversores** y también **onduladores**. La salida de estos inversores está formada por trozos de ondas rectangulares o también escalonadas y se utilizan para el control de velocidad de motores de c.a. a partir de redes de c.c.; para ello se modifica la frecuencia de la onda de c.a. por técnicas de conmutación dentro del inversor. La forma de onda se puede aproximar a la senoidal modulando el ancho de impulso PWM (*pulse width modulation*). Existen en la actualidad muchos trenes alimentados por una red de c.c. que llevan, sin embargo, motores de c.a. asíncronos, cuyo arranque y regulación de velocidad se consigue por medio de inversores.

d) ***Conversión de corriente alterna a corriente alterna:*** Existen tres tipos de convertidores que se incluyen en este grupo, a saber:

1. ***Conversión c.a.-c.c.-c.a.:*** En este caso la conversión de corriente alterna a corriente alterna incluye una etapa intermedia de c.c. Para pasar de la corriente alterna de entrada a corriente continua se utilizan rectificadores fijos o controlados (**tiristores**); en la etapa siguiente se transforma la corriente continua intermedia en corriente alterna por medio de **inversores**. Este sistema se utiliza con frecuencia para el control de velocidad de motores de c.a. síncronos y asíncronos. Por ejemplo, de este modo se arrancan y regulan los trenes de alta velocidad españoles (AVE); a partir de una red de 25 kV de c.a. monofásica, se obtiene c.c.

por medio de rectificadores controlados, y en la etapa siguiente, por medio de inversores, se consigue una c.a. trifásica de frecuencia y tensión variable.

2. ***Conversión c.a. a c.a. por control de fase:*** Se utiliza una tensión de c.a. que se conmuta periódicamente una vez en cada semiciclo, dando lugar a una c.a. controlada en fase de la misma frecuencia que la de entrada pero de menor amplitud. Los dispositivos empleados son los **triacs** o dos tiristores en paralelo-inverso. Este sistema se utiliza para el control de alumbrado incandescente en iluminación industrial y doméstica. También se emplea en la regulación de velocidad de motores monofásicos de c.a. con colector de delgas (de pequeña potencia), como en batidoras domésticas, taladros eléctricos, etc. Este sistema se utiliza poco en la regulación de velocidad de motores trifásicos debido a que solamente admiten el control de la tensión y no de la frecuencia, por lo que no son adecuados para accionamientos eléctricos importantes, ya que al reducir solamente la tensión aplicada a un motor se reduce el par electromagnético que produce la máquina, que depende, como se sabe, del cuadrado de la tensión aplicada.
3. ***Conversión directa c.a.-c.a.:*** En este caso se obtiene una c.a. de frecuencia variable a partir de trozos de una c.a. de entrada; los convertidores se denominan entonces **cicloconvertidores**. La entrada generalmente es una red trifásica, y la salida, también trifásica, tiene una frecuencia menor que la correspondiente de entrada. Este tipo de conversión no es muy atractivo comercialmente porque requiere un equipo de control bastante complejo. Se utiliza en la regulación de velocidad de motores de c.a. trifásicos de gran potencia.

7.4. RECTIFICADORES

7.4.1. Rectificador monofásico media onda con carga resistiva

Constituye el más simple de los rectificadores. Considérese una tensión alterna senoidal:

$$v_s = V_m \text{ sen } \omega t = \sqrt{2} V \text{ sen } \omega t \tag{7.1}$$

donde V_m expresa el valor máximo o de pico y V el valor eficaz. Si se aplica esta señal a un circuito serie formado por un diodo y una carga resistiva (Fig. 7.16), el diodo conducirá cuando esté polarizado directamente, es decir, en aquellos semiciclos de la señal generadora en que el ánodo sea positivo frente el cátodo, lo que corresponde a los semiciclos positivos, ya que entonces el terminal A del generador (aplicado al ánodo del diodo) es más positivo que el terminal B (que por medio de R está conectado al cátodo). Durante estos semiciclos positivos, si se supone el diodo ideal (es decir, sin caídas internas de tensión), la tensión del generador aparecerá en la carga v_R, mientras que la d.d.p. en el diodo será cero. En los semiciclos negativos de la tensión del generador el terminal B será más positivo que el A, quedando el diodo polarizado inversamente y no dejando pasar ninguna corriente a través de él. Durante estos semiperíodos no se tendrá ninguna tensión en la carga y la tensión de la red quedará aplicada al diodo. Partiendo de una tensión alterna senoidal, se obtiene una tensión unidireccional en la carga (resistencia) del tipo semionda o **media onda** (curva discontinua de la Fig. 7.16), que da origen al nombre con que se designa el rectificador.

La onda es unidireccional en el sentido de que no cambia de polaridad; sin embargo, es oscilante debido que lleva incorporadas componentes alternas. Estas componentes alternas se

pueden obtener desarrollando en serie de Fourier la función periódica correspondiente a v_R. Como el lector puede demostrar fácilmente, se obtiene la siguiente expresión:

$$v_R = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \text{ sen } \omega t - \frac{2V_m}{\pi} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos n\omega t \tag{7.2}$$

Esta ecuación demuestra que la salida del rectificador de media onda tiene un término de corriente continua (V_m/π) que es el valor medio V_{cc} de la tensión v_R; otro término ($V_m/2$) sen ωt que demuestra que la salida contiene energía a la frecuencia de la red, y una serie de términos de orden superior cuyas frecuencias son múltiplos pares de la frecuencia de la red (*armónicos pares*). A medida que aumenta la frecuencia de un armónico, su amplitud decrece. En resumen, la tensión media de la c.c. resultante vale:

$$V_{cc} = \frac{V_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} = 0{,}318\ V_m \tag{7.3}$$

que corresponderá a una corriente:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R} = \frac{V_m}{\pi R} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi R} \tag{7.4}$$

que será la corriente media del diodo. Si se observa la Figura 7.16, la *tensión inversa de pico* en el diodo (PIV) será igual a la máxima de la red $V_m = \sqrt{2}V$; por tanto, la PIV del diodo se elegirá para que soporte esta tensión inversa máxima.

Para poder juzgar la calidad de onda que suministra un rectificador, se suele definir lo que se denomina **factor de rizado**, que viene a indicar el porcentaje de c.a. que lleva superpuesta la c.c.; este factor r viene dado por el cociente:

$$r = \frac{\text{valor eficaz de la componente alterna de la tensión de salida}}{\text{valor medio de la tensión de salida}} \tag{7.5}$$

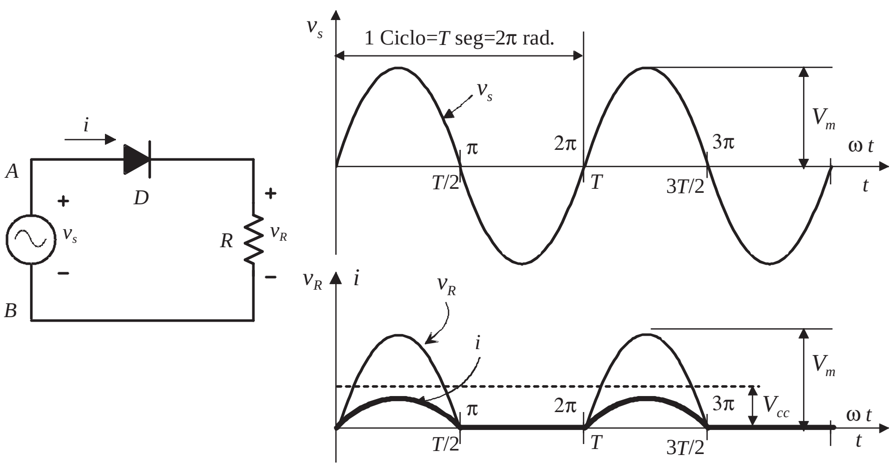


Figura 7.16. Rectificador media onda.

Como quiera que la componente alterna de salida se llama el *rizado*, si éste tiene un valor eficaz V_r y es V_{cc} el valor medio de la continua, la expresión (7.5) se puede poner:

$$r = \frac{V_r}{V_{cc}} \tag{7.6}$$

Para calcular este cociente, consideremos una tensión instantánea v_R en la salida que se compone de una tensión continua V_{cc} y una tensión instantánea de alterna v_{ac}, y se tendrá entonces:

$$v_R = v_{ac} + V_{cc} \tag{7.7}$$

Por definición de valor eficaz de una señal periódica el lector puede demostrar que el cuadrado del valor eficaz de la tensión total es igual a la suma de los cuadrados de los valores eficaces de las tensiones componentes. Si el valor eficaz de la tensión v_R es V_{ef} y el de v_{ac} es V_r, la ecuación (7.7), expresada como relación entre valores eficaces, será:

$$V_{ef}^2 = V_r^2 + V_{cc}^2 \tag{7.8)*$$

en consecuencia:

$$V_r = \sqrt{V_{ef}^2 - V_{cc}^2} \tag{7.9}$$

pero el valor eficaz de la semionda total (señalada por trazo discontinuo en la Fig. 7.16) vale:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\ dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi V_m^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta} = \frac{V_m}{2} \tag{7.10}$$

y teniendo en cuenta que $V_{cc} = V_m/\pi$, resulta:

$$V_r = \sqrt{\left(\frac{V_m}{2}\right)^2 - \left(\frac{V_m}{\pi}\right)^2} = V_m\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\pi}\right)^2} = 0{,}386\ V_m \tag{7.11}$$

y, por tanto, el rizado será:

$$r = \frac{V_r}{V_{cc}} = \frac{0{,}38\ V_m}{V_m/\pi} = 1{,}21 \tag{7.12}$$

Otro aspecto a considerar en los rectificadores es la llamada eficacia o *rendimiento de la rectificación*, definida como el cociente entre la potencia de corriente continua entregada a la carga P_{cc} y la potencia total que se envía a la misma P_t, es decir:

$$\eta_r = \frac{P_{cc}}{P_t} = \frac{V_{cc}I_{cc}}{V_{ef}I} \tag{7.13}$$

y como quiera que se cumple:

$$V_{cc} = \frac{V_m}{\pi} \quad ; \quad I_{cc} = \frac{V_m}{\pi R} \quad ; \quad V_{ef} = \frac{V_m}{2} \quad ; \quad I = \frac{V_m}{2R} \tag{7.14}$$

---

* Es fácil deducir esta relación teniendo en cuenta el sentido físico del valor eficaz. Si a la resistencia de carga R se le aplica una d.d.p. continua V_{cc}, la potencia disipada será V_{cc}^2/R. Cuando se aplica la c.a. V_r se disipa: V_r^2/R. Si se aplican las dos tensiones, es decir, una total del valor eficaz, V se disipará: V^2/R. Al igualar esta última potencia a la suma de las otras dos se obtiene la ecuación (7.8).

resultará:

$$\eta_r = \frac{V_m^2/\pi^2 R}{V_m^2/4R} = \frac{4}{\pi^2} = 0{,}405 \tag{7.15}$$

Si el generador del circuito de la Figura 7.15 fuera el secundario de un transformador, la tensión eficaz V sería $V_m/\sqrt{2}$ y la intensidad eficaz I, de acuerdo con (7.14), sería igual a $V_m/2R$. En consecuencia, el *factor de utilización* f_u del transformador, definido como cociente entre la potencia de c.c. de la carga y la potencia de c.a. del transformador, valdrá:

$$f_u = \frac{P_{cc}}{P_{transformador}} = \frac{V_m^2/\pi^2 R}{V_m^2/2\sqrt{2}R} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} = 0{,}287 \tag{7.16}$$

El significado de este rendimiento se puede explicar mejor utilizando un ejemplo numérico. Si se usa un transformador de 1 kVA en un rectificador media onda con carga resistiva (1 kW), la potencia de c.c. disponible en la carga será sólo de 287 W (sin considerar las pérdidas de potencia en el diodo).

Otro aspecto a considerar es que la corriente continua de la carga pasa por el secundario del transformador, pudiendo saturar el núcleo del mismo. Para prevenir este efecto el diseño de transformadores utilizados en equipos de rectificación debe calcularse con inducciones bajas: 0,9 a 1,1 teslas, en vez de 1,4 a 1,5 teslas que es lo normal para chapas de grano orientado. En conclusión, se puede establecer que los rectificadores media onda tienen las siguientes desventajas: *1) Rizado muy grande. 2) Rendimiento de la conversión o relación de rectificación pequeña. 3) Factor de utilización del transformador bajo. 4) Posibilidad de saturación de c.c. del secundario del transformador.*

Ejemplo de aplicación 7.1

El circuito rectificador de la Figura 7.16 se conecta a una alimentación de c.a. de tensión eficaz 30 V, 50 Hz. Si la potencia de c.c. en la carga R es de 100 W, calcular: a) Tensión de c.c. en la carga V_{cc}; b) resistencia de la carga; c) potencia aparente suministrada por la fuente de alimentación de c.a.

Solución

a) La tensión máxima o de cresta de la alimentación es $\sqrt{2}$ veces el valor eficaz (por ser una tensión sinusoidal), es decir:

$$V_m = V\sqrt{2} = 30\sqrt{2} = 42{,}43 \text{ voltios}$$

La tensión V_{cc} viene expresada por la relación (7.3), es decir:

$$V_{cc} = \frac{V\sqrt{2}}{\pi} = \frac{42{,}43}{\pi} = 13{,}5 \text{ voltios}$$

b) Como quiera que la potencia P_{cc} en la carga es de 100 W, la intensidad de c.c. será:

$$I_{cc} = \frac{P_{cc}}{V_{cc}} = \frac{100}{13{,}5} = 7{,}4 \text{ amperios}$$

En consecuencia, la resistencia que ofrece la carga será:

$$R = \frac{V_{cc}}{I_{cc}} = \frac{13{,}5}{7{,}4} = 1{,}82 \text{ ohmios}$$

c) La intensidad eficaz de la corriente que da el secundario del transformador, teniendo en cuenta (7.14), es:

$$I = \frac{V_m}{2R} = \frac{42{,}43}{2 \cdot 1{,}82} = 11{,}66 \text{ A}$$

En consecuencia, la potencia aparente entregada por la fuente de c.a. será: $S = VI = 30 \cdot 11{,}66 = 349{,}8$ VA.

7.4.2. Rectificador monofásico media onda con carga inductiva

El comportamiento de un rectificador (y en general de un convertidor estático) depende en bastante medida del tipo de carga que alimenta. En el epígrafe anterior se ha analizado el funcionamiento de un rectificador monofásico media onda que alimenta una carga resistiva. Se observa que en este caso la corriente en la resistencia de carga tiene la misma forma que la tensión. En la práctica de la electrónica de potencia, las cargas suelen ser motores eléctricos cuyos devanados ofrecen resistencia e inductancia. Se va a estudiar en este epígrafe la influencia que ejerce esta inductancia en la forma de la onda de corriente en la carga y en el modo en que se produce la conducción en el diodo rectificador. Considérese para ello el esquema de la Figura 7.17, que muestra un rectificador monofásico media onda que alimenta una resistencia R en serie con una inductancia L.

Para calcular en este caso la corriente en la carga se debe aplicar el 2.º lema de Kirchhoff al circuito de la Figura 7.17*a*, mientras el diodo D está en conducción, lo que da lugar a la siguiente ecuación diferencial:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = V_m \text{ sen } \omega t \tag{7.17}$$

cuya solución es la suma de una corriente estacionaria o de régimen permanente (respuesta forzada o solución particular de la ecuación diferencial anterior) $i_p(t)$ y una corriente transitoria $i_t(t)$ (respuesta natural, o solución de la ecuación diferencial homogénea). La corriente de régimen permanente se determina en la forma clásica que se emplea en la teoría de circuitos de c.a. (es decir, en el dominio fasorial), lo que da lugar a:

$$i_p(t) = \frac{V_m}{Z} \text{ sen } (\omega t - \theta) \tag{7.18a}$$

donde los valores de Z y θ son:

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad ; \quad \theta = \text{arctg}\,\frac{L\omega}{R} \tag{7.18b}$$

La corriente transitoria es la solución de la ecuación diferencial homogénea, es decir, haciendo el 2.º término de (7.17) igual a cero, lo que conduce a un valor:

$$i_t(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad ; \quad \text{con } \tau = L/R \tag{7.18c}$$

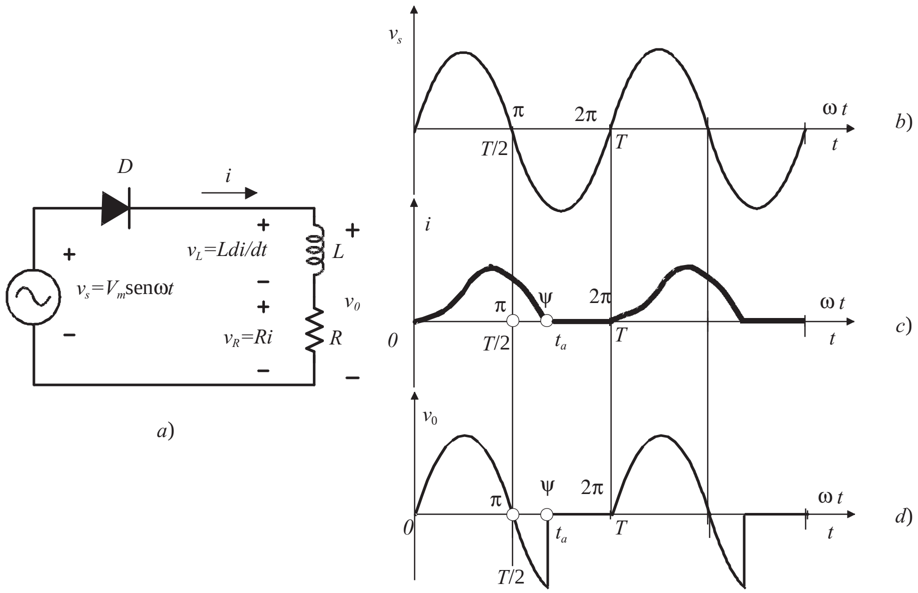


Figura 7.17. Rectificador media onda con carga inductiva.

donde A es una constante de integración y τ un parámetro del circuito, denominado *constante de tiempo*, y que es igual a L/R. Por consiguiente, la solución completa de (7.17) es:

$$i(t) = i_p(t) + i_t(t) = \frac{V_m}{Z} \text{sen}\ (\omega t - \theta) + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (7.19a)$$

Si se considera que en $t = 0$ la corriente total anterior $i(t)$ es igual a cero, se obtiene que $A = (V_m \text{ sen } \theta)/Z$, de donde se deduce finalmente una expresión para la corriente:

$$i(t) = \frac{V_m}{Z}\left[\text{sen}\ (\omega t - \theta) + \text{sen}\ \theta \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right] \qquad (7.19b)$$

cuya evolución con el tiempo se ha señalado en la Figura 7.17*c*. A partir de la expresión anterior se puede calcular el valor del tiempo t_a o su correspondiente ángulo ψ, para el cual la corriente $i(t)$ se hace cero (véase Figs. 7.17*c* y *d*). Es importante darse cuenta en las ondas de la Figura 7.17 que, al ser el circuito inductivo, la corriente circula más allá de $T/2$, es decir, de π radianes, por lo que el diodo D sigue conduciendo hasta el tiempo t_a en el que se anula la corriente en el circuito, pese a que la tensión existente entre $T/2$ y t_a es negativa. La tensión en la carga $v_0(t)$ tiene la forma mostrada en la Figura 7.17*d*, cuyo valor medio es:

$$V_{cc} = \frac{V_m}{2\pi}\int_0^{\psi} \text{sen}\ \theta\ d\theta = \frac{V_m}{2\pi}[1 - \cos\psi] \qquad (7.20)$$

Comparando esta ecuación con la (7.3) se observa que el valor medio de la tensión en la carga se reduce al aumentar el valor de la inductancia del circuito, y por ello no es muy útil para rectificar grandes potencias. Una forma de mejorar el circuito anterior para que sea útil en aplicaciones de pequeña potencia es colocar un segundo diodo D_w en paralelo con la carga, tal como se muestra en la Figura 7.18*a*. Este diodo recibe el nombre de **diodo volante o de**

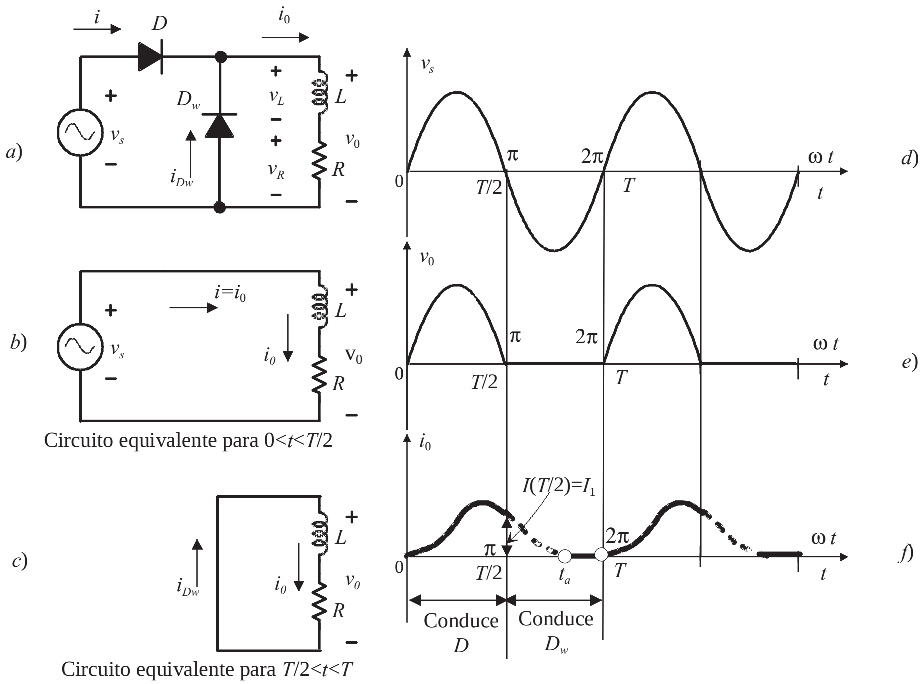


Figura 7.18. Rectificador media onda con diodo volante.

libre circulación (*freewheeling diode*) y su misión es conseguir que la tensión de salida v_0 del circuito no tenga ningún tramo negativo.

El funcionamiento de este circuito es el siguiente: durante el semiciclo positivo de la tensión de alimentación entra en conducción el diodo principal D, mientras que el D_w no conduce porque está polarizado inversamente, dando lugar al circuito equivalente de la Figura 7.18*b*. Cuando $\omega t = \pi$, la tensión de alimentación invierte su polaridad, por lo que el diodo D se corta (anulándose la corriente principal i) y la corriente de carga i_0 se cierra por el camino que ofrece el diodo volante D_w, de acuerdo con el circuito equivalente de la Figura 7.18*c*; de este modo se consigue, como se muestra en la Figura 7.18*e*, que la tensión en la carga v_0 tenga la misma forma que en el caso del rectificador media onda con carga resistiva (comparar la Fig. 7.18*e* con la Fig. 7.16), con un valor medio de c.c. expresado por $V_{cc} = V_m/\pi$, tal como se señalaba en (7.3). En la Figura 7.18*f* se muestra la forma de onda de la corriente en la carga i_0. El tramo correspondiente al semiperíodo positivo responde, al igual que en el caso anterior, a la ecuación (7.19*b*), que es la solución del circuito equivalente de la Figura 7.18*b*, mientras que el tramo de corriente correspondiente al semiperíodo negativo de v_0 se calcula a partir del circuito equivalente de la Figura 7.18*c*, ya que el diodo volante cortocircuita la carga. La ecuación diferencial de este circuito viene expresada por:

$$0 = L\frac{di}{dt} + Ri \tag{7.21}$$

Si se redefine el origen de tiempos cuando se inicia este semiperíodo, la condición inicial de la ecuación anterior es que $i(t = 0) = I(T/2) = I_1$, que es el valor de la corriente del primer

semiciclo en $t = T/2$, como se muestra en el esquema de la Figura 7.18*f*. La solución de (7.21), teniendo en cuenta la condición inicial anterior, es análoga a (7.18*c*) y vale:

$$i_0(t) = I_1 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad ; \quad \text{con } \tau = L/R \tag{7.22}$$

que es una señal exponencial que se reduce a cero en $t = t_a$, como se muestra en la Figura 7.18*f*. Dependiendo de la constante de tiempo, la corriente puede ser continua o no; es decir, si t_a es superior a T, la corriente de carga i_0 no se anula nunca (*conducción continua*), o si t_a es inferior a T, la corriente de carga es discontinua, ya que se anula antes de finalizar el ciclo (*conducción discontinua*). En la práctica es deseable una conducción continua porque da lugar a una corriente de carga con menor rizado.

Es fácil comprobar que con grandes inductancias se produce una corriente i_0 de carga prácticamente constante. En la Figura 7.19 se muestran los primeros ciclos de la tensión de alimentación v_s, de la tensión en la carga v_0 y de la corriente en la carga i_0 que se producirían con altas inductancias. La curva inferior de la corriente de carga i_0 se ha determinado a partir de la curva de la Figura 7.18*f*, teniendo en cuenta que si la conducción es continua, la corriente inicial de cada semiperíodo es la final del semiperíodo anterior. Obsérvese que al cabo de muy pocos ciclos (se han supuesto tres en el caso de la Fig. 7.19) la corriente alcanza el régimen permanente, dando lugar a una forma de onda prácticamente plana debido al filtrado que produce la inductancia, de tal modo que los valores medios de la tensión y de la corriente de carga vendrán reflejados por expresiones análogas a (7.3) y (7.4), es decir:

$$V_{cc} = \frac{V_m}{\pi} \quad ; \quad I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R} = \frac{V_m}{\pi R} \tag{7.23}$$

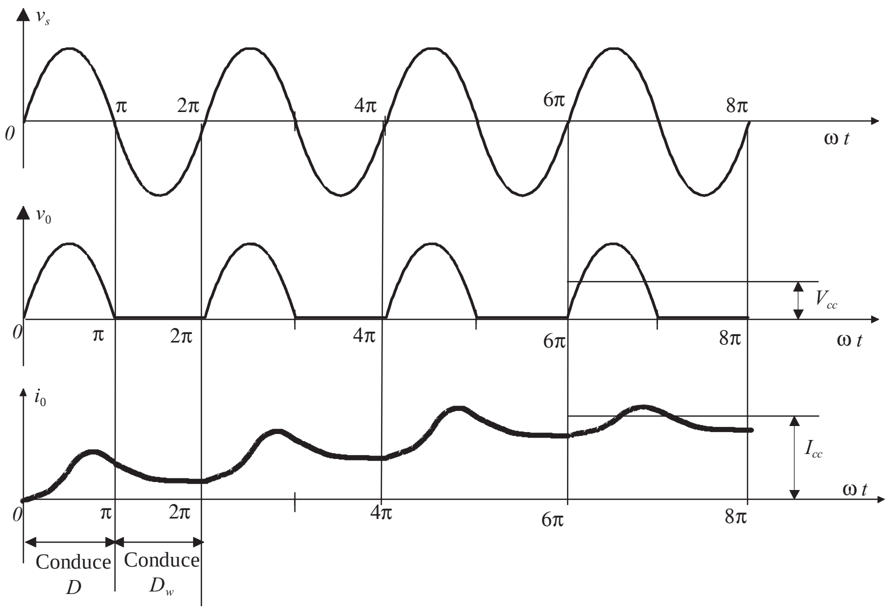


Figura 7.19. Rectificador media onda con carga altamente inductiva.

La explicación matemática de este efecto de filtrado o alisamiento en la onda de corriente es sencilla. Téngase en cuenta que de acuerdo con (7.2) la tensión v_0 de la semionda que aparece en la carga es de la forma:

$$v_0(t) = \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \operatorname{sen} \omega t - \frac{2V_m}{\pi} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos n\omega t \tag{7.24}$$

que consta de una componente continua $V_{cc} = V_m/\pi$, un armónico fundamental y una serie de armónicos pares. La impedancia que ofrece la carga a los armónicos será de la forma siguiente:

$$\mathbf{Z} = R + jnL\omega = \sqrt{R^2 + (nL\omega)^2} \angle \theta_n \quad ; \quad \theta_n = \operatorname{arctg} \frac{nL\omega}{R} \tag{7.25}$$

donde n es el orden del armónico. Para calcular la expresión de la corriente instantánea en la carga en régimen permanente $i_0(t)$ debe tenerse en cuenta que la componente de corriente continua se obtiene a partir de la componente de tensión continua de (7.24) dividiendo por la resistencia R (ya que en c.c. la reactancia es cero), que corresponde al valor señalado en (7.23). Las componentes de la corriente alterna se obtienen dividiendo los términos de tensión de (7.24) por las respectivas impedancias que se ofrecen a los diversos armónicos expresadas en (7.25) y teniendo en cuenta el desfase que ellas producen en la onda de tensión, lo que da lugar a la expresión final siguiente:

$$i_0(t) = \frac{V_m}{\pi R} + \frac{V_m}{2\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \operatorname{sen} (\omega t - \theta_1) - \\ - \frac{2V_m}{\pi\sqrt{R^2 + (nL\omega)^2}} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos (n\omega t - \theta_n) \tag{7.26}$$

Es inmediato comprobar, a partir de la ecuación anterior, que la inductancia de carga ofrece una impedancia elevada a los armónicos altos. En la práctica se pueden considerar despreciables los armónicos de corriente superiores al fundamental, lo que equivale a decir que en el caso de la expresión (7.26) la corriente de carga se compone de una componente de c.c. y un primer armónico de primer orden o fundamental, y ésta es la justificación de la curva de corriente mostrada en la Figura 7.19, que tiene un pequeño rizado de c.a.

Cuando se trata de rectificadores doble onda y trifásicos como los que se verán más tarde en este capítulo, la tensión de salida tiene un rizado muy pequeño, por lo que si la carga es muy inductiva, la corriente correspondiente tiene una forma prácticamente plana, sin apenas rizado, y así se considerará en el análisis correspondiente.

Ejemplo de aplicación 7.2

En el circuito rectificador media onda de la Figura 7.17 la tensión eficaz de alimentación es de 100 V, 50 Hz, la resistencia vale 20 ohmios y la inductancia 0,637 Henrios. Calcular: a) expresión de la corriente instantánea de carga; b) tiempo t_a de apagado del diodo, es decir, tiempo correspondiente a la anulación de la corriente de la carga; c) determinar la tensión y corriente media de c.c. en la carga; d) se coloca un diodo volante en paralelo con la carga anterior de acuerdo con el circuito de la Figura 7.18; calcular la expresión instantánea de la corriente de carga en régimen permanente; e) determinar en la situación del apartado anterior la corriente media de c.c. en la carga.

Solución

a) De acuerdo con la expresión (7.19*b*), la corriente de carga viene expresada por:

$$i(t) = \frac{V_m}{Z}\left\{\text{sen}\,(\omega t - \theta) + \text{sen}\,\theta \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right\}$$

y teniendo en cuenta los valores del problema resulta:

$$L\omega = 0{,}637 \cdot 2\pi \cdot 50 = 200 \text{ ohmios} \quad ; \quad Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{20^2 + 200^2} \approx 201 \text{ ohmios}$$

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{L\omega}{R} = \text{arctg}\,\frac{200}{20} = 1{,}47 \text{ radianes} \quad ; \quad \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,1{,}47 = 0{,}995$$

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}637}{20} = 0{,}0318 \text{ segundos}$$

que da lugar a una corriente instantánea:

$$i(t) = \frac{100\sqrt{2}}{201}\left\{\text{sen}\,(\omega t - 1{,}47) + 0{,}995 \cdot e^{-\frac{t}{0{,}0318}}\right\} =$$

$$= 0{,}704\,[\text{sen}\,(\omega t - 1{,}47) + 0{,}995e^{-31{,}45t}] \quad ; \quad \omega = 2\pi \cdot 50 \approx 314 \text{ rad/s}$$

b) Para calcular el tiempo de apagado del diodo debe igualarse a cero la corriente anterior, es decir:

$$i(t) = 0{,}704\,[\text{sen}\,(314t_a - 1{,}47) + 0{,}995e^{-31{,}45t}] = 0$$

La determinación de t_a requiere un proceso de cálculo iterativo. Es interesante comenzar con un valor de prueba suficientemente aproximado, que se obtiene despreciando el término exponencial de la corriente frente al término senoidal, lo que conduce al valor siguiente:

$$i(t) = 0 \;\Rightarrow\; \text{sen}\,(314t_a - 1{,}47) = 0 \;\Rightarrow\; 314t_a - 1{,}47 = \pi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; t_a = \frac{4{,}61}{314} = 0{,}0147 \text{ segundos}$$

El lector puede demostrar que el valor exacto del tiempo de apagado es $t_a = 0{,}0167$ segundos, que corresponde a un argumento $\psi = \omega t_a = 314 \cdot 0{,}0167 = 5{,}244$ radianes.

c) La tensión media viene expresada por la ecuación (7.20), lo que da lugar a un valor:

$$V_{cc} = \frac{V_m}{2\pi}[1 - \cos\psi] = \frac{100\sqrt{2}}{2\pi}(1 - \cos 5{,}244) \approx 11{,}1 \text{ voltios}$$

que corresponde a una corriente media en la carga:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R} = \frac{11{,}1}{20} \approx 0{,}555 \text{ amperios}$$

d) En este caso la corriente de régimen permanente en la carga viene expresada por (7.26):

$$i_0(t) = \frac{V_m}{\pi R} + \frac{V_m}{2\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}\,\text{sen}\,(\omega t - \theta_1) - \frac{2V_m}{\pi\sqrt{R^2 + (nL\omega)^2}}\sum_{n=2,4,6}^{\infty}\frac{1}{n^2 - 1}\cos\,(n\omega t - \theta_n)$$

y al sustituir valores y limitando el desarrollo al armónico de orden 4 resulta:

$$i_0(t) = \frac{100\sqrt{2}}{20\pi} + \frac{100\sqrt{2}}{2\sqrt{20^2+200^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t - \operatorname{actg}\frac{200}{20}\right) - \frac{2\cdot 100\sqrt{2}}{\pi\sqrt{20^2+400^2}} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{2^2-1}\cos\left(2\omega t - \operatorname{arctg}\frac{400}{20}\right) - \frac{2\cdot 100\sqrt{2}}{\pi\sqrt{20^2+800^2}}\frac{1}{4^2-1}\cos\left(4\omega t - \operatorname{arctg}\frac{800}{20}\right)$$

que corresponde numéricamente a:

$$i_0(t) = 2{,}25 + 0{,}35 \operatorname{sen}(314t - 1{,}47) - 0{,}075\cos(628t - 1{,}52) -$$
$$- 0{,}0075\cos(1.256t - 1{,}55)$$

donde los argumentos están expresados en radianes. La expresión anterior es aceptable aproximarla a:

$$i_0(t) = 2{,}25 + 0{,}35 \operatorname{sen}(314t - 1{,}47)$$

que corresponde a un valor de c.c. y a un primer armónico causante del rizado de la señal de salida. Obsérvese que el rizado es pequeño debido a que la inductancia es elevada, por lo que prácticamente la corriente es constante e igual a I_{cc}, lo que justifica la forma de onda explicada en la Figura 7.19.

e) El valor medio de la c.c. en la carga corresponde al primer sumando de la expresión anterior, es decir: I_{cc} = 2,25 amperios.

7.4.3. Rectificador monofásico de doble onda (onda completa) con carga resistiva

Existen dos tipos de circuito que rectifican la onda completa de la red. Uno de ellos emplea un transformador con toma central y el otro es un puente rectificador o puente de Graetz. Veamos el funcionamiento de cada uno de ellos.

a) Rectificador con transformador con toma central

Este tipo de rectificador emplea un transformador cuyo secundario tiene una conexión central que es el punto común de retorno del circuito rectificador. En la Figura 7.20 se muestra el esquema del circuito, que utiliza dos diodos conectados a los extremos del secundario del transformador. Las tensiones secundarias se miden desde el centro *b*, es decir, de *b* a *a* y desde *b* a *c*. Para evitar confusiones, la tensión del devanado secundario destinado a este rectificador se especifica, por ejemplo: 25-0-25 V; esto significa que de *b* a *a* se tienen 25 V eficaces y también desde *b* a *c*; entre *c* y *a* hay 50 V eficaces. Durante el semiciclo positivo de la tensión de red el terminal *a* es más positivo que *b* y a su vez éste es más positivo que *c*, lo que se representa en el esquema con las polaridades indicadas. En este caso el diodo *D*1 queda polarizado directamente y el diodo *D*2 está con polarización inversa; en consecuencia, el diodo *D*1 conduce y el *D*2 queda bloqueado, y de esta manera se produce una corriente en la malla formada por *adeb* y la tensión v_s de la mitad superior del transformador aparece en la carga *R* (en el supuesto de considerar el diodo ideal). La tensión inversa a que está someti-

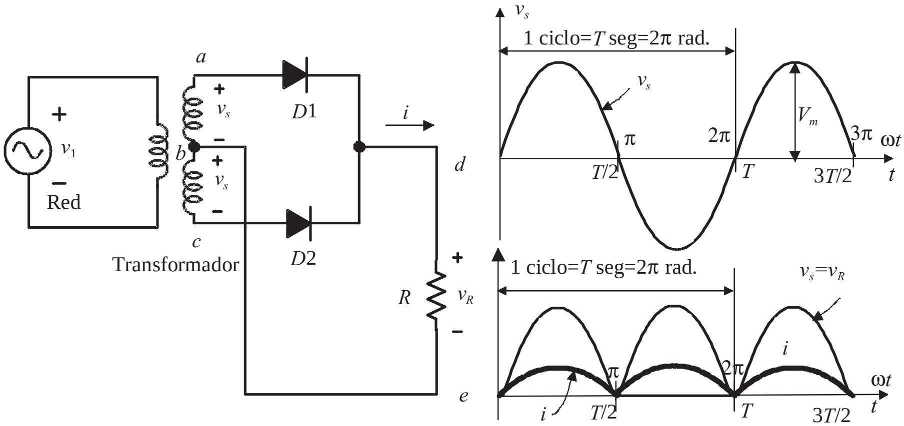


Figura 7.20. Rectificador monofásico doble onda con transformador de toma central.

do el diodo $D2$ es la d.d.p. en sus bornes, entre c y d, es decir, entre c y a al estar conduciendo $D1$ y suponerlo ideal. En consecuencia, si el valor máximo de la tensión de cada semidevanado es V_m, la tensión inversa de pico del diodo $D2$ (VIP) es igual a $2V_m$.

Durante el semiciclo negativo se invierten los papeles representados por $D1$ y $D2$. En este caso c será más positivo que b y este terminal será a su vez más positivo que a; por tanto, el diodo $D2$ conducirá y el $D1$ estará bloqueado. La corriente que va a la carga se cerrará por la malla *cdeb*, lo que indica que el sentido de la corriente en R no ha cambiado. Ambas mitades de la onda de c.a. se han rectificado y dan lugar a una tensión en la carga tal como se indica en la Figura 7.20. El desarrollo de Fourier de esta tensión rectificada doble onda v_R es de la forma:

$$v_R = \frac{2V_m}{\pi} - \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos n\omega t \tag{7.27}$$

que si se compara con la expresión (7.2) de la rectificación media onda, se observa que el término de c.c. es ahora doble que en el caso anterior, es decir:

$$V_{cc} = \frac{2V_m}{\pi} = 0{,}637\ V_m \tag{7.28}$$

Por otra parte, se observa en (7.27) que ahora no existe término fundamental a la frecuencia de la línea, siendo el segundo armónico el contenido en la frecuencia más baja; por consiguiente, la rectificación doble onda tendrá menor rizado (es decir, menos componente alterna) que la media onda. La corriente continua que atravesará la carga será:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R} = \frac{2V_m}{\pi R} \tag{7.29}$$

El valor eficaz de la tensión doble onda será doble que en el caso de la media onda y su magnitud se puede obtener aplicando la definición de valor eficaz, resultando:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\ dt} = \sqrt{\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} V_m^2 \operatorname{sen}^2 \theta\ d\theta} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \tag{7.30}$$

De una forma análoga a (7.9), la tensión de rizado será:

$$V_r = \sqrt{V_{ef}^2 - V_{cc}^2} = \sqrt{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{2V_m}{\pi}\right)^2} = 0{,}308\ V_m \tag{7.31}$$

y por tanto el rizado valdrá:

$$r = \frac{V_r}{V_{cc}} = \frac{0{,}308V_m}{2V_m/\pi} = 0{,}484 \tag{7.32}$$

Como quiera que la corriente eficaz vale:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_m}{\sqrt{2}R} \tag{7.33}$$

la eficacia o rendimiento de la rectificación expresada en (7.13) tiene ahora un valor:

$$\eta_r = \frac{P_{cc}}{P_t} = \frac{V_{cc}I_{cc}}{V_{ef}I} = \frac{(2V_m/\pi)\cdot(2V_m/\pi R)}{(V_m/\sqrt{2})\cdot(V_m/\sqrt{2}R)} = \frac{8}{\pi^2} = 0{,}811 \tag{7.34}$$

El cálculo del factor de utilización del transformador para un rectificador doble onda se realiza teniendo en cuenta que, desde el punto de vista de cada semidevanado secundario, el grupo se comporta como dos rectificadores media onda y por tanto el factor será doble que el de media onda expresado en (7.16), es decir, 0,574; sin embargo, la aplicación directa de (7.16) conduce a un valor de 0,811, que expresa el factor de utilización del transformador en bloque. En el diseño eléctrico del transformador, el factor 0,574 se considera que sólo afecta al secundario, mientras que el 0,811 se refiere al primario, lo que conduce a un valor medio de 0,693. Esto indica que un transformador de 1 kVA puede entregar 693 W de corriente continua a una carga resistiva.

De todas las expresiones anteriores se deduce que la rectificación doble onda reduce el rizado de la tensión de salida y mejora la utilización del transformador. Además, como cada devanado secundario funciona solamente medio ciclo, circulando intensidades continuas de sentido opuesto, el flujo neto producido por I_{cc} en el secundario se cancela, por lo que no hay problemas de saturaciones en el núcleo del transformador.

b) Rectificador en puente de Graetz

Es otra variante del rectificador doble onda. En este caso el circuito (Fig. 7.21) necesita cuatro diodos pero el transformador no necesita toma central, y además la tensión secundaria total es V(eficaz) o V_m su valor máximo, por lo que la tensión inversa de pico de cada diodo es sólo V_m en vez de $2V_m$ que se obtenía en el caso anterior. Durante el semiciclo positivo de la tensión alterna del secundario del transformador sólo conducen los diodos $D1$ y $D3$, que son los que están polarizados directamente (véase Fig. 7.21), y la corriente circula a través de la carga R de c a d. Durante el semiciclo negativo, conducen los diodos $D2$ y $D4$ y el sentido de la corriente en R sigue siendo el mismo. En cada uno de los casos la tensión del transformador se

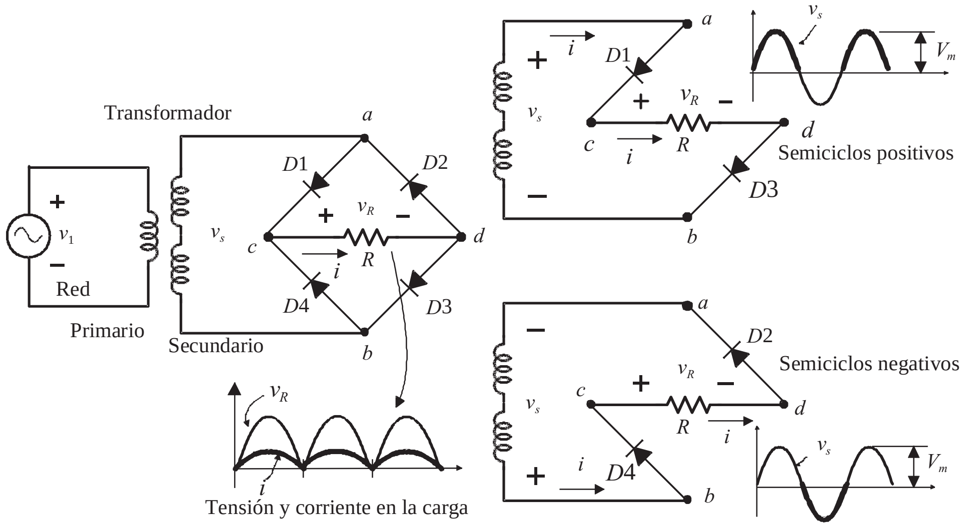


Figura 7.21. Rectificador monofásico doble onda en puente.

refleja en la carga pero invirtiendo el semiciclo negativo. Se obtiene, por tanto, en la carga una señal doble onda cuyo valor de continua será igual que (7.28), es decir:

$$V_{cc} = \frac{2V_m}{\pi} = 0{,}637V_m = 0{,}637\sqrt{2}V = 0{,}9\ \text{V} \tag{7.35}$$

siendo V el valor eficaz de la tensión del transformador.

El factor de rizado será 0,484 y el rendimiento de la rectificación valdrá 0,811. Sin embargo, en este circuito la corriente y la tensión del secundario son alternos puros sin ninguna consideración para el flujo de c.c. (no hay efecto de saturación), de tal forma que el factor de utilización es 0,811 (no hace falta considerar dos factores). Si se tiene el ejemplo de un transformador de 1 kVA, quiere decir que se entregan a la carga 811 W, y por ello este tipo de rectificador puente es el mejor circuito desde el punto de vista de la rectificación completa, aunque tiene la desventaja de necesitar cuatro diodos en vez de dos.

En la Tabla 7.1 se resumen las propiedades de los rectificadores monofásicos.

Tabla 7.1. Relaciones fundamentales en los trasformadores monofásicos

Magnitud $V_m = \sqrt{2}V$	*Tipo de rectificador*		
	Media onda	*Doble onda*	*Puente*
Tensión de línea (eficaz)	V	V(cada mitad)	V
N.º de diodos	1	2	4
Tensión inversa de pico	V_m	$2V_m$	V_m
Tensión continua V_{cc}	$0{,}318V_m$	$0{,}637V_m$	$0{,}637V_m$
Rizado (r)	1,211	0,484	0,484
Factor de utilización del trafo	0,287	0,693	0,811
Frecuencia del armónico principal	f	$2f$	$2f$

Ejemplo de aplicación 7.3

Un transformador con tensiones eficaces de 127 V en el devanado primario y 250 V en el devanado secundario alimenta un puente rectificador que tiene conectada una resistencia de carga de 100 Ω. Determinar: a) la tensión y corriente continua en la carga; b) la corriente y potencia en el primario del transformador si se considera éste ideal.

Solución

a) El valor de la tensión máxima en el secundario es: $V_m = \sqrt{2} \cdot 250 = 353{,}55$ voltios, y la tensión V_{cc}, de acuerdo con (7.35), será:

$$V_{cc} = 0{,}637\ V_m = 0{,}637 \cdot 353{,}55 = 225{,}21 \text{ voltios}$$

por lo que la corriente continua en la carga será:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R} = \frac{225{,}21}{100} = 2{,}25 \text{ A}$$

y esta carga desarrolla una potencia de valor $P_{cc} = V_{cc} I_{cc} = 225{,}21 \cdot 2{,}25 = 507$ W.

b) La intensidad eficaz en el secundario del transformador es:

$$I = \frac{V_{ef}}{R} = \frac{250}{100} = 2{,}5 \text{ A} = I_2$$

y teniendo en cuenta que la relación de transformación es $m = 127/250 = 0{,}508$, la corriente I_1 primaria será:

$$I_1 = \frac{I_2}{m} = \frac{2{,}5}{0{,}508} = 4{,}92 \text{ A}$$

dando una potencia: $S = V_1 I_1 = 127 \cdot 4{,}92 \approx 625$ VA.

7.4.4. Rectificador monofásico de doble onda (onda completa) con carga inductiva

En la Figura 7.22 se muestra un rectificador de doble onda que es idéntico al de la Figura 7.21, pero donde el puente de diodos se ha dibujado con otra topología. En este caso, la carga es de tipo inductivo y se considera que L tiene un valor elevado (teóricamente inifinito); de este modo la corriente de carga tendrá un rizado despreciable y se podrá suponer que su forma es totalmente plana. Con esta suposición, las curvas de comportamiento del circuito son las mostradas en la parte derecha de la Figura 7.22. La tensión en la carga es una doble onda rectificada, al igual que en el caso anterior, pero al ser la carga altamente inductiva, la corriente i_0 es constante e igual a I_{cc}, de tal modo que los dos diodos que conducen en cada semiciclo llevan una corriente constante. La corriente en el secundario del transformador es alterna y de forma rectangular, con una amplitud en cada semiciclo de valor I_{cc}. De acuerdo con las expresiones (7.28) y (7.29), los valores de la tensión media de c.c. y de la corriente media de c.c. vendrán expresadas por:

$$V_{cc} = \frac{2V_m}{\pi} \quad ; \quad i_0(t) = I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R} = \frac{2V_m}{\pi R} \qquad (7.36)$$

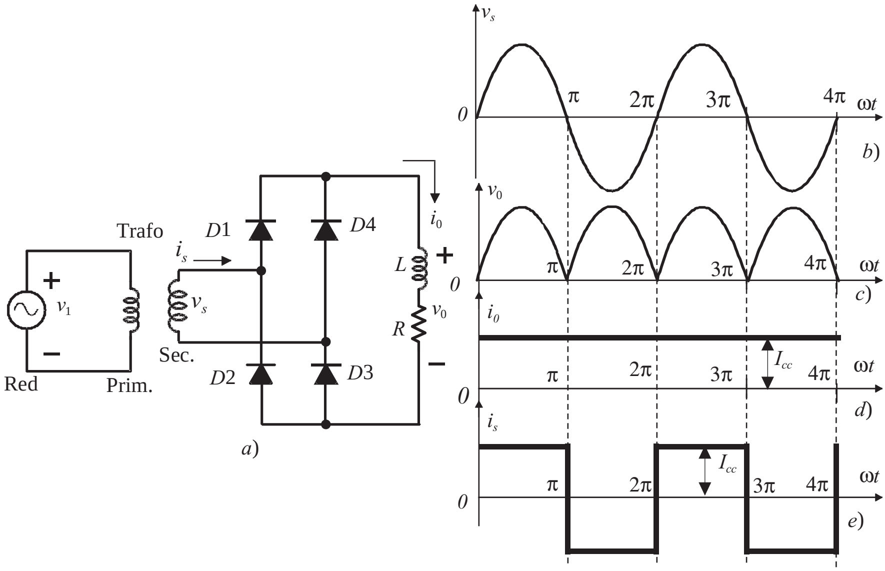


Figura 7.22. Rectificador monofásico en puente con carga inductiva.

Ejemplo de aplicación 7.4

El circuito rectificador de la Figura 7.22 tiene los siguientes parámetros: $v_s = \sqrt{2} \cdot 220 \cdot \text{sen}\ \omega t$; $f = 50$ *Hz,* $R = 100\ \Omega$; $L = 1$ *H. a) Calcular la expresión instantánea de la corriente de carga* $i_0(t)$*; b) Desarrollar en serie de Fourier la corriente* $i_s(t)$ *en el lado de corriente alterna; c) Calcular el valor eficaz de la corriente del armónico fundamental* I_{1s} *y también el valor eficaz de la corriente* I_s.

Solución

a) De acuerdo con (7.27), la onda rectificada tiene el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$v_0(t) = \frac{2V_m}{\pi} - \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos n\omega t$$

La impedancia compleja de la carga para el armónico de orden n es de la forma:

$$\mathbf{Z}_n = R + j(nL\omega) = Z_n \angle \varphi_n$$

Por consiguiente, la corriente $i_0(t)$ de la carga, teniendo en cuenta la expresión de la tensión $v_0(t)$, será:

$$i_0(t) = \frac{2V_m}{\pi R} - \frac{4V_m}{\pi Z_n} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos (n\omega t - \varphi_n)$$

donde se ha tenido en cuenta que la componente de c.c. de la corriente es el cociente de la componente de c.c. de la tensión dividido por la resistencia y las componentes de c.a. de la corriente son el cociente de las componentes de c.a. de la tensión divididas por las impedancias correspondientes.

Como quiera que los valores de las impedancias complejas de los tres primeros armónicos son:

$$\mathbf{Z}_2 = R + j(2L\omega) = 100 + j628 = 635{,}9 \angle 80{,}95°$$
$$\mathbf{Z}_4 = R + j(4L\omega) = 100 + j1.256 = 1.260 \angle 85{,}45°$$
$$\mathbf{Z}_6 = R + j(6L\omega) = 100 + j1.884 = 1.886{,}7 \angle 86{,}96°$$

donde se ha tenido en cuenta que $\omega = 2\pi f \approx 314$ rad/s. La expresión de la corriente de carga, teniendo en cuenta que $V_m = \sqrt{2} \cdot 220 = 311{,}1$ voltios, será:

$$i_0(t) = \frac{2 \cdot 311{,}1}{\pi \cdot 100} - \frac{4 \cdot 311{,}1}{\pi}\left[\frac{1}{635{,}9} \cdot \frac{1}{2^2 - 1}\cos(2\omega t - 80{,}95°) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1.260} \cdot \frac{1}{4^2 - 1}\cos(4\omega t - 85{,}45°) + \cdots\right]$$

es decir:

$$i_0(t) = 1{,}98 - 0{,}208 \cos(2\omega t - 80{,}95°) - 0{,}021 \cos(4\omega t - 85{,}45°) -$$
$$- 0{,}006 \cos(6\omega t - 86{,}96°) + \cdots$$

expresión que es aceptable aproximar a:

$$i_0(t) \approx 1{,}98 = I_{cc}$$

que confirma la forma de onda de la Figura 7.22*d*.

b) Si se parte de la onda rectangular de la Figura 7.22*e*, en la que $I_{cc} = 1{,}98$ A, el desarrollo en serie de Fourier es de la forma:

$$i_s(t) = \frac{4I_{cc}}{\pi}\left(\text{sen }\omega t + \frac{1}{3}\text{sen }3\omega t + \frac{1}{5}\text{sen }5\omega t + \frac{1}{7}\text{sen }7\omega t + \cdots\right)$$

c) El armónico fundamental de la señal anterior tiene una valor máximo $4I_{cc}/\pi$, que corresponde a un valor eficaz:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4I_{cc}}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4 \cdot 1{,}98}{\pi} = 1{,}78 \text{ amperios}$$

y el valor eficaz de la corriente rectangular de la Figura 7.22*e* se calcula aplicando la definición de valor eficaz de una onda periódica, lo que conduce a:

$$I_s = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_{cc}^2\, d\theta} = I_{cc} = 1{,}98 \text{ amperios}$$

El lector puede comprobar este resultado a partir de los valores eficaces de los armónicos incluidos en la corriente $i_s(t)$, es decir:

$$I_s = \sqrt{I_1^2 + I_3^2 + I_5^2 + I_7^2 + \cdots} = \frac{4I_{cc}}{\pi\sqrt{2}}\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \cdots\right]^{1/2} = \frac{4I_{cc}}{\pi\sqrt{2}}\left[\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right] = I_{cc}$$

7.4.5. Rectificadores trifásicos

La conversión de grandes potencias de alterna a continua lleva consigo un funcionamiento con circuitos de tres fases, ya que estos sistemas son los que se emplean en la generación y distribución de energía eléctrica. Del mismo modo que un rectificador monofásico de doble onda produce dos *impulsos* de corriente por ciclo, un circuito trifásico media onda producirá

tres, un doble onda seis, etc. El factor de rizado se reducirá y al incrementarse el número de fases las frecuencias de rizado de las componentes armónicas se verán aumentadas, lo cual lleva consigo una facilidad en el filtrado de la corriente mayor que en el caso de un rectificador monofásico. En la rectificación de potencia se utilizan circuitos hexafásicos y dodecafásicos que se obtienen por acoplamientos especiales entre transformadores trifásicos; la idea es mejorar *in situ* la forma de onda de la salida para no emplear filtros posteriores, que en el caso de grandes intensidades encarecerían el coste de los equipos.

En este epígrafe se estudiará primeramente la rectificación trifásica de media onda y doble onda (3 impulsos y 6 impulsos por ciclo, respectivamente), para finalizar con un rectificador especial de 12 impulsos. Los transformadores empleados para los dos primeros montajes son conexión Dy, es decir, triángulo-estrella; esto es debido a que en cada momento sólo conduce un diodo rectificador, lo que provoca, por ejemplo, en el caso del circuito semionda un desequilibrio fase-neutro que en una conexión Yy originaría flujos alternos homopolares que saltarían por el aire y el neutro de la estrella se desplazaría y produciría un desequilibrio en las tensiones simples. Algunos proyectistas utilizan también la conexión zig-zag en secundario, que evita también estos problemas. En nuestro caso se elegirá la conexión Dy, que es la disposición más frecuente en la rectificación trifásica. En el caso de 12 impulsos se empleará un transformador con dos secundarios y conexión Dyd.

a) Rectificación trifásica media onda

Considérese el esquema de la Figura 7.23*a*, donde un transformador Dy con la relación adecuada alimenta el grupo rectificador carga. Los diodos rectificadores se colocan en cada fase y la carga se conecta entre el punto común de los diodos (cátodos) y el neutro de la estrella. En este circuito cada diodo conducirá siempre que su ánodo sea más positivo que su cátodo (es decir, esté polarizado directamente). En la Figura 7.23*b* se indica, a la izquierda, las

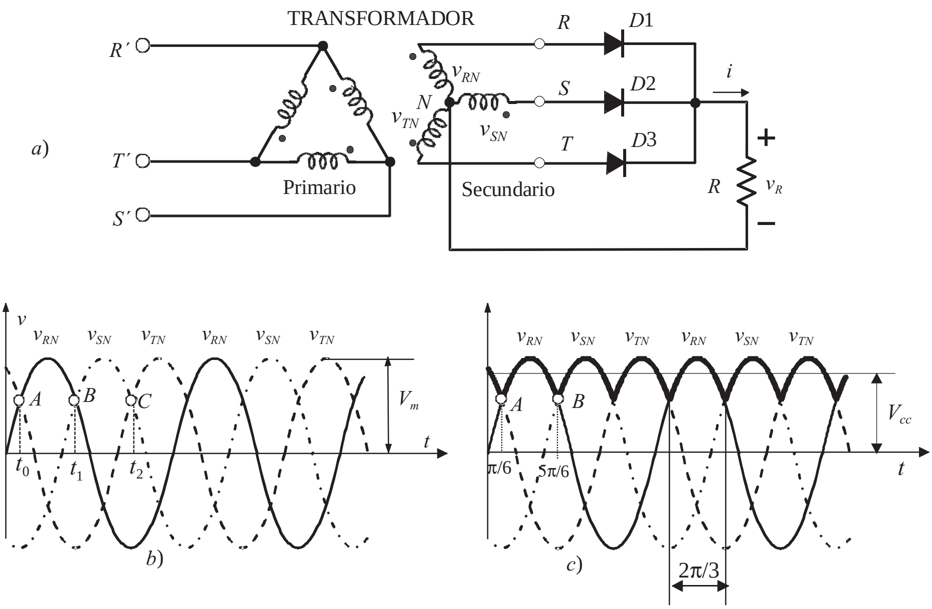


Figura 7.23. Rectificador trifásico media onda.

tensiones simples instantáneas (fase-neutro) del secundario, que son ondas senoidales desfasadas $2\pi/3$ radianes (120°) y de valor máximo V_m. En el instante t_0, correspondiente a la posición representada por el punto A, la tensión mayor es V_{RN}, el diodo correspondiente a esa fase $D1$ quedará polarizado directamente y conducirá hasta el instante t_1, representado por el punto B, en el que la tensión $V_{SN} = V_{RN}$; inmediatamente después, $V_{SN} > V_{RN}$, y el diodo $D1$ deja de conducir al quedar polarizado inversamente y conduce el $D2$ hasta el punto indicado por C, en donde es sustituido por $D3$, y así sucesivamente.

En la Figura 7.23*c* se indica con trazo grueso la forma de onda de la señal que se obtiene en bornes de la resistencia R. Se observa que cada diodo conduce durante 1/3 de ciclo, es decir, durante un período de $2\pi/3$ radianes. Al igual que se ha hecho en los casos anteriores, se puede obtener el desarrollo en serie de Fourier de esta onda para ver sus componentes, resultando:

$$v_R = \frac{3\sqrt{3}V_m}{2\pi}\left(1 - \sum_{n=3,6,9,\ldots}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{3}\cos n\omega t\right) \tag{7.37}$$

cuya componente de tensión continua es:

$$V_{cc} = \frac{3\sqrt{3}V_m}{2\pi} = 0{,}827V_m \tag{7.38}$$

Se observa también en (7.37) que el primer armónico que aparece es de orden 3, y le siguen los múltiplos de tres pero con amplitudes mucho menores.

El valor eficaz de la *tensión total de salida en la carga* se obtiene aplicando su definición, y resulta:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi/3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} V_m^2\ \text{sen}^2\,\theta\,d\theta} = 0{,}841V_m \tag{7.39}$$

donde debido a la simetría sólo se ha integrado la porción de ciclo correspondiente al tramo AB (conducción del diodo $D1$). La tensión de rizado, de forma análoga a (7.9), resulta ser:

$$V_r = \sqrt{V_{ef}^2 - V_{cc}^2} = V_m\sqrt{0{,}841^2 - 0{,}827^2} = 0{,}151V_m \tag{7.40}$$

En consecuencia, el rizado valdrá:

$$r = \frac{V_r}{V_{cc}} = \frac{0{,}151V_m}{0{,}827V_m} = 0{,}183 \tag{7.41}$$

Comparando este valor con el que se obtuvo en (7.32) para el rectificador monofásico tipo doble onda, que era de 0,484, se observa una gran reducción en el rizado y en consecuencia la tensión de salida es de mejor calidad. Respecto al cálculo de las tensiones inversas de pico (PIV) que deben soportar los diodos, se observa en la Figura 7.23 que cuando un diodo no conduce queda aplicada en sus bornes la tensión compuesta del secundario del transformador, lo que supone un valor máximo de $\sqrt{3}V_m$, siendo V_m el *valor de pico de la tensión de una fase*.

b) Rectificador trifásico doble onda (puente)

Este puente rectificador trifásico es muy clásico en aplicaciones en alta potencia y responde al esquema de circuito mostrado en la Figura 7.24*a*. Utiliza seis diodos que conducen dos a dos. Estos diodos se han numerado en la Figura 7.24*a* de acuerdo con la secuencia de conducción

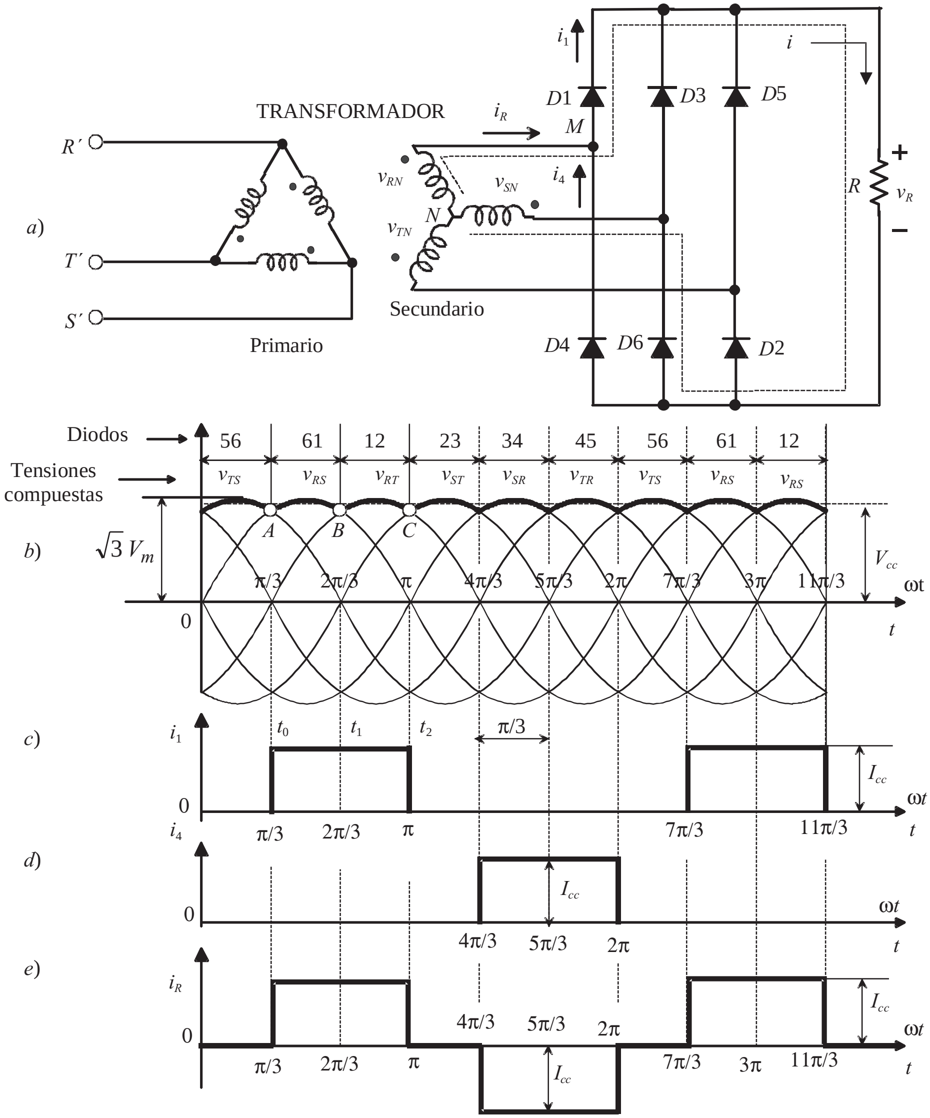


Figura 7.24. Rectificador trifásico doble onda.

de los mismos y cada uno de ellos funciona durante 120°. La secuencia de conducción es 12, 23, 34, 45, 56 y 61. Los dos diodos que conducen en cada momento son los que tienen aplicada la tensión instantánea compuesta o de línea (fase a fase) más elevada.

La tensión de línea es $\sqrt{3}$ veces la tensión de fase del secundario del transformador conectado en estrella. En la Figura 7.24*b* se han dibujado las tensiones instantáneas de línea básicas v_{RS}, v_{ST}, v_{TR} y sus opuestas v_{SR}, v_{TS} y v_{RT} (obsérvese que sus valores de pico son $\sqrt{3}V_m$, siendo V_m la tensión máxima de una fase del secundario del transformador).

Supóngase una situación inicial en la que están conduciendo los diodos $D5$ y $D6$; al llegar al instante t_0, correspondiente al punto A, la tensión compuesta mayor del puente es la v_{RS}, por

lo que $D1$ comienza a conducir por tener polarización positiva, el diodo $D6$ sigue conduciendo y $D5$ deja de conducir por quedar polarizado inversamente. Es decir, a partir de t_0 conducen $D6$ y $D1$ y la corriente sigue el camino señalado por la línea de trazo discontinuo mostrada en la Figura 7.24*a*, por lo que la tensión en bornes de la resistencia de carga es la d.d.p. en bornes de los diodos $D6$ y $D1$, es decir, v_{RS}. Esta situación continúa durante 60°, hasta el instante t_1 (punto B), en el que se hace mayor la tensión v_{RT}, por lo que el diodo $D6$ queda sometido a polarización inversa y pasa a conducir el diodo $D2$; es decir, a partir de t_1 conducen los diodos $D1$ y $D2$ y lo hacen hasta el instante t_2 (punto C), en el que conducen $D2$ y $D3$, y así sucesivamente; de este modo el diodo $D2$ ha conducido desde el punto A hasta el punto C (es decir, durante 120°).

En resumen, la tensión v_R en la carga resistiva está formada por tramos de 60° de las respectivas tensiones de línea que son más elevadas en cada momento. De este modo, en un ciclo completo de 360° existen 6 tramos de onda, y es por lo que este rectificador recibe el nombre de 6 impulsos (debe destacarse, sin embargo, que cada diodo conduce durante 120°). Los tiempos correspondientes a los puntos A, B, C, etc., se denominan instantes de conmutación. En la Figura 7.24*b* se muestra en trazo grueso la onda de tensión en la carga resistiva, y cuyo desarrollo en serie de Fourier nos da:

$$v_R = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi}\left(1 - \sum_{n=6,12,18,\ldots}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{6}\cos n\omega t\right) \tag{7.42}$$

que indica que el valor de componente continua de la tensión de salida es:

$$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} = 1{,}654V_m \tag{7.43}$$

el primer armónico que aparece es de orden 6 y le siguen sus múltiplos pero con una amplitud muy reducida. El valor eficaz de la *tensión total de salida en la carga* se obtiene aplicando su definición, y resulta:

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi/3}\int_{+\pi/3}^{2\pi/3} (\sqrt{3}V_m \ \text{sen}\ \theta)^2\, d\theta} = 1{,}6554V_m \tag{7.44}$$

donde debido a la simetría sólo se ha integrado la porción de ciclo correspondiente al tramo AB (conducción de los diodos 6 y 1). La tensión de rizado, de forma análoga a (7.9), resulta ser:

$$V_r = \sqrt{V_{ef}^2 - V_{cc}^2} = V_m\sqrt{1{,}6554^2 - 1{,}654^2} = 0{,}068V_m \tag{7.45}$$

en consecuencia, el rizado valdrá:

$$r = \frac{V_r}{V_{cc}} = \frac{0{,}068V_m}{1{,}654V_m} = 0{,}041 \tag{7.46}$$

que es un valor muy reducido, lo que indica que la salida es una señal prácticamente de c.c. Para ver la tensión inversa de pico a que se ven sometidos los diodos, se observa en la Figura 7.24*a* que cuando un diodo no conduce, la tensión existente entre sus terminales corresponde al valor de pico de la tensión compuesta, es decir, $\sqrt{3}V_m$, siendo V_m el valor máximo de la tensión de una fase. En las Figura 7.24*c* y *d* se han dibujado también las ondas de corriente en los diodos $D1$ y $D4$ que coinciden con la forma de onda de la corriente en la carga, es decir, de amplitud I_{cc} y que tienen una duración de 120°. En la Figura 7.24*e* se ha representado también la corriente en la fase R del secundario del transformador y que se

obtiene por la diferencia $i_R(t) = i_1(t) - i_4(t)$, que resulta de aplicar el primer lema de Kirchhoff en el nudo M de la Figura 7.24*a*.

En las instalaciones de tracción eléctrica se requiere una c.c. que tenga muy poco rizado, ya que se traduce en un menor coste de los filtros que alisan la c.c. de salida. Para ello se construyen rectificadores con más de 6 impulsos por ciclo. En el esquema de la Figura 7.25 se muestra un rectificador típico de 12 impulsos; está formado por un transformador con un devanado primario en triángulo y dos secundarios, uno en estrella y el otro en triángulo, es decir, conexión Dyd (y que debe estar diseñado con las mismas tensiones de línea secundarias). De este modo existe una diferencia de fases de 30° en las tensiones de salida. Como quiera que cada grupo rectificador produce una señal similar a la indicada en la Figura 7.24*b*, al sumar las tensiones secundarias obtenidas por cada uno de ellos, según el esquema de la Figura 7.25, resulta una c.c. de 12 impulsos por ciclo, lo que indica que los únicos armónicos que resultarán son el 12, 24, 36, etc., ya que los armónicos de orden 6 se anulan al sumarse las salidas de ambos rectificadores porque están en oposición de fase (téngase en cuenta que un desfase de 30º para la señal de frecuencia fundamental se convierte en $6 \cdot 30° = 180°$ para la de sexto armónico).

Con este tipo de montaje se reducen también los armónicos de las corrientes en el lado primario del transformador, lo que se traduce en una menor penetración de armónicos en la red. El valor de la tensión media de c.c. será el doble que la de un rectificador trifásico en puente, es decir, $V_{cc} = 3{,}31V_m$, siendo V_m la tensión de pico de cada fase secundaria.

Todos los tipos de rectificadores trifásicos estudiados hasta aquí, a saber: media onda o de 3 impulsos, doble onda o de 6 impulsos y dodecafásico o de 12 impulsos, tienen de por sí muy poco rizado, lo que indica que la componente alterna es muy reducida. Las formas de onda de las corrientes de carga, cuando alimentan resistencias, son idénticas a las ondas de tensión

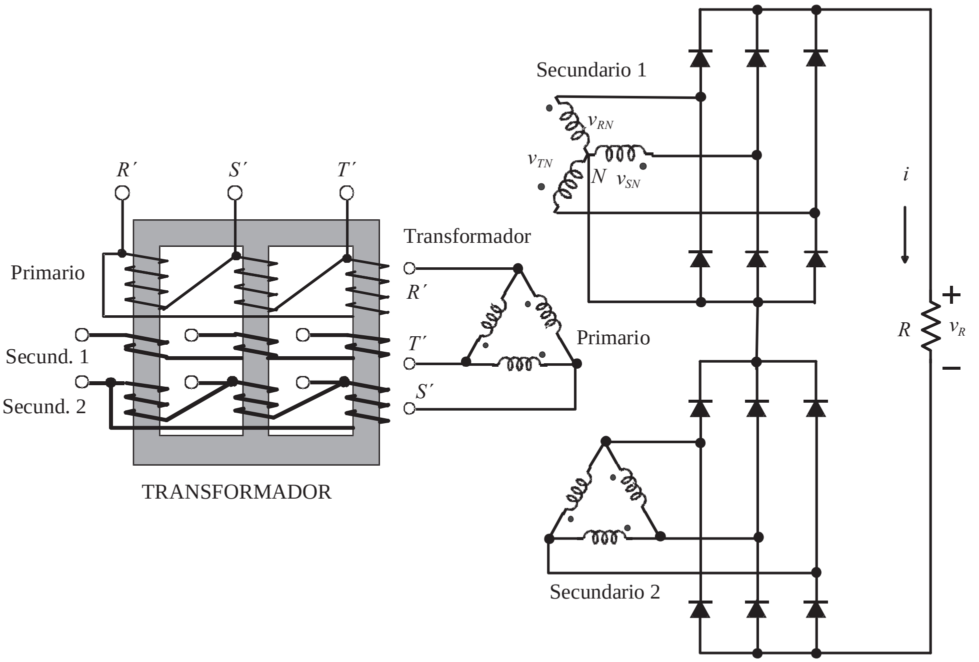


Figura 7.25. Rectificador dodecafásico.

que se han dibujado en las Figuras 7.23, 7.24 y 7.25. Cuando además alimentan cargas muy inductivas, se obtiene un aplanamiento adicional en las ondas de corriente en virtud del filtrado que producen las inductancias (como ya se demostró en los epígrafes 7.4.2 y 7.4.4), por lo que las ondas de corriente, tanto en la carga como en los diodos, son prácticamente planas y coinciden con el valor medio de la corriente continua.

Las corrientes en el secundario (o secundarios) de los transformadores tienen formas escalonadas, que se acercan mucho a la forma senoidal, lo que se traduce en un menor impacto de armónicos en la red, y de ahí que para grandes potencias se impongan los rectificadores trifásicos frente a los monofásicos.

Ejemplo de aplicación 7.5

En la Figura 7.26 se muestra la onda producida por un rectificador de q fases. Es una onda periódica de período 2π/q. Calcular la expresión del desarrollo en serie de Fourier de la onda. Particularizar para un rectificador trifásico media onda (q = 3) y de doble onda (q = 6).

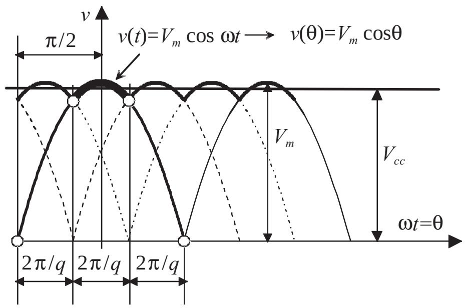


Figura 7.26. Onda producida por un rectificador de *q* fases.

Solución

El desarrollo en serie de Fourier de la onda señalada en la figura viene expresado por:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t$$

donde los valores de los coeficientes [teniendo en cuenta que según la Figura 7.26 la tensión es de la forma $v(t) = V_m \cos \omega t$ y que al hacer el cambio $\omega t = \theta$ se convierte en $v(\theta) = V_m \cos \theta$] se calculan así:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} V_m \cos \omega t \, dt = \frac{1}{\pi/q}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} V_m \cos \theta \, d\theta$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} V_m \cos \omega t \cos n\omega t \, dt = \frac{1}{\pi/q}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} V_m \cos \theta \cos n\theta \, d\theta$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} V_m \cos \omega t \operatorname{sen} n\omega t \, dt = \frac{1}{\pi/q}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} V_m \cos \theta \operatorname{sen} n\theta \, d\theta$$

La tensión $v(\theta)$ viene expresada, de acuerdo con la Figura 7.26, por: $v(\theta) = V_m \cos\theta$. Al sustituir este valor en las integrales anteriores y teniendo en cuenta que sen $\pi/q = -$ sen $(-\pi/q)$, se obtiene para el coeficiente a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi/q}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} V_m \cos\theta \, d\theta = \frac{2qV_m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{q}$$

El valor del coeficiente a_n nos da:

$$a_n = \frac{1}{\pi/q}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} V_m \cos\theta \cos n\theta \, d\theta = \frac{qV_m}{2\pi}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} [\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta]\, d\theta =$$

$$= \frac{qV_m}{2\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}(n-1)\theta}{n-1}\right]_{-\pi/q}^{\pi/q} = \frac{qV_m}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\pi/q}{n+1} + \frac{\operatorname{sen}(n-1)\pi/q}{n-1}\right]$$

donde se ha tenido en cuenta que *sen* $\pi/q = -$sen $(-\pi/q)$. Operando la expresión anterior se obtiene:

$$a_n = \frac{qV_m}{2\pi}\cdot\frac{(n-1)\operatorname{sen}(n+1)\pi/q + (n+1)\operatorname{sen}(n-1)\pi/q}{n^2-1} = \frac{-2qV_m}{\pi(n^2-1)}\cos\frac{n\pi}{q}\operatorname{sen}\frac{\pi}{q}$$

Se ha tenido en cuenta que para $n = 0, q, 2q, 3q$, etc., se cumple sen $\dfrac{n\pi}{q} = 0$.

De un modo análogo, los valores de los coeficientes b_n serán:

$$b_n = \frac{1}{\pi/q}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} V_m \cos\theta \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \frac{qV_m}{2\pi}\int_{-\pi/q}^{\pi/q} [\operatorname{sen}(n+1)\theta + \operatorname{sen}(n-1)\theta]\, d\theta =$$

$$= \frac{qV_m}{2\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_{-\pi/q}^{\pi/q} = 0$$

donde se ha tenido en cuenta que cos π/q = cos $(-\pi/q)$. Por consiguiente, el desarrollo en serie de Fourier de la onda de la Figura 7.26 vendrá expresado por:

$$v(t) = \frac{qV_m}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{q} - \sum_{n=q,2q,3q,\ldots}^{\infty}\frac{2qV_m}{\pi(n^2-1)}\cos\frac{n\pi}{q}\operatorname{sen}\frac{\pi}{q}\cos n\omega t$$

Para el caso del rectificador trifásico media onda ($q = 3$) nos dará:

$$v(t) = \frac{3V_m}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \sum_{n=3,6,9,\ldots}^{\infty}\frac{6V_m}{\pi(n^2-1)}\cos\frac{n\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos n\omega t =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}V_m}{2\pi}\left(1 - \sum_{n=3,6,9,\ldots}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{3}\cos n\omega t\right)$$

expresión que coincide con la señalada en (7.37).

Para el caso del rectificador trifásico doble onda ($q = 6$) el desarrollo en serie de Fourier nos da:

$$v(t) = \frac{6V'_m}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - \sum_{n=6,12,18,\ldots}^{\infty}\frac{12V'_m}{\pi(n^2-1)}\cos\frac{n\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos n\omega t =$$

$$= \frac{3V'_m}{\pi}\left(1 - \sum_{n=6,12,18,\ldots}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}\cos\frac{n\pi}{6}\cos n\omega t\right)$$

expresión que coincide con la (7.31), en la que V'_m representa ahora la tensión compuesta de pico, que es igual a $\sqrt{3}$ veces la tensión de pico de una fase, lo que da lugar a:

$$v(t) = \frac{6\sqrt{3}V_m}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sum_{n=6,12,18,\ldots}^{\infty} \frac{12\sqrt{3}V_m}{\pi(n^2-1)} \cos \frac{n\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos n\omega t =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}V_m}{\pi}\left(1 - \sum_{n=6,12,18,\ldots}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} \cos \frac{n\pi}{6} \cos n\omega t\right)$$

que coincide con la (7.42).

7.5. RECTIFICADORES CONTROLADOS

7.5.1. Introducción

En el epígrafe 7.4 se han estudiado los diversos tipos de circuitos rectificadores monofásicos y trifásicos y con cargas de tipos resistivo e inductivo. Estos circuitos convierten una tensión de c.a. en una tensión de c.c. de valor medio constante. Si los diodos rectificadores de estos circuitos se sustituyen por tiristores, se obtienen tensiones de c.c. cuyo valor medio se puede controlar. Recuérdese, según se analizó en el epígrafe 7.2.3, que un tiristor tiene tres terminales o electrodos: *ánodo, cátodo* y *puerta*; básicamente un tiristor se comporta como un diodo, es decir, bloquea las tensiones inversas (cátodo positivo respecto al ánodo) y puede conducir con tensiones directas, pero solamente a partir del instante en que se aplica una corriente positiva entre el terminal de puerta y el cátodo. Esta ligera diferencia con los diodos tiene una profunda importancia práctica, no solamente por disponer de una **rectificación controlada** para transformar la c.a. en c.c., sino también porque puede convertir la c.c. en c.a., trabajando en este caso como **inversor** (denominado también **ondulador**), y es por ello que reciben el nombre genérico de **convertidores con control de fase**. Sabemos que el tiristor deja de conducir, es decir, se apaga, cuando se anula la corriente principal ánodo-cátodo. Si la red es de c.a. este apagado se hace de forma natural al final de cada ciclo y se denomina por ello *conmutación natural o conmutación por línea*, pero en algunos casos (por ejemplo, si se desea interrumpir la corriente en un instante específico) se debe obligar artificialmente a que la corriente del tiristor valga cero, lo que requiere realizar una *conmutación forzada*, y que se consigue en la práctica cargando un condensador en un circuito auxiliar y descargándolo en el tiristor en el sentido cátodo-ánodo, es decir, contrario al sentido de la corriente principal. En el caso de utilizar tiristores tipo GTO, el apagado se logra aplicando a la puerta una corriente negativa.

Los convertidores con control de fase que se incluyen en este epígrafe pueden ser monofásicos y trifásicos y cada uno de ellos se subdivide en función de la polaridad de la tensión v_0 y la corriente i_0 que suministran a la carga, y así se tienen: convertidores de un cuadrante, de dos cuadrantes y de cuatro cuadrantes, como se muestra en la Figura 7.27. Los *convertidores de un cuadrante o semiconvertidores* funcionan solamente como rectificadores controlados, es decir, la polaridad de la tensión v_0 es fija y el sentido de la corriente i_0 es único y no pueden trabajar como inversores conmutados por línea; trabajan como rectificadores en los cuadrantes I y III, tal como se señala en la Figura 7.27*a*.

Los *convertidores de dos cuadrantes o convertidores completos* tienen una polaridad de la tensión que puede ser positiva o negativa, pero el sentido de la corriente es único; trabajan como rectificadores en el cuadrante I y como inversores conmutados por línea en el cuadrante IV (Fig. 7.27*b*). Los *convertidores de cuatro cuadrantes* son en realidad dos convertidores

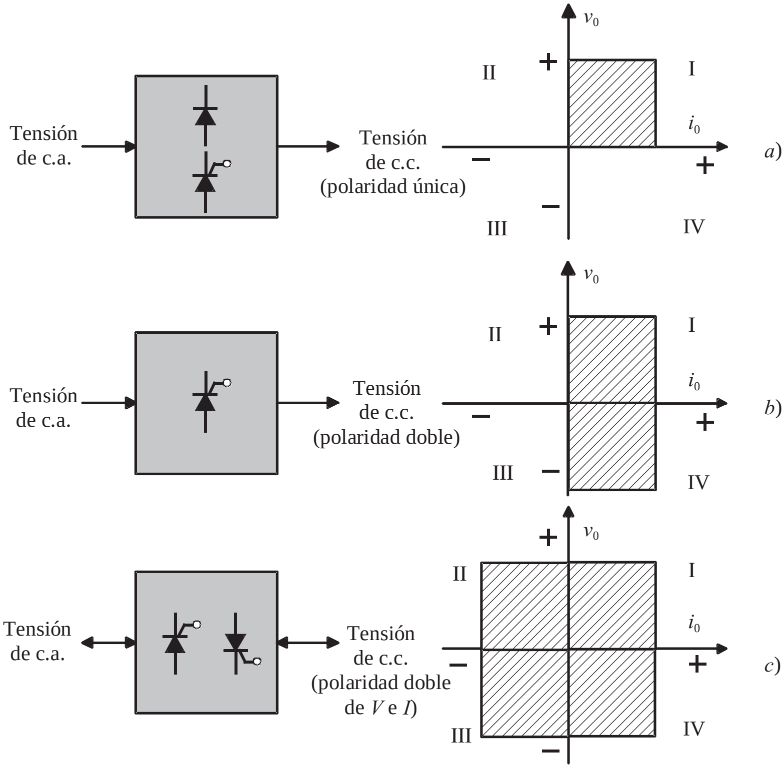


Figura 7.27. Tipos de convertidores controlados

acoplados de tal forma que funcionan como rectificadores en los cuadrantes I y III y como inversores en los cuadrantes II y IV; se denominan convertidores duales o dobles y es la versión en electrónica de potencia de los clásicos grupos rotativos Ward-Leonard. Estos convertidores con control de fase se utilizan sobre todo en la regulación de velocidad de motores de c.c. en industrias metalúrgicas y papeleras (trenes de laminación), en obras civiles (plantas para dosificación automática de áridos), en la industria alimentaria (máquinas mezcladoras y dosificadoras), etc. Suelen incluir técnicas de control en lazo cerrado (*feedback*) para ajustar pares motores, rampas de aceleración y deceleración e incluso posicionado de ejes en máquinas herramientas y otro tipo de mecanismos.

7.5.2. Principio de funcionamiento de un rectificador con control de fase

Para comprender el funcionamiento de un rectificador controlado se va a considerar el caso más simple mostrado en la Figura 7.28, que representa una fuente o red de c.a. con un tiristor que alimenta una carga resistiva. Es un rectificador controlado media onda. Durante los semiciclos positivos de la tensión de alimentación, el tiristor S tiene polarización positiva; si se aplica un impulso de corriente i_G a la puerta en el instante $\omega t = \alpha$, que se mide a partir del momento en que es cero la tensión de la red, el tiristor conduce y la tensión de alimentación se transfiere a la carga resistiva (se considera despreciable la caída de tensión en el tiristor, que es del orden de 1 V). Cuando la tensión aplicada empieza a ser negativa en $\omega t = \pi$, el ánodo

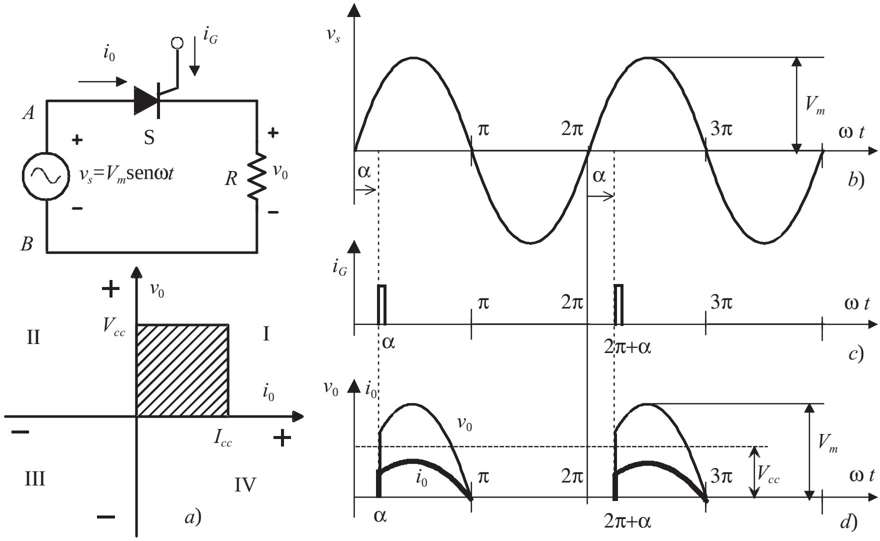


Figura 7.28. Rectificador controlado media onda con carga resistiva.

del tiristor se hace negativo respecto a su cátodo (polarización inversa o negativa) y el tiristor se apaga o deja de conducir. El ángulo α se denomina *ángulo de encendido* o de retardo del tiristor y se va aplicando de una forma síncrona en todos los semiciclos positivos de la tensión de red. Durante el intervalo en el que conduce el tiristor, denominado *intervalo de conducción*, la tensión en la carga coincide con la tensión de la red. En la Figura 7.28 se han dibujado en *b*) la onda senoidal de la red, en *c*) los impulsos de disparo que se aplican de un modo síncrono, y en *d*) las ondas de tensión y corriente en la carga. Si la tensión de la red es de la forma $v_s = V_m$ sen ωt, la tensión media V_{cc} que se obtiene en la carga vale:

$$V_{cc} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi} V_m \text{ sen } \omega t \; d(\omega t) = \frac{V_m}{2\pi}(1 + \cos \alpha) \tag{7.47}$$

y la corriente media en la carga será $I_{cc} = V_{cc}/R$. Si el ángulo de encendido se varía entre 0 y π, la tensión media en la carga variará entre un valor máximo V_m/π y cero (es evidente que cuando $\alpha = 0$, el tiristor actúa como un rectificador), de tal modo que la región de trabajo corresponde al primer cuadrante mostrado en la Figura 7.28*a*.

Si la carga es de tipo inductivo, entonces, al igual que sucedía con el circuito rectificador media onda (epígrafe 7.4.2), se producirá un retraso de la corriente frente a la tensión, y para evitar incursiones negativas en la tensión de carga deberá colocarse un diodo de libre circulación en paralelo con la carga para que disipe la energía magnética almacenada correspondiente. De todos modos, no es necesario profundizar más en este circuito, ya que tiene pocas aplicaciones industriales debido al alto nivel de rizado de la señal de salida.

7.5.3. Convertidor monofásico en puente completo con carga inductiva

Un convertidor monofásico en puente completo está constituido, como se muestra en la Figura 7.29*a*, por cuatro tiristores. Se va a analizar el comportamiento de este circuito si la carga

es altamente inductiva, lo que supone que la corriente de carga tendrá un rizado prácticamente despreciable. Durante los semiciclos positivos, los tiristores *S*1 y *S*2 están polarizados directamente y cuando se encienden simultáneamente para un valor $\omega t = \alpha$, la tensión que aparecerá en la carga v_0 será la tensión de alimentación $v_s = V_m$ sen ωt. Debido a la inductancia de la carga, los tiristores continuarán conduciendo más allá de π radianes, aunque la tensión de la red sea en esos momentos negativa debido a que la corriente de carga no se ha anulado (esto se debe al alto valor de la inductancia *L*). Durante los semiciclos negativos de la tensión de red, los tiristores *S*3 y *S*4 quedan polarizados directamente pero no empezarán a conducir hasta que no se aplique una señal a los electrodos de puerta. Al producirse el encendido en el instante correspondiente a $\pi + \alpha$ radianes, los tiristores *S*3 y *S*4 comenzarán a conducir, provocando el apagado inmediato de los tiristores *S*1 y *S*2 por quedar polarizados inversamente. En este momento la tensión de la carga v_0 es la opuesta a la tensión de red, es decir $-v_s$. El efecto del control de fase con carga inductiva es que la tensión de la carga tiene intervalos durante los cuales su tensión instantánea es negativa (Fig. 7.29*d*), lo que diferencia este circuito con el puente de diodos de la Figura 7.22, en el que la transferencia de conducción de corriente de unos diodos a otros se realizaba en el preciso momento en que la tensión de alimentación pasaba por cero voltios.

El valor medio de la tensión en la carga se obtiene por simple integración de la curva de la Figura 7.29*d*, resultando ser:

$$V_{cc} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} V_m \text{ sen } \omega t \, d(\omega t) = \frac{2V_m}{\pi} \cos \alpha \tag{7.48a}$$

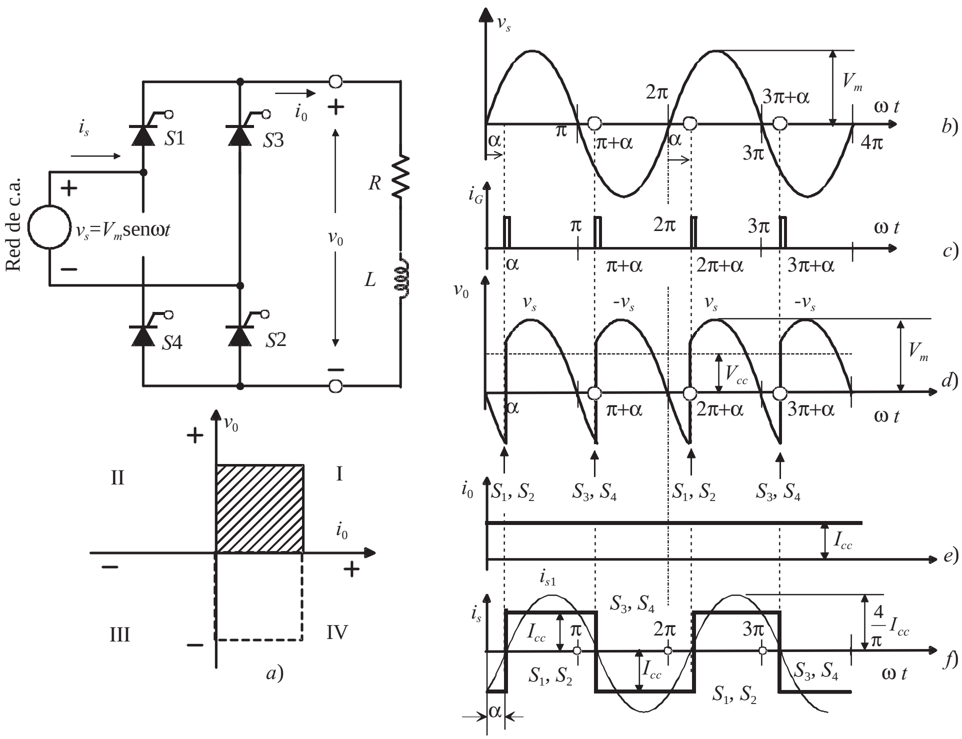


Figura 7.29. Convertidor monofásico en puente completo con carga inductiva y $\alpha < 90°$.

y denominando V_{cc0} a la tensión de c.c. que se obtendría utilizando diodos en vez de tiristores, cuyo valor se demostró en (7.28) y (7.36), la ecuación anterior se puede escribir así:

$$V_{cc} = \frac{2V_m}{\pi} \cos \alpha = V_{cc0} \cos \alpha \tag{7.48b}$$

De la expresión anterior se deduce que se puede regular la tensión media que alimenta una carga (por ejemplo, un motor de c.c.) ajustando solamente el ángulo de encendido α del tiristor. Obsérvese que para ángulos de encendido comprendidos en el intervalo $0 < \alpha < \pi$ la tensión V_{cc} es positiva, y si se tiene en cuenta además el sentido obligado de conducción de corriente en los tiristores, la corriente de carga i_0 tendrá el sentido mostrado en la Figura 7.29*a*. El valor medio de esta corriente de carga vendrá expresado por:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc}}{R} \tag{7.49}$$

En la Figura 7.29*e* se muestra la forma de la corriente de la carga i_0 en régimen permanente, que se supone constante y de amplitud I_{cc} (debido al *alto valor de la inductancia* que ha filtrado todos los armónicos de corrriente). La Figura 7.29*f* representa la forma de onda de la corriente alterna de alimentación i_s, que prácticamente es una onda rectangular de amplitud $\pm I_{cc}$. El valor de la potencia media $V_{cc}I_{cc}$ suministrada por convertidor será siempre positiva, lo que significa que la energía se transfiere en el sentido red-carga; se dice entonces que el convertidor funciona en ***modo rectificador*** y su zona de funcionamiento corresponde al primer cuadrante indicado en la Figura 7.29*a*.

Analizando la onda rectangular de corriente i_s que se produce en la red de alimentación, y representada en la Figura 7.29*f*, se puede demostrar que su desarrollo en serie de Fourier es de la forma:

$$i_s(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4}{n\pi} I_{cc} \operatorname{sen}(n\omega t - \phi_n) \quad ; \quad \phi_n = n\alpha \tag{7.50}$$

donde ϕ_n es el denominado ángulo de desplazamiento del armónico de orden n (el cos ϕ_n se denomina *factor de desplazamiento* y coincide con el concepto de f.d.p. que se utiliza en la teoría clásica de circuitos de c.a. senoidal). En la Figura 7.29*f* se ha dibujado con trazo discontinuo el armónico fundamental de corriente de la red i_{s1}, y cuya amplitud máxima vale:

$$I_{s1\,\text{máx}} = \frac{4}{\pi} I_{cc} \quad \Rightarrow \quad I_{s1} = \frac{I_{s1\,\text{máx}}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} I_{cc} \tag{7.51}$$

Se observa que su ángulo de desplazamiento ϕ_1 de retraso con la tensión coincide con el ángulo α de encendido de los tiristores. Al ser la tensión de alimentación v_s sinusoidal de pulsación ω, la única corriente que contribuye a producir un flujo de potencia media es la debida al primer armónico anterior. Si se denomina $V_s = V_m/\sqrt{2}$ el valor eficaz de la tensión de c.a. de alimentación e I_{s1} el valor eficaz de la corriente del armónico fundamental, la potencia media (en definitiva, potencia activa) que se suministra al convertidor, teniendo en cuenta las expresiones (7.48) y (7.51), será:

$$P = V_s I_{s1} \cos \phi_1 = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{4}{\pi\sqrt{2}} I_{cc}\right) \cos \alpha = \frac{2}{\pi} V_m I_{cc} \cos \alpha = V_{cc} I_{cc} \tag{7.52}$$

es decir, la potencia activa que absorbe la instalación coincide, como era de esperar, con la potencia suministrada (o absorbida) por la carga en el lado de la c.c.

La potencia aparente S en la red de c.a. es el producto del valor eficaz de la tensión de la red V_s por el valor eficaz I_s de la corriente i_s entregada por la misma. El valor eficaz de esta corriente, teniendo en cuenta la forma indicada en la Figura 7.29*f*, vale:

$$I_s = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} I_{cc}^2 \, d(\omega t)} = I_{cc} \tag{7.53}$$

De este modo se puede definir el ***factor de potencia del convertidor*** por el cociente P/S, cuyo valor es:

$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{V_s I_{s1} \cos\phi_1}{V_s I_s} = \frac{I_{s1}}{I_s}\cos\phi_1 =$$

$$= \frac{\dfrac{4}{\pi\sqrt{2}} I_{cc}}{I_{cc}} \cos\phi_1 = 0{,}9 \cos\phi_1 = 0{,}9 \cos\alpha \tag{7.54}$$

lo que significa que el f.d.p. no coincide con el factor de desplazamiento. El cociente I_{s1}/I_s se denomina *factor de distorsión* y es una medida del contenido de armónicos que tiene la corriente alterna de la red. La expresión (7.54) nos indica que el f.d.p. de la instalación es el producto del factor de desplazamiento por el factor de distorsión. De acuerdo con la expresión anterior, el f.d.p. de un circuito con rectificadores controlados puede ser muy pequeño, en particular cuando la tensión de salida es baja, es decir, para ángulos de encendido α grandes.

En la Figura 7.30 se muestra, para mayor claridad, el circuito equivalente de un convertidor trabajando como rectificador controlado. Se observa que el convertidor absorbe potencia activa y reactiva. La potencia activa absorbida de la red coincide, como es lógico, con la potencia consumida por la carga de c.c. (se exceptúan las pérdidas eléctricas en el convertidor). La potencia aparente absorbida por la instalación S es el producto de la tensión eficaz de

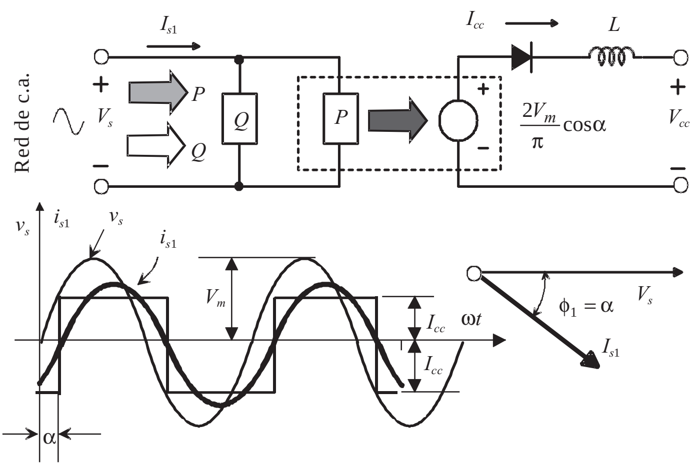


Figura 7.30. Circuito equivalente de un convertidor trabajando como rectificador controlado.

alterna V_s por la corriente eficaz absorbida de la red I_s, y de ahí se puede deducir el valor de la potencia reactiva absorbida por el convertidor a través de la expresión:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \tag{7.55}$$

Desde luego, conviene tener en cuenta que hablar de potencias reactivas en este tipo de circuitos con corrientes no sinusoidales no tiene sentido físico, pero se puede considerar un análisis simplificado si la corriente rectangular absorbida por la red se puede sustituir por el armónico fundamental, y en este caso la expresión anterior se transforma en:

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \approx \sqrt{(V_s I_{s1})^2 - (V_{s1} \cos \phi_1)^2} = V_s I_{s1} \text{ sen } \phi_1 = V_s I_{s1} \text{ sen } \alpha \tag{7.56}$$

En este caso tiene sentido real el diagrama fasorial mostrado en la parte inferior de la Figura 7.30. En definitiva, la aproximación anterior significa hacer coincidir el f.d.p. de la instalación con el factor de desplazamiento del armónico fundamental. Para mayor claridad se han superpuesto en esta figura las ondas de tensión y corriente que se mostraban en las Figuras 7.29*b* y *f*, donde se observa que el desfase entre las ondas v_s e i_{s1} coincide con el ángulo de encendido α.

En la Figura 7.30 se muestra en la parte de la derecha el circuito equivalente de la rama de c.c. El generador de tensión representa la salida de c.c. del convertidor, el diodo en serie sirve para indicar que la corriente fluye solamente en un sentido y la inductancia en serie nos recuerda que la carga tiene una inductancia elevada. El mismo circuito de la Figura 7.29 puede funcionar también en ***modo inversor***. Este tipo de funcionamiento se consigue si el ángulo de encendido de los tiristores se sitúa en el rango $90° < \alpha < 180°$. En este caso la tensión media V_{cc}, de acuerdo con (7.48), será negativa, lo cual no significa que se vaya a producir una corriente en la carga de signo negativo, ya que como sabemos el tiristor solamente puede llevar corriente en el sentido ánodo-cátodo. En esta situación, la corriente en la carga tendería a anularse. Ahora bien, se puede obligar a que circule corriente en la carga de signo positivo pese a ser la tensión V_{cc} negativa, siempre que se añada en el circuito de carga un generador de f.e.m. E de magnitud y polaridad adecuada, tal como se señala en la Figura 7.31*a*. Esta f.e.m. externa debe ser ligeramente superior al valor medio V_{cc} de la tensión que produce el convertidor para que pueda circular corriente por el circuito. De este modo, aplicando el 2.º lema de Kirchhoff a la malla de salida de la Figura 7.31*a* se obtiene una corriente media I_{cc}:

$$E + V_m = RI \quad \Rightarrow \quad I_{cc} = \frac{E + V_{cc}}{R} \text{ amperios} \tag{7.57a}$$

Se debe destacar en la expresión anterior que V_{cc} es el valor que se obtiene en la ecuación (7.48), y al ser α mayor de 90°, su magnitud será negativa. Evidentemente, si $\alpha = 90°$, se tiene $V_{cc} = 0$ y el inversor actúa como un cortocircuito respecto de la malla de salida. Para mantener I_{cc} constante en presencia de un ángulo de encendido α ajustable en el puente, se necesita variar bien sea el valor de R, de E o de ambos a la vez. Si la f.e.m. es constante, entonces un incremento en el ángulo α provocará una reducción de I_{cc} debido al aumento negativo de V_{cc}. La corriente I_{cc} valdrá cero para un valor de α expresado por:

$$I_{cc} = \frac{E - (2V_m/\pi)\cos\alpha}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\pi E}{2V_m} \tag{7.57b}$$

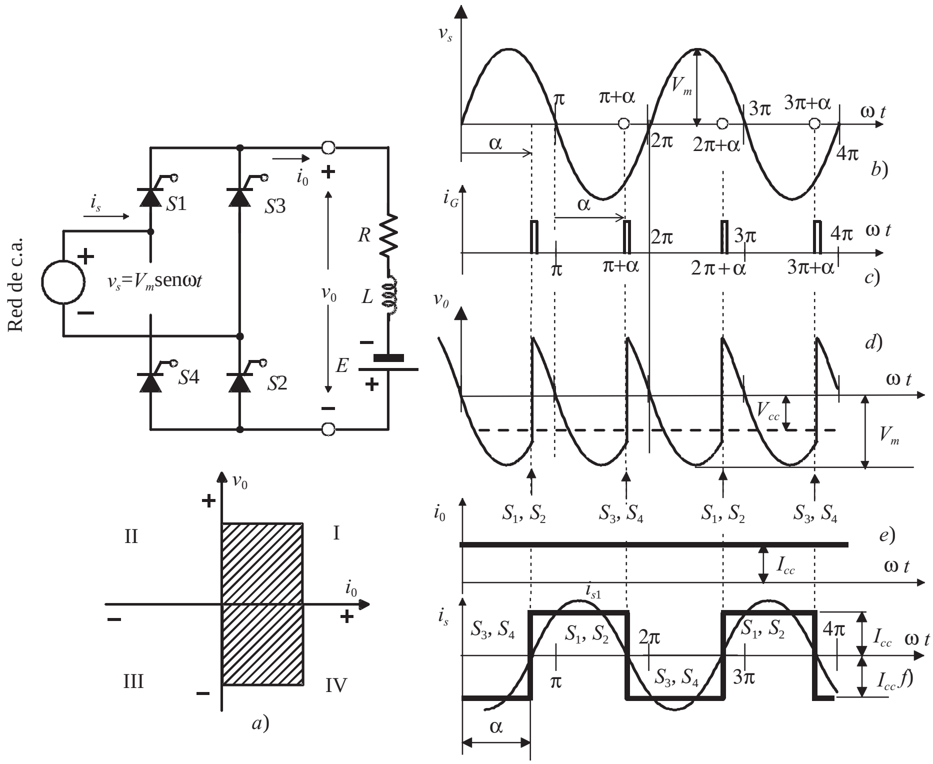


Figura 7.31. Convertidor monofásico en puente completo con carga inductiva y $\alpha > 90°$.

En la Figura 7.31*d* se muestra la onda v_0 que se obtiene en el lado de c.c., cuyo valor medio es V_{cc}; en la Figura 7.31*e* se representa la corriente media I_{cc} en la carga (aplanada por el alto valor de la inductancia), y en la Figura 7.31*f* se muestra la forma de onda de la corriente en la red de c.a. Cuando el convertidor funciona como inversor, el producto $V_{cc}I_{cc}$ será negativo, lo que significa que existirá una transferencia de energía de la carga a la red. Esta forma de trabajar se produce en ***el frenado regenerativo*** o ***por recuperación de energía*** de los motores de c.c. y corresponde al cuadrante IV mostrado en la Figura 7.31*a*. Esta operación requiere en la práctica invertir previamente la excitación del motor para hacer que funcione como generador. En la Figura 7.32 se muestra para mayor claridad el circuito equivalente de un convertidor trabajando como inversor y que es análogo al que se explicó en la Figura 7.30.

Para analizar el balance de potencias en el circuito, se considera que la corriente rectangular de la red de c.a. se puede aproximar por su armónico fundamental I_{s1}, cuyo valor se expresaba en (7.51); de este modo, y como ya se ha indicado antes, se cumplirá $\cos\phi_1 = \cos\alpha$, por lo que la potencia activa de la red se determinará igual que en (7.52), es decir:

$$P = V_s I_{s1} \cos\phi_1 = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{4}{\pi\sqrt{2}}\right)\cos\alpha = \frac{2}{\pi}V_m I_{cc}\cos\alpha = V_{cc}I_{cc} \qquad (7.58)$$

es decir, la potencia generada en el lado de c.c. coincide con la potencia activa entregada por el convertidor a la red. La potencia disipada por efecto Joule en la resistencia R del circuito de

la Figura 7.32 la debe suministrar la batería E, pero no se ha considerado aquí por ser externa al convertidor.

Es evidente, por consiguiente, que la potencia activa P de la red procede de la fuente de c.c. E y así se ha señalado con una flecha de transferencia de potencia en la Figura 7.32; sin embargo, la potencia reactiva del sistema procede de la red de c.a. y es necesaria para el funcionamiento del convertidor. De ahí que este inversor **no pueda funcionar de modo aislado,** se necesita la red de c.a. para transferir la energía del lado de c.c. al lado de c.a. (es una situación similar al funcionamiento de una máquina asíncrona como generador de inducción). Viendo el convertidor desde el lado de la red de c.a., la corriente fundamental I_{s1} absorbida está retrasada un ángulo α de la tensión V_s (véase parte inferior de la Fig. 7.32), pero para analizar el funcionamiento del convertidor como inversor se puede considerar que existe una corriente contraria $I'_{s1} = -I_{s1}$ que se entrega a la red. De ahí que se pueda considerar el convertidor como un equipo que entrega a la red una *potencia reactiva capacitiva* expresada por:

$$Q = V_s I'_{s1} \text{ sen } (\pi - \phi_1) = V_s I'_{s1} \text{ sen } (\pi - \alpha) \qquad (7.59a)$$

ya que la corriente I'_{s1} se adelanta respecto de V_s, o que la red entrega al convertidor una *potencia reactiva inductiva:*

$$Q = V_s I_{s1} \text{ sen } \phi_1 = V_s I_{s1} \text{ sen } \alpha \qquad (7.59b)$$

ya que en este caso la corriente I_{s1} se retrasa respecto de V_s.

El convertidor en puente completo hasta aquí estudiado tiene la posibilidad de funcionar en dos cuadrantes, pero en aquellas situaciones en las que se desea que la corriente de carga circule en ambos sentidos con tensión de carga reversible, se necesita el uso de dos puentes de tiristores conectados en antiparalelo, como se muestra en la Figura 7.33; este convertidor se conoce con el nombre de ***convertidor dual*** o ***doble*** y puede trabajar en los cuatro cuadrantes. Se utilizan en accionamientos de velocidad variable y alta potencia.

Estos convertidores dobles pueden trabajar simultáneamente o no. En el *funcionamiento simultáneo* o *modo de corriente de circulación interna*, ambos convertidores funcionan a la vez, uno como rectificador controlado y el otro como inversor. En el *funcionamiento no*

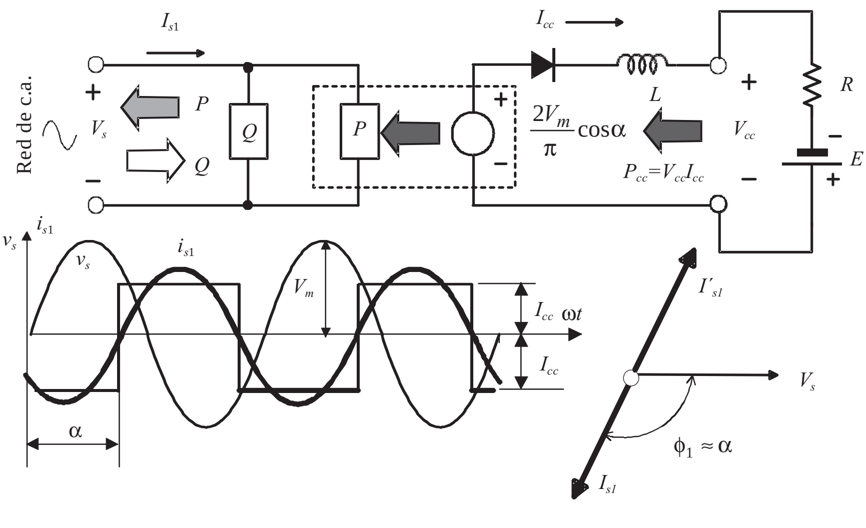


Figura 7.32. Circuito equivalente de un convertidor trabajando como inversor.

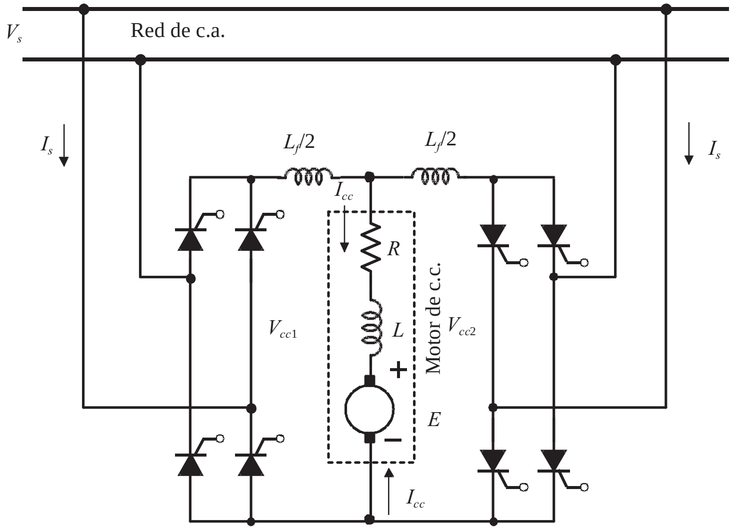


Figura 7.33. Convertidor dual o doble.

simultáneo o *modo de corriente de circulación libre* solamente funciona a un tiempo un convertidor, dejando al otro en situación de bloqueo. Cuando se utiliza el modo de funcionamiento simultáneo, los convertidores disponen de un control de disparo de los tiristores, que obligan a que la suma de sus tensiones medias de c.c. sea igual a cero, para que de esta forma no circule corriente continua en la malla que forman ambos convertidores, es decir:

$$V_{cc1} + V_{cc2} = 0 \tag{7.60}$$

Si se denominan α_1 y α_2 los ángulos de disparo de ambos convertidores, los valores de las tensiones medias de c.c. son:

$$V_{cc1} = \frac{2V_m}{\pi}\cos\alpha_1 \quad ; \quad V_{cc2} = \frac{2V_m}{\pi}\cos\alpha_2 \tag{7.61a}$$

por lo que al sustituir en (7.60) se obtiene:

$$\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1 = \cos(\pi - \alpha_1) \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1 \tag{7.61b}$$

lo que significa que si un convertidor trabaja como rectificador, el otro trabaja como inversor. Esta forma dual de trabajar hace que sea imposible el conseguir que las tensiones instantáneas suministradas por ambos convertidores sean iguales, lo que provova una corriente alterna de circulación en la malla de los mismos y que se limita colocando las inductancias $L_f/2$ mostradas en la Figura 7.33.

Existen también puentes semiconvertidores que están constituidos, como se muestra en la Figura 7.34, por un puente monofásico similar a los explicados en las Figuras 7.29 y 7.31 pero en el que los dos tiristores inferiores se han sustituido por dos diodos rectificadores. Generalmente, en este caso los semiconvertidores incorporan un diodo de recuperación de energía para evitar tensiones negativas en la tensión de salida. Se puede demostrar que la tensión de salida es de la forma:

$$V_{cc} = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi} V_m \operatorname{sen}\omega t \, d(\omega t) = \frac{V_m}{\pi}(1 + \cos\alpha) \tag{7.62}$$

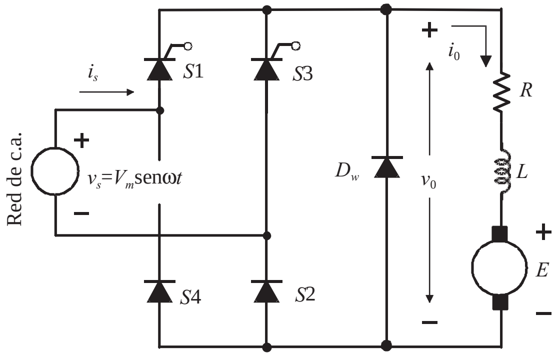


Figura 7.34. Semiconvertidor monofásico.

De acuerdo con la ecuación anterior la tensión de salida V_{cc} es siempre positiva, y de este modo la potencia $V_{cc}I_{cc}$ es positiva, lo que indica que la potencia fluye siempre en el sentido red-carga. Los semiconvertidores no pueden de este modo invertir la potencia y solamente trabajan en el cuadrante I.

Ejemplo de aplicación 7.6

Se utiliza un convertidor monofásico en puente completo similar al de la Figura 7.29 para controlar la velocidad de un motor de c.c. de 150 V, 1.500 r.p.m., con excitación separada. El convertidor se conecta a una red monofásica de 220 V, 50 Hz. El inducido tiene una resistencia de 0,5 ohmios y una inductancia de 5 mH. Se supone que el motor tiene un circuito magnético lineal y que la constante kΦ de la f.c.e.m. del motor es de 0,1 V/r.p.m. (Recuérdese que la f.c.e.m. del motor viene expresada por: $E = k\Phi n$).

1. Funcionamiento del convertidor como rectificador controlado. Máquina de c.c. en régimen motor: *La máquina de c.c. funciona como motor girando a 1.200 r.p.m. y lleva una corriente de inducido de 50 A. Suponiendo que el rizado de la corriente del motor es despreciable debido a la alta inductancia del inducido: a) determinar el ángulo α de encendido que requieren los tiristores; b) potencia eléctrica absorbida por el motor; c) f.d.p. que presenta el grupo convertidor-motor a la red de c.a.*

2. Funcionamiento del convertidor en modo inversor. Frenado por recuperación de energía: *Se cambia la polaridad de la f.c.e.m. del motor invirtiendo la corriente en el devanado de excitación: a) determinar el ángulo de encendido de los tiristores para mantener la corriente de inducido en 50 A con una velocidad de 1.200 r.p.m.; b) calcular la potencia que se devuelve a la red de c.a. para la velocidad de 1.200 r.p.m.*

Solución

1. ***Funcionamiento del convertidor como rectificador controlado. Máquina de c.c. en régimen motor.***

a) La f.c.e.m. del motor a 1.200 r.p.m. vale: $E = 0{,}1 \cdot 1.500 = 150$ V, por lo que la tensión media que debe aplicarse al inducido es:

$$V_{cc} = E + RI_{cc} = 150 + 0{,}5 \cdot 50 = 175 \text{ V}$$

De la ecuación (7.48) resulta:

$$V_{cc} = 175 = \frac{2V_m}{\pi} \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2} \cdot 220}{\pi} \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 27{,}93°$$

b) La potencia eléctrica absorbida por el inducido del motor (se desprecian las pérdidas en el circuito de excitación) es:

$$P = V_{cc} I_{cc} = 175 \cdot 50 = 8.750 \text{ W}$$

c) De acuerdo con la ecuación (7.54), el f.d.p. que ofrece el grupo convertidor-motor es:

$$f.d.p. = 0{,}9 \cos \alpha = 0{,}9 \cos 27{,}93° = 0{,}795$$

2. *Funcionamiento del convertidor en modo inversor. Frenado por recuperación de energía.*

a) En el momento en el que se cambia la polaridad a la excitación, como la velocidad es la misma de 1.500 r.p.m., la f.c.e.m. no cambiará y su valor será el mismo que en el caso anterior, es decir, 150 V. La tensión en bornes del motor que actúa como generador será, de acuerdo con (7.57):

$$E + V_{cc} = RI \quad \Rightarrow \quad V_{cc} = 0{,}5 \cdot 50 - 150 = -125 \text{ voltios}$$

y al sustituir en (7.48) resulta un ángulo de conducción:

$$V_{cc} = -125 = \frac{2V_m}{\pi} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2} \cdot 220}{\pi} \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 129{,}13°$$

b) La potencia que entrega la máquina de c.c. hacia el grupo convertidor-red de c.a. en el momento de frenado por recuperación es:

$$P_1 = E \cdot I_{cc} = 150 \cdot 50 = 7.500 \text{ W}$$

Las pérdidas en la resistencia del inducido son: $P_{cu} = R \cdot I_{cc}^2 = 0.5 \cdot 50^2 = 1.250$ W, por lo que la potencia entregada a la red vale: $P = 7.500 - 1.250 = 6.250$ W, valor que coincide con el producto $V_{cc} I_{cc}$ tal como señala la expresión (7.58): $P = V_{cc} \cdot I_{cc} = 125 \cdot 50 = 6.250$ W.

7.5.4. Convertidor trifásico en puente completo

En accionamientos eléctricos de alta potencia conviene utilizar convertidores trifásicos, ya que producen mayores tensiones de salidas y de menor rizado que los monofásicos y también contribuyen a un equilibrado mayor de la red en comparación con estos últimos. Existen convertidores trifásicos media onda equivalentes a los rectificadores de este nombre cuyo esquema eléctrico se vio en la Figura 7.23, pero en el que ahora se sustituyen los diodos por tiristores. En este epígrafe solamente se van a explicar los convertidores en forma de puente completo y cuyo esquema eléctrico se muestra en la Figura 7.35*a*, y que es equivalente al rectificador en puente de la Figura 7.24 en versión controlada o con tiristores. Se supone, como es habitual, que la carga es fuertemente inductiva.

Los tiristores del puente se encienden a intervalos de 60° (es decir, $\pi/3$) en la sucesión indicada por sus números, tal como se muestra en la Figura 7.35*c*. El origen del ángulo α de encendido se ha fijado en el punto *A*, que corresponde al instante en que se produciría la conmutación natural de haber utilizado diodos rectificadores en vez de tiristores (repasar epígrafe 7.4.5). Las ondas senoidales representan las diversas tensiones compuestas de la red, que a partir del punto *A* son: v_{RS}, v_{RT}, v_{ST}, v_{TR} y v_{TS} (desfasadas entre sí 60°) y cuyos valores máximos son $\sqrt{3}V_m$, siendo V_m la tensión de pico de cada una de las fases del secundario del transformador.

Para comprender el funcionamiento del circuito se ha dibujado en la Figura 7.35*b* la señal de salida (onda de trazo más grueso), donde se ha supuesto un ángulo de encendido de 0°, dando lugar a un comportamiento como el rectificador clásico. Para explicar esta figura se supone que se parte de una situación previa en la que estaban conduciendo los tiristores *S*5 y *S*6.

Al llegar al origen de tiempos en el punto A, la tensión compuesta de mayor valor es la v_{RS}, por lo que si se dispara el tiristor $S1$ aplicando un impulso a su puerta (véase corriente i_{G1} en la Figura 7.35*c*), $S1$ comienza a conducir por estar polarizado en directo, lo que provoca al mismo tiempo el apagado del tiristor $S5$ al quedar polarizado en inverso, por lo que a partir de A son los tiristores $S6$ y $S1$ los que conducen. De esta forma la tensión de la red, que en ese momento es v_{RS}, se aplica a la carga.

Cuando se llega al instante representado por el punto B (60° después que A) se dispara $S2$ (al aplicar un impulso de corriente i_{G2} a su puerta), que comienza a conducir por estar polarizado en directo, pero al mismo tiempo se apaga el tiristor $S6$ por quedar polarizado en inverso, es decir, a partir del punto B los tiristores que conducen son $S1$ y $S2$ y la tensión v_{RT} en ese nuevo tramo que se inicia llega a la carga. Este proceso continúa indefinidamente y la onda de tensión que se obtiene a la salida es idéntica a la que producía el rectificador en puente de la Figura 7.24 con el mismo valor medio que se indicaba en (7.43), y que de acuerdo con la nomenclatura utilizada en (7.48*b*) se denomina V_{cc0}, y cuyo valor es:

$$V_{cc0} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} \tag{7.63}$$

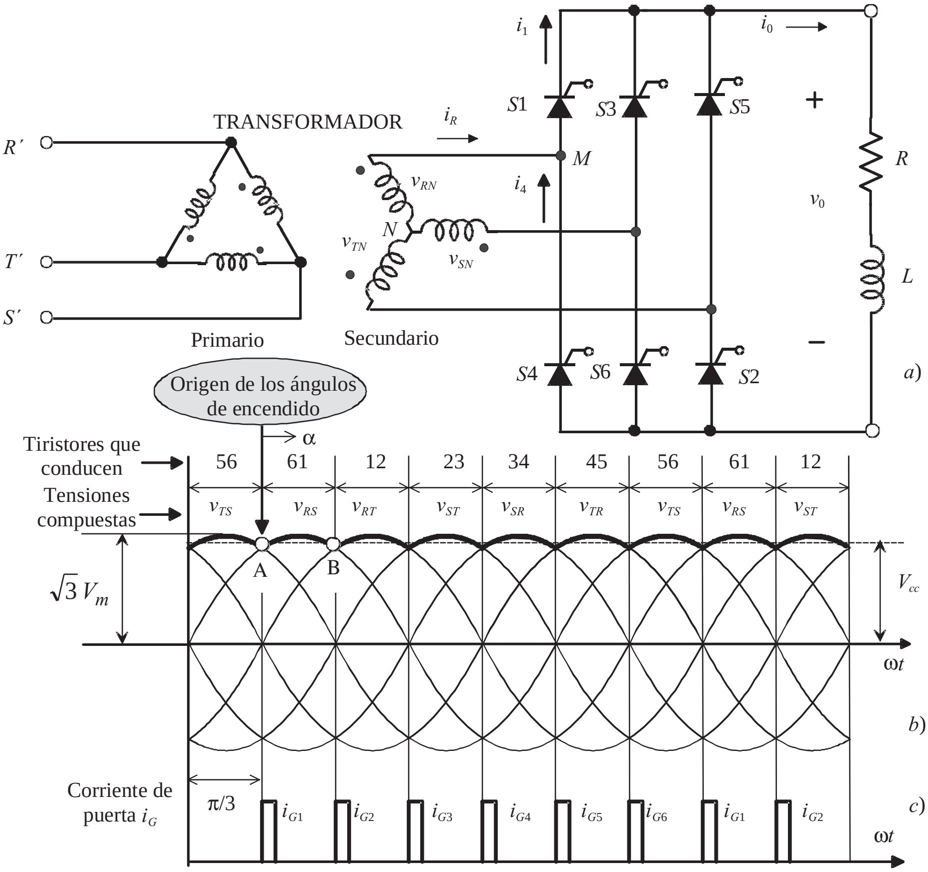


Figura 7.35. Puente rectificador controlado. Disparo en 0°.

donde V_m representa el valor máximo de la tensión simple del secundario del transformador. La corriente continua media en la carga será de amplitud constante, debido al aplanado que produce la inductancia L, y su valor es $I_{cc} = V_{cc}/R$.

Es indudable que para conseguir la forma de onda mostrada en la Figura 7.35*b* se requiere una gran precisión en los impulsos de disparo; por ejemplo, si se dispara el tiristor *S*1 un poco antes de que la onda llegue al punto *A*, el tiristor no puede iniciar su conducción porque su polarización es todavía negativa. En la práctica, para evitar este problema se utilizan impulsos de disparo de mayor anchura y además suele retrasarse el disparo de 10° a 15° respecto al punto *A*.

Vamos a analizar a continuación el comportamiento de este convertidor cuando los impulsos de disparo se retrasan respecto al punto de conmutación natural. En la Figura 7.36*a* se muestran las ondas de tensiones correspondientes. Al igual que antes, se supone una situación inicial en la que estaban conduciendo los tiristores *S*5 y *S*6. Al llegar al punto *A*, en vez de proceder al disparo del tiristor *S*1, retrasamos su disparo un ángulo α próximo a los 45° (Fig. 7.36*a*), es decir, cuando la onda pasa por el punto *B*. Es indudable que *S*5 y *S*6 habrán seguido conduciendo hasta el punto *B*, pero en ese momento, debido al disparo del tiristor *S*1 (y teniendo en cuenta que queda polarizado directamente), se produce su encendido, provocando el apagado inmediato de *S*5 (por quedar éste polarizado inversamente). La tensión existente en la carga, que hasta el punto *B* era v_{TS}, pasa a ser v_{RS}. Este proceso se va repitiendo conforme se van disparando los siguientes tiristores cada 60°, dando lugar a una forma de la

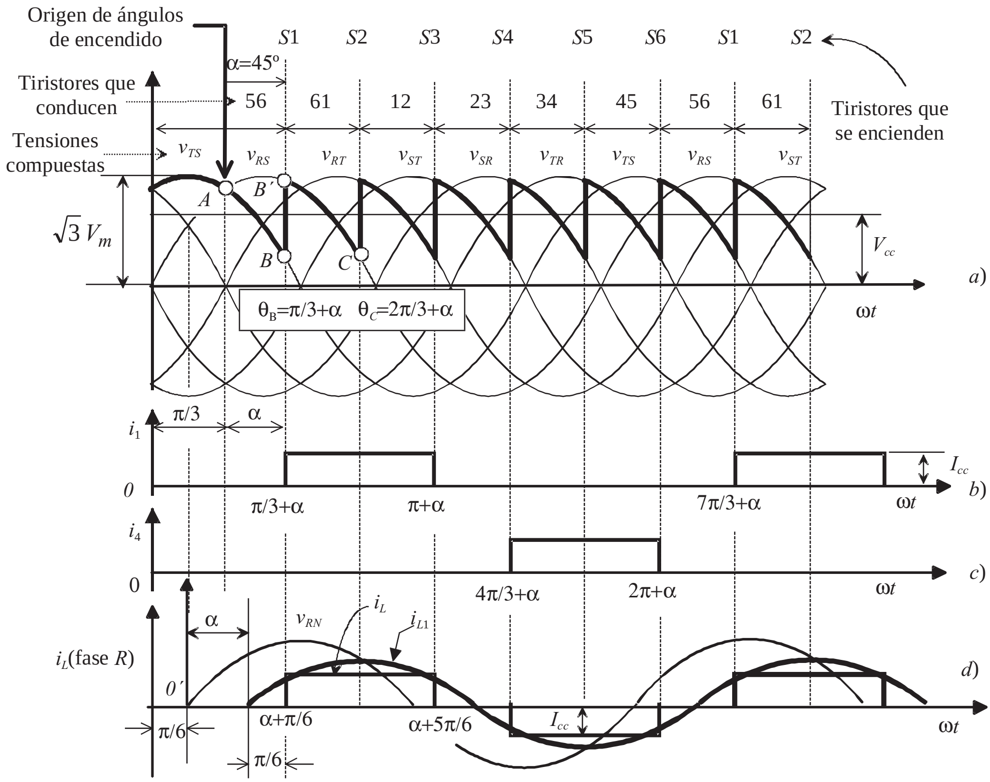


Figura 7.36. Puente rectificador controlado. Señales para un ángulo de disparo de 45°.

onda de salida representada por los tramos de trazo grueso señalados en la Figura 7.36*a*. Obsérvese que el ángulo de encendido α impone el instante de inicio en la conducción del nuevo tiristor (siempre que su polarización sea positiva) pero no influye en el período de conducción de los tiristores, que sigue siendo de 120°. Obsérvese también que los tramos de onda que se obtienen solamente duran 60°.

Para determinar la tensión media V_{cc} que se obtiene en este convertidor para el ángulo de encendido α, se puede calcular el valor medio de un tramo repetitivo de la onda periódica de salida. Si se toma el tramo correspondiente a los puntos B' y C (de duración $\pi/3$), resulta que la tensión en esa zona es $v_{RS} = \sqrt{3}V_m \text{ sen } \omega t$, y como quiera que los ángulos correspondientes a estos puntos (medidos desde el instante en el que la tensión v_{RS} pasa por cero) son, respectivamente: $\theta_B = \dfrac{\pi}{3} + \alpha$; $\theta_C = \dfrac{2\pi}{3} + \alpha$, resulta:

$$V_{cc} = \frac{1}{\pi/3}\int_{\alpha+\frac{\pi}{3}}^{\alpha+\frac{2\pi}{3}} \sqrt{3}V_m \text{ sen } \omega t \, d(\omega t) = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi}\cos\alpha \qquad (7.64a)$$

y teniendo en cuenta que según (7.63) la expresión fraccionaria de (7.64*a*) es la tensión V_{cc0} del rectificador (es decir, el valor de la tensión para $\alpha = 0°$), se puede escribir:

$$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi}\cos\alpha = V_{cc0}\cos\alpha \qquad (7.64b)$$

En la Figura 7.36*b* se ha dibujado la corriente i_1 en el tiristor $S1$, en la Figura 7.36*c*) la corriente i_4 en el tiristor $S4$ y en la Figura 7.36*d*) la corriente i_R en la fase R del secundario del transformador. Téngase en cuenta que las corrientes en cada uno de los tiristores tienen una duración de 120° y su amplitud coincide con la corriente media de la carga I_{cc}. La corriente de línea en la fase R se obtiene por la diferencia $i_R(t) = i_1 - i_4$ (aplicar el primer lema de Kirchhoff en el nudo M del circuito puente de la Fig. 7.35*a*). En las fases S y T se obtienen ondas análogas. El desarrollo en serie de Fourier de la corriente de línea, tomando ahora como referencia de ángulos la tensión simple v_{RN}, tal como se indica en la Figura 7.36*d*, es de la forma:

$$i_R(t) = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4I_{cc}}{n\pi}\text{ sen }\frac{n\pi}{3}\text{ sen }(n\omega t - n\alpha) \qquad (7.65)$$

por lo que el valor eficaz de la componente del primer armónico ($n = 1$) de la corriente de línea vale:

$$I_{L1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{4I_{cc}}{\pi}\text{ sen }\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{\pi}I_{cc} \qquad (7.66)$$

que se retrasa α grados de la tensión de fase del secundario del transformador, en nuestro caso de v_{RN}. En la Figura 7.36*d* se ha representado la tensión simple v_{RN}, que como se sabe para un sistema de secuencia directa está retrasada 30º respecto de la tensión compuesta v_{RS}. La corriente i_R es la onda escalonada resultante de la resta $i_R = i_1 - i_4$. La componente fundamental de la corriente anterior i_{L1} se retrasa un ángulo α respecto de v_{RN}. La potencia activa que suministra el secundario del transformador vale:

$$P = \sqrt{3}V_L I_{L1}\cos\alpha \qquad (7.67)$$

y teniendo en cuenta (7.64) y (7.66), y recordando que V_m era la tensión máxima de una fase, la expresión (7.67) se transforma en:

$$P = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}V_m}{\sqrt{2}}\right) \cdot (I_{L1} \cos \alpha) = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\pi V_{cc}}{3\sqrt{2} \cos \alpha}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{\pi} I_{cc}\right) \cos \alpha = V_{cc} I_{cc} \quad (7.68)$$

es decir, la potencia activa entregada por el transformador coincide con la potencia suministrada a la carga de c.c. (se desprecian las pérdidas en el convertidor). La ecuación anterior representa la ecuación del balance energético del convertidor. El valor eficaz de la corriente de la red incluyendo sus armónicos impares se puede obtener directamente a partir de la curva de la Figura 7.36*d*, resultando ser:

$$I_L = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{\alpha+\frac{\pi}{6}}^{\alpha+\frac{5\pi}{6}} I_{cc}^2 \cdot d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{\pi} I_{cc}^2 \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} I_{cc} \quad (7.69)$$

Por consiguiente, el factor de potencia de la instalación definido por el cociente entre la potencia activa y la aparente, teniendo en cuenta (7.64), (7.69) y la expresión del valor eficaz de la tensión compuesta de la red en función de la tensión máxima simple, será:

$$f.d.p. = \frac{P}{S} = \frac{V_{cc} I_{cc}}{\sqrt{3} V_L I_L} = \frac{\left[\frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} \cos \alpha\right] I_{cc}}{\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}V_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} I_{cc}} = \frac{3}{\pi} \cos \alpha = 0{,}955 \cos \alpha \quad (7.70)$$

Así pues, en un convertidor trifásico el factor de potencia se ve menos reducido por las corrientes armónicas que en el convertidor monofásico (véase ecuación 7.54). Sin embargo, el f.d.p. de la alimentación puede ser mucho menor que la unidad cuando el rectificador trabaja con una tensión de salida pequeña. Dependiendo de la potencia del convertidor y de su colocación, puede ser necesario reducir los armónicos de corriente en la red de alimentación. Esto se consigue utilizando un filtro de entrada, que consiste en colocar una inductancia en serie con condensadores en paralelo entre las diferentes fases del rectificador.

De un modo análogo al convertidor monofásico, el puente trifásico de la Figura 7.35*a* puede funcionar también en ***modo inversor***. Este tipo de funcionamiento se consigue si el ángulo de encendido de los tiristores se sitúa en el rango $90° < \alpha < 180°$. En la Figura 7.37 se muestra la onda de tensión correspondiente para un ángulo de encendido próximo a los 135°. En este caso, y como señala la ecuación (7.64), la tensión media de c.c. es negativa, y si la carga contiene un generador de tensión, habrá una conversión de la c.c. de este generador a la c.a. de la red, lo que se utiliza en la práctica en el frenado por recuperación de energía de los motores de c.c. En la práctica el ángulo de encendido no suele sobrepasar los 150°-165°, para dar tiempo al apagado de los tiristores y evitar de este modo una conmutación para un ángulo superior a los 180°, que provocaría un cortocircuito en la red de alimentación.

En algunas aplicaciones se utilizan también semiconvertidores trifásicos que responden al circuito de la Figura 7.38, que es análogo al de la Figura 7.35*a* pero donde los tres tiristores inferiores del puente se han sustituido aquí por diodos rectificadores y donde se ha añadido un

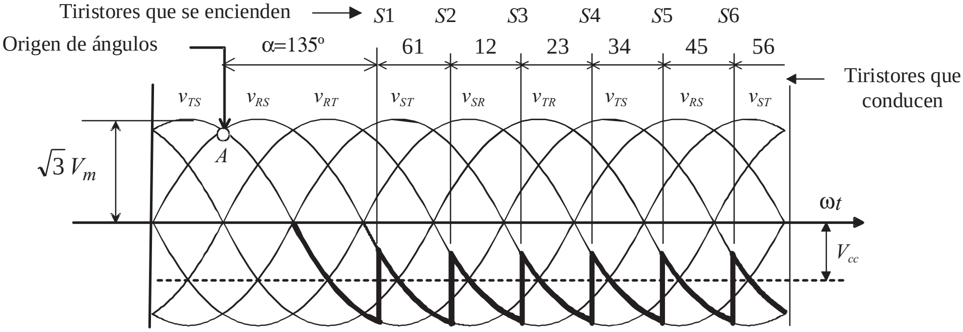


Figura 7.37. Puente rectificador controlado. Onda de tensión para un ángulo de disparo de 135°.

diodo de libre circulación en paralelo con la carga para evitar tensiones negativas en la misma. Se puede demostrar que la tensión media de c.c. que se obtiene en este caso viene expresada por:

$$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{2\pi}(1 + \cos\alpha) \tag{7.71}$$

y el convertidor solamente puede trabajar en el cuadrante I.

En accionamientos eléctricos que requieren la regulación de velocidad en los cuatro cuadrantes se emplean convertidores trifásicos dobles, como se muestra en la Figura 7.39; consisten en dos convertidores trifásicos conectados en oposición o paralelo-inverso.

Al igual que en el caso de los convertidores monofásicos, los ángulos de encendido de ambos convertidores están relacionados por la ecuación (7.61*b*) y pueden funcionar los dos a un tiempo, o modo de funcionamiento simultáneo, o uno cada vez, denominado entonces modo de funcionamiento no simultáneo. En el primer caso, mientras un convertidor funciona como rectificador controlado el otro trabaja como inversor; en el segundo caso, cada uno de los convertidores puede funcionar como rectificador o como inversor, uno de ellos trabaja en los cuadrantes I y IV y regula la velocidad en un sentido y el otro trabaja en los cuadrantes II y III regulando la velocidad en sentido contrario.

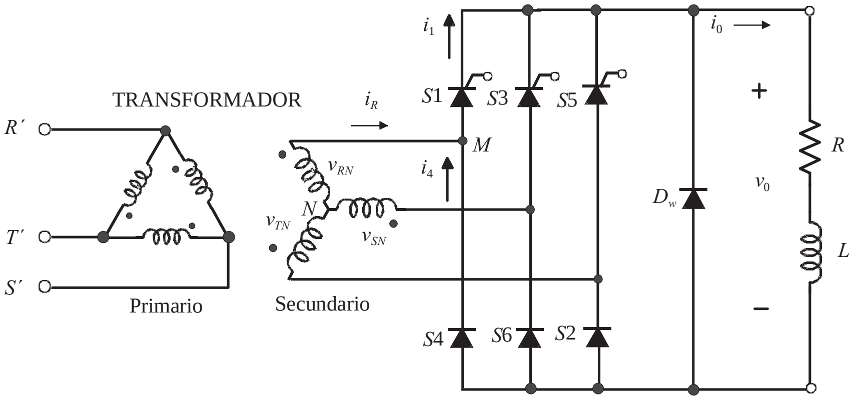


Figura 7.38. Semiconvertidor trifásico o puente rectificador semicontrolado.

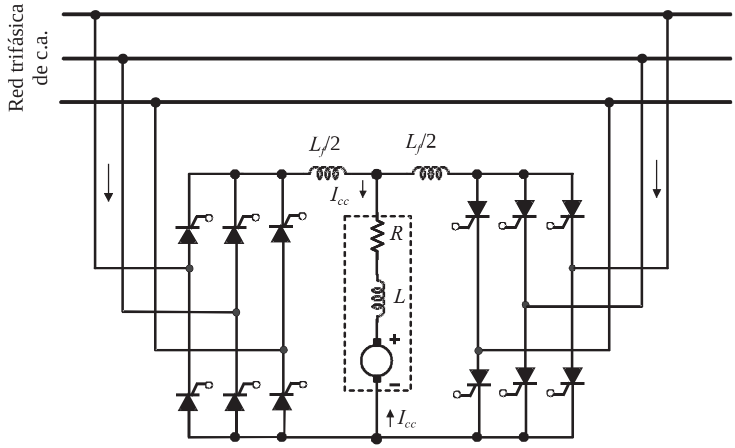


Figura 7.39. Convertidor trifásico doble o dual.

Antes de finalizar este epígrafe dedicado a los convertidores trifásicos controlados en fase es conveniente comentar una aplicación interesante de los mismos en el transporte de energía eléctrica en corriente continua a alta tensión HVDC (*high voltage direct current*). En la Figura 7.40 se representa el esquema simplificado de este sistema de transporte, que consiste en dos redes de c.a. trifásicas dotadas de sendos convertidores trifásicos cuyas salidas se unen por medio de una red de transporte de c.c.

Las aplicaciones modernas de los sistemas HVDC comenzaron en 1954 en Suecia empleando rectificadores controlados de vapor de mercurio; se instaló una línea submarina de c.c. de 100 kV entre la isla de Gotland en el Báltico y una ciudad costera del continente sueco. La distancia fue de 96 km y con una potencia transmitida de 90 MW. A partir de esta fecha se han construido muchas redes de c.c. en alta tensión sobre todo empleando líneas aéreas de gran longitud, como es el caso de Canadá, Estados Unidos, Zaire y Mozambique. Existen también línea submarinas que enlazan Inglaterra y Francia, por el estrecho de Calais. En Japón hay líneas de c.c. uniendo varias islas y hay otros ejemplos en Nueva Zelanda. Como ejemplo de este tipo de instalaciones se puede citar la *Pacific Intertie*, inaugurada en 1970, que es una línea bipolar de ±400 kV que une Celilo en Oregón con Los Ángeles en California. Es una línea aérea de 1.370 km y que transmite una potencia total de 1.440 MW. El circuito equivalente de esta instalación (de un polo respecto de tierra) responde al esquema de la Figura 7.40. Si se desea transmitir potencia desde el centro 1 (Celilo) al centro 2 (Los Ángeles), se producen 400 kV en la primera ciudad con una corriente de 1.800 A; como la resistencia de

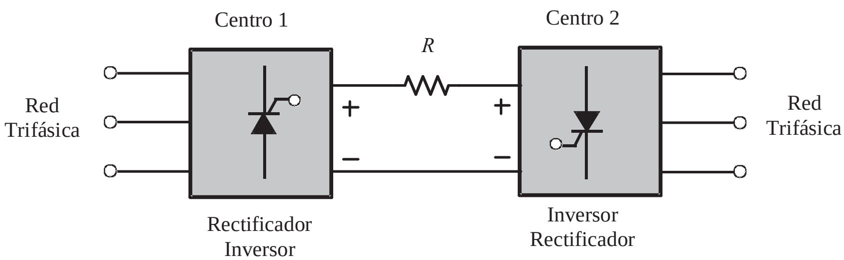


Figura 7.40. Transporte en c.c. en alta tensión.

la línea de c.c. es aproximadamente de 19 ohmios, llegan a Los Ángeles aproximadamente 366 kV. La potencia generada en Celilo es de 720 MW, llegando a Los Ángeles 658,44 MW. Como la línea es de doble circuito, la potencia total transportada es de 1.440 MW. Para transferir energía en sentido contrario, se producen en Los Ángeles −400 kV, llegando a Celilo −366 kV. Cuando un centro trabaja en modo rectificador, el otro trabaja en modo inversor.

Otro ejemplo notable de instalación HVDC es el que existe en la central hidroeléctrica de Itaipú, en la frontera entre Brasil y Paraguay. Es actualmente la central hidroeléctrica más grande del mundo y consiste en 18 alternadores de 700 MVA cada uno, nueve de ellos son de 50 Hz para suministro de energía a Paraguay y los otros nueve de 60 Hz para suministro eléctrico de Brasil. Entre ambas instalaciones de c.a. existe un enlace asíncrono de c.c. para convertir la energía eléctrica trifásica de 50 Hz de Paraguay a c.c. y ésta a trifásica de 60 Hz para Brasil; de esta forma, Paraguay, que no necesita tanta energía eléctrica, puede enviar su excedente de energía a Brasil.

Ejemplo de aplicación 7.7

Se utiliza un convertidor trifásico dual (Fig. 7.39) para controlar la velocidad de un motor de c.c. con excitación independiente. El convertidor se alimenta de una red trifásica de 380 V, 50 Hz. La resistencia del inducido del motor se supone despreciable y su inductancia es de elevado valor para poder considerar plana la corriente que absorbe el motor. El convertidor 1 (el de la izquierda de la Fig. 7.39) trabaja como rectificador y suministra una corriente de 180 A. El convertidor 2 (el de la derecha de la Fig. 7.39) trabaja como inversor y absorbe del otro una corriente de 30 A. La tensión en bornes del motor es de 500 V. Calcular: a) potencias suministradas por ambos convertidores; b) potencia activa absorbida por el conjunto de la red trifásica; c) ángulos de encendido de ambos convertidores; d) potencia reactiva absorbida de la red trifásica. NOTA: Considerar que el f.d.p. coincide con el factor de desplazamiento.

Solución

a) La tensión simple o de fase de la red vale:

$$V_{fase} = V_1 = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219{,}39 \text{ voltios}$$

La potencia *suministrada* por el convertidor 1 es:

$$P_1 = V_{cc} I_{cc1} = 500 \cdot 180 = 90 \text{ kW}$$

La potencia *absorbida* por el convertidor 2 y que éste devuelve a la red es:

$$P_2 = V_{cc} I_{cc2} = 500 \cdot 30 = 15 \text{ kW}$$

b) La potencia activa que absorben los convertidores de la red trifásica será:

$$P = P_1 - P_2 = 90 - 15 = 75 \text{ kW}$$

c) El ángulo de encendido del convertidor 1, de acuerdo con (7.64), será:

$$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} \cos \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad 500 = \frac{3(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 219{,}39)}{\pi} \cos \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 13°$$

El ángulo de encendido del convertidor 2 será:

$$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} \cos \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad -500 = \frac{3(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 219{,}39)}{\pi} \cos \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \approx 167°$$

es decir, $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 180° - 13° = 167°$.

d) La potencia reactiva *absorbida* por el convertidor 1 de la red trifásica es:

$$Q_1 = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = 90 \cdot \operatorname{tg} 13° = 20{,}78 \text{ kVAR}$$

La potencia reactiva *absorbida* por el convertidor 2, teniendo en cuenta que *entrega a la red* una potencia activa de 15 kW, es decir, *absorbe de la red* una potencia activa de −15 kW, es:

$$Q_2 = P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = -15 \cdot \operatorname{tg} 167° = 3{,}46 \text{ kVAR}$$

Es importante que se observe que las potencias activas se restan ($P = P_1 - P_2$), mientras que las potencias reactivas se suman ($Q = Q_1 + Q_2$). La razón es que los convertidores con conmutación natural siempre absorben potencia reactiva, tanto si funcionan como rectificadores o si funcionan como inversores.

Ejemplo de aplicación 7.8

La Figura 7.40 muestra un sistema de transporte en c.c. a alta tensión. Se supone que el centro 1 actúa como rectificador y el centro 2 trabaja como inversor. Las redes trifásicas se supone que tienen una tensión compuesta de 380 kV. El centro 1 produce una tensión de salida de 400 kV con una corriente de 1.800 A, siendo la resistencia de la red de c.c. de 19 ohmios. Calcular: a) ángulos de encendido de los tiristores de los centros 1 y 2; b) potencias activas y reactivas de cada centro convertidor.

Solución

a) El ángulo de encendido del convertidor 1, de acuerdo con (7.64), será:

$$V_{cc1} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} \cos \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad 400 = \frac{3(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 380/\sqrt{3})}{\pi} \cos \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \approx 38{,}8°$$

La d.d.p. en el centro 2 vale:

$$V_{cc2} = V_{cc1} - RI_{cc} = 400 - 19 \cdot 1.800 = 365{,}8 \text{ kV}$$

Este centro funciona como inversor, por lo que se tiene:

$$V_{cc2} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} \cos \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad -365{,}8 = \frac{3(\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 380/\sqrt{3})}{\pi} \cos \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 \approx 135{,}5°$$

b) La potencia transferida desde el centro 1 hacia el centro 2 vale:

$$P_1 = V_{cc1} I_{cc} = 400 \cdot 1.800 = 720 \text{ MW}$$

La potencia que entrega el centro 2 a la red trifásica 2 vale:

$$P_2 = V_{cc2} I_{cc} = 365{,}8 \cdot 1.800 = 658{,}44 \text{ MW}$$

La potencia reactiva absorbida por el centro 1 de la red trifásica 1, teniendo en cuenta que $\alpha_1 = 38{,}8°$, vale:

$$Q_1 = P_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = 720 \cdot \operatorname{tg} 38{,}8° \approx 579 \text{ MVAR}$$

El centro 2 entrega a la red trifásica 2 una potencia activa de 658,44 MW, o de otro modo, recibe de la red trifásica una potencia activa de 658,44 MW, por lo que la potencia reactiva recibida de la red trifásica 2 será:

$$Q_2 = P_2 \operatorname{tg} \alpha_2 = -658{,}44 \cdot \operatorname{tg} 135{,}5° \approx 647 \text{ MVAR}$$

7.6. REGULADORES DE CORRIENTE ALTERNA

7.6.1. Introducción

Un regulador de c.a. está constituido por dos tiristores en oposición o simplemente un triac, que permite variar el valor eficaz de la tensión alterna que llega a una carga. Las aplicaciones más importantes de estos reguladores son: control del flujo luminoso de lámparas eléctricas e instalaciones de alumbrado, regulación de calefactores eléctricos, cambiadores de tomas de transformadores y en control de velocidad de motores asíncronos.

Los tipos de control utilizados son: el control de fase y el control *on-off* o encendido-apagado. En el control de fase, los tiristores actúan enviando a la carga ciclos parciales (parte de la onda) de la tensión alterna de la red; en el control on-off, los tiristores trabajan de tal modo que envían a la carga ciclos completos de la red pero de un modo intermitente. Los sistemas controlados dependen del tipo de red, y así, existen reguladores monofásicos y trifásicos. Teniendo en cuenta que trabajan con alimentación de c.a., la conmutación o apagado de los tiristores o triacs se produce de un modo natural, y por ello no se requieren circuitos especiales de apagado.

7.6.2. Regulador con control de fase y carga resistiva

En la Figura 7.41*a* se muestra un generador de c.a. o red monofásica que tiene una tensión instantánea $v_s = \sqrt{2}V_s$ sen ωt que alimenta una resistencia R a través de un triac o dos tiristores en oposición. Al aplicar impulsos de disparo en el circuito de puerta del triac cada 180° (π radianes) y regulando el ángulo de encendido, se puede controlar la tensión eficaz que llega a la carga. En la Figura 7.41*b* se ha dibujado la onda de c.a. de la red, en *c*) los impulsos de disparo y en *d*) las formas de onda de la tensión y la corriente en la resistencia R. Téngase en

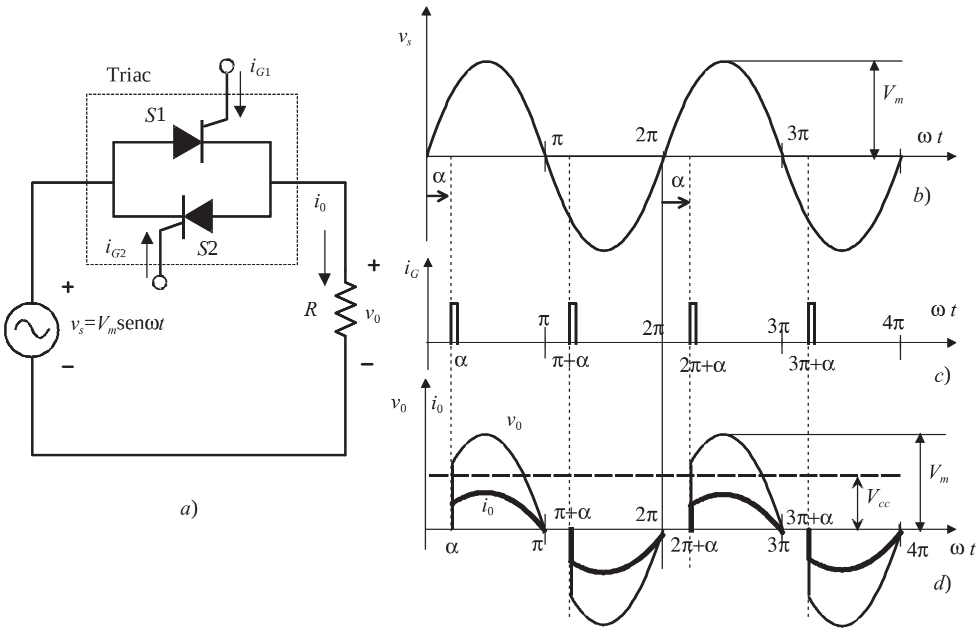


Figura 7.41. Regulador con control de fase y carga resistiva.

cuenta que debido al carácter bidireccional del triac, la señal de salida es similar a la que se obtenía en un rectificador controlado (véase epígrafe 7.5.2), pero incluyendo ahora formas de onda similares en los semiciclos negativos.

El valor de la tensión eficaz en la carga vale:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2}{2\pi}\int_\alpha^\pi (\sqrt{2}V_s \operatorname{sen} \omega t)^2\, d(\omega t)} = V_s\left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\pi}\right]^{1/2} \qquad (7.72)$$

Por consiguiente, variando el ángulo α entre 0 y π, la tensión eficaz V_0 variará desde V_s a 0. La corriente eficaz en la carga será igual a la corriente eficaz de la red, y su valor es:

$$I_0 = I_s = \frac{V_0}{R} \qquad (7.73)$$

De este modo la potencia disipada en la carga vale:

$$P_0 = V_0 I_0 \qquad (7.74)$$

y la potencia aparente que entrega el generador de c.a. es:

$$S_0 = V_s I_s = V_s I_0 \qquad (7.75)$$

por lo que el f.d.p. de la instalación vale:

$$f.d.p. = \frac{P_0}{S} = \frac{V_0 I_0}{V_s I_0} = \frac{V_0}{V_s} = \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\pi}\right]^{1/2} \qquad (7.76)$$

lo que indica que el f.d.p. solamente es igual a 1 cuando el ángulo de encendido α es igual a cero. El valor del f.d.p. disminuye al aumentar el ángulo de encendido del triac.

Debido a que la carga es resistiva, la forma de onda de la corriente es idéntica a la de tensión en la carga y van en fase. El apagado del triac se produce de un modo natural cuando la corriente se anula en cada semiciclo.

7.6.3. Regulador con control de fase y carga inductiva

El esquema correspondiente se muestra en la Figura 7.42*a*, en *b*) se ha dibujado la tensión de la red, en *c*) los impulsos de disparo, en *d*) la corriente en la carga y en *e*) la tensión en la carga. Debido a la inductancia de la carga, la corriente en el triac no se anula en $\omega t = \pi$, como sucedía en el caso anterior, sino para un ángulo $\omega t = \beta$ (β se denomina ángulo de extinción). El *ángulo de conducción* del triac $\delta = \beta - \alpha$ depende del ángulo de encendido α y del argumento de la impedancia de carga θ. Durante el intervalo de conducción, es decir, para $\alpha < \omega t < \beta$, la ecuación eléctrica del circuito es:

$$\sqrt{2}V_s \operatorname{sen} \omega t = Ri_0 + L\frac{di_0}{dt} \qquad (7.77)$$

que se resuelve de un modo análogo al seguido en el epígrafe (7.4.2), pero en este caso la condición inicial es $i_0 = 0$ para $\omega t = \alpha$. El lector puede demostrar que la solución es:

$$i_0(t) = \frac{\sqrt{2}V_s}{Z}[\operatorname{sen}(\omega t - \theta) - \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\cdot e^{\alpha/\operatorname{tg}\theta}\cdot e^{-t/\tau}]$$

$$\text{donde } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad ; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{L\omega}{R} \quad ; \quad \tau = \frac{L}{R} \qquad (7.78)$$

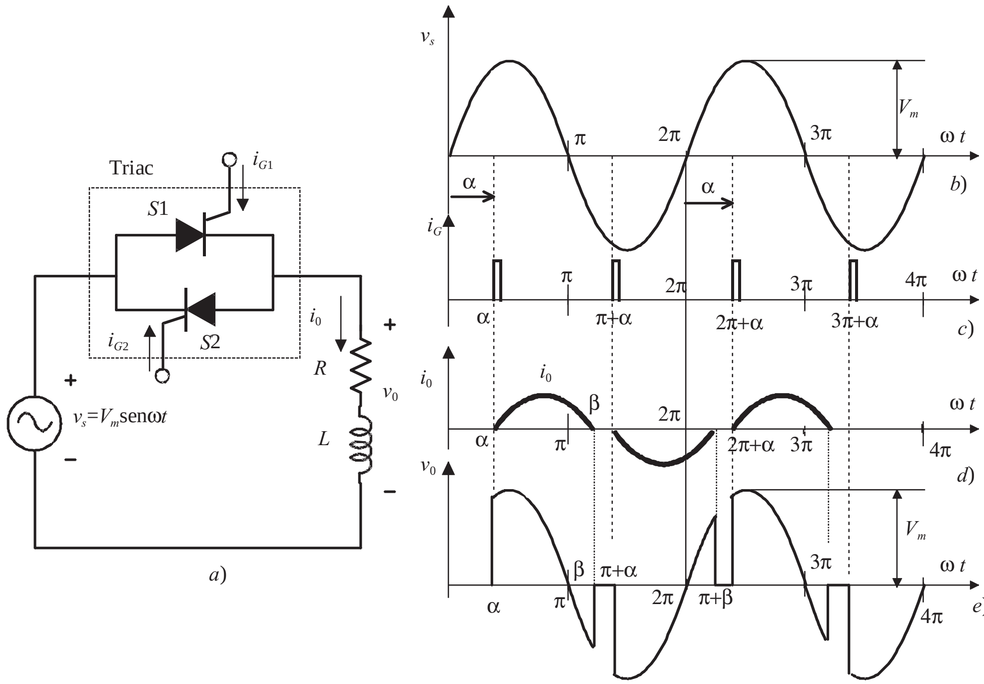


Figura 7.42. Regulador con control de fase y carga inductiva.

En la Figura 7.42*d* se muestra la forma de onda de la corriente de carga $i_0(t)$, que además de anularse para $\omega t = \alpha$, también se hace cero para $\omega t = \beta$, siendo β el ángulo de extinción, y que se puede calcular igualando a cero (7.78), lo que da lugar a:

$$\text{sen}\,(\beta - \theta) = \text{sen}\,(\alpha - \theta) \cdot e^{\alpha/\text{tg}\theta} \cdot e^{-\omega t/\omega\tau} \tag{7.79a}$$

pero teniendo en cuenta que $\omega t = \beta$ y $\omega\tau = \text{tg}\,\theta$, la ecuación anterior se transforma en:

$$\text{sen}\,(\beta - \theta) = \text{sen}\,(\alpha - \theta) \cdot e^{-\frac{\beta-\alpha}{\text{tg}\theta}} \tag{7.79b}$$

o empleando el ángulo de conducción $\delta = \beta - \alpha$, se obtiene:

$$\frac{\text{sen}\ \delta}{e^{-\frac{\delta}{\text{tg}\theta}} - \cos\delta} = \text{tg}\,(\alpha - \theta) \tag{7.79c}$$

ecuación trascendente que permite calcular δ por aproximaciones sucesivas. Este ángulo de conducción δ debe ser inferior a π radianes para que el tiristor $S1$ del triac se apague antes de encender el tiristor $S2$ en $\omega t = \alpha + \pi$. Téngase en cuenta que si se dispara el tiristor $S1$ en $\omega t = \alpha$, el triac comenzará a conducir en sentido positivo hasta que se anule la corriente de carga, de manera que si en el instante $\pi + \alpha$ aquélla aún no se ha anulado, el tiristor $S2$ no entrará en conducción aunque se envíe el correspondiente impulso de disparo a su puerta. En consecuencia, el ángulo de conducción de cada tiristor del triac debe ser como máximo igual a π, es decir, un semiperíodo, y de este modo cada tiristor del triac funcionará de un modo independiente del otro.

El valor de la tensión eficaz en la carga se puede calcular mediante la ecuación:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\beta}(\sqrt{2}V_s \operatorname{sen}\ \omega t)^2\ d(\omega t)} = V_s\left[\frac{\beta-\alpha}{\pi}+\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\pi}-\frac{\operatorname{sen} 2\beta}{\pi}\right]^{1/2} \qquad (7.80a)$$

Si en el primer miembro de la ecuación (7.79*c*) se toma $\delta \leq \pi$, se deduce del 2.º miembro que debe cumplirse $\alpha \geq \theta$. Obsérvese que si se aplica la condición límite mínima de hacer $\alpha = \theta$, la corriente de carga $i_0(t)$ expresada en (7.78) sería una senoide pura, ya que se anula el término exponencial, resultando ser:

$$i_0(t) = \frac{\sqrt{2}V_s}{Z}\operatorname{sen}(\omega t - \theta) \qquad (7.80b)$$

o sea, la misma corriente que circularía por el circuito sin que existiera el triac; es decir, como si la carga inductiva se conectara directamente a la red. Si el ángulo de encendido α fuese inferior a θ, es decir, $\alpha < \theta$, la ecuación (7.79*c*) nos indica que $\delta > \pi$, esto es, el ángulo de conducción es superior a la duración de un semiciclo, por lo que el tiristor $S2$ del triac no comenzaría a conducir aunque se aplique un impulso de disparo a su puerta en el instante $\pi + \alpha$; el circuito trabajaría de este modo como rectificador controlado para la parte positiva de la onda (es decir, sólo actuaría el tiristor positivo). Para evitar esta situación se suele aplicar un tren de impulsos a la puerta del triac o impulsos de mayor duración, de modo que si en el inicio de estos impulsos de disparo se verifica $\alpha < \theta$, el tiristor $S1$ no comenzará a conducir hasta que no se llegue al instante en que $\omega t = \alpha = \theta$, y por ello en el rango $0 < \alpha \leq \theta$ la corriente $i_0(t)$ viene expresada por (7.80), sin que los impulsos de disparo modifiquen la forma de onda de la corriente. A partir de $\alpha > \theta$ la corriente es discontinua, tal como se muestra en la Figura 7.42*d*, y su valor obedece a la ecuación (7.78).

Este sistema de control, que permite ajustar el valor eficaz de la tensión de c.a. que llega a una carga, se utiliza en la práctica para la regulación de velocidad de motores universales o motores monofásicos con colector de delgas, como es el caso de los taladros eléctricos, aspiradoras y batidoras domésticas y también en el control del flujo luminoso de lámparas de incandescencia. Utilizando tres triacs o tres juegos de dos tiristores cada uno, se puede regular la velocidad de motores asíncronos trifásicos; hay que tener en cuenta en este caso que como el par desarrollado por estos motores depende del cuadrado de la tensión aplicada, este sistema de regulación solamente se utiliza para motores de potencia pequeña y conviene además que el par resistente sea del tipo cuadrático, como es el caso de los ventiladores y bombas centrífugas, para que el par resistente en el arranque sea de pequeño valor.

7.6.4. Regulador on-off

El principio de este sistema de control se puede comprender fácilmente con el esquema de la Figura 7.43, donde una red de c.a. monofásica alimenta una carga inductiva a través de un triac. Para regular la potencia de la carga, en vez de controlar el ángulo de disparo del triac, lo que se hace es aplicar impulsos síncronos a su puerta en el momento en que la tensión pasa por cero durante una serie de ciclos y desconectar los impulsos de disparo durante otra serie de ciclos. En el caso de la Figura 7.43 se observa que la tensión de alimentación se ha conectado a la carga durante n ciclos consecutivos y se ha desconectado

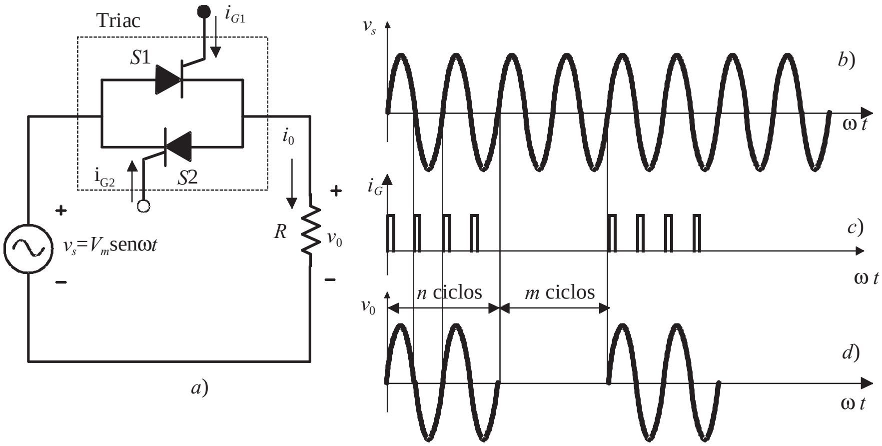


Figura 7.43. Regulador con control on-off del triac.

durante los siguientes *m* ciclos. De este modo el valor eficaz de la tensión aplicada a la carga resistiva será:

$$V_0 = \sqrt{\frac{n}{2\pi(n+m)} \int_{\alpha}^{\pi} (\sqrt{2}V_s \text{ sen } \omega t)^2 \, d(\omega t)} = V_s \sqrt{\frac{n}{n+m}} = V_s \sqrt{k} \qquad (7.81)$$

donde k es igual a $n/(n + m)$, y esta constante se denomina ciclo de trabajo (*duty cycle*) del regulador.

Este tipo de control se utiliza en la regulación de velocidad de motores con mucha inercia mecánica y también en la regulación de temperatura de calderas de agua con mucha inercia térmica (de grandes dimensiones); en este caso la resistencia *R* de la Figura 7.43 representa el elemento calefactor que recibe ciclos variables de la onda de la red de c.a., consiguiéndose de esta manera fijar la temperatura del fluido de la caldera en un valor muy constante. Inicialmente, si el agua de la caldera está muy fría, el triac recibe impulsos de disparo todo el tiempo, de tal modo que la resistencia de calefacción de la caldera funciona a toda potencia, pues recibe todos los ciclos de la red; conforme va aumentando la temperatura del agua, va disminuyendo el número de impulsos aplicados a la puerta, reduciéndose el número de ciclos activos *n* respecto de los pasivos *m*. Cuando la temperatura del agua es cercana a la de consigna (*set point*), entonces el valor de *n* se reduce sensiblemente y es el suficiente para mantener la temperatura en el valor deseado. Este sistema de control recibe por ello el nombre de *proporcional*, ya que cuanto mayor es el error de temperatura, es decir, la diferencia entre la temperatura de consigna y la real que tiene la caldera, tanto mayor es la potencia desarrollada por la resistencia de calefacción.

7.7. CONVERTIDORES C.C. A C.C. (*CHOPPERS* O TROCEADORES)

En algunas aplicaciones se dispone de una fuente de c.c. constante y se requiere una tensión de c.c. variable. Un ejemplo de ello es la alimentación de motores de c.c. en los trenes metropolitanos. En estas instalaciones se procede primeramente a transformar la c.a. trifásica de la

red de distribución de media tensión en c.c. por medio de rectificadores trifásicos (o hexafásicos e incluso dodecafásicos). La c.c. obtenida es de amplitud constante y se aplica entre un cable sustentador denominado catenaria (terminal positivo) y el carril (terminal negativo).

Para regular la velocidad de los motores de tracción es preciso transformar la c.c. de amplitud constante que recoge el pantógrafo del coche motor en tensión continua de amplitud media variable que se aplica al motor. En este epígrafe se estudian algunos circuitos de conmutación que pueden realizar esta transformación y que reciben el nombre genérico de **choppers** o **troceadores**, ya que utilizan interruptores estáticos para recortar o trocear la tensión de alimentación y conseguir un control del valor medio de la tensión de salida. Los diversos tipos de choppers difieren entre sí según sea el número de cuadrantes del diagrama tensión-corriente en los que son capaces de trabajar.

7.7.1. *Chopper* directo o reductor de tensión

La Figura 7.44 muestra el esquema eléctrico de un chopper directo (*step-down* en inglés) que es capaz de suministrar una tensión de c.c. ajustable v_0 a una carga genérica (por ejemplo, un motor de c.c. definido por una R, una L y una f.c.e.m. E) a partir de una fuente de c.c. de amplitud constante V_s, de tal modo que se cumple esta limitación: $V_{cc} \leq V_s$ (donde V_{cc} representa el valor medio de la tensión continua de salida); $S1$ es un interruptor estático autoconmutado cuyo cierre o apertura (conducción o no conducción) depende de la señal de control que se aplica a su terminal de puerta G. En la práctica $S1$ puede ser un transistor bipolar de unión, un MOSFET de potencia, un GTO e incluso un tiristor con conmutación forzada; $D1$ es un diodo rectificador.

Supóngase una condición inicial para la cual la corriente de la carga es $I_{\text{mín}}$ y que $S1$ está apagado. Cuando en $t = 0$ se enciende $S1$, la tensión de alimentación V_s se conecta a la carga y por tanto $v_0 = V_s$; tal como se muestra en la Figura 7.44*b*, el diodo $D1$ queda polarizado en inverso y la intensidad circula por la carga. El tiempo durante el cual está cerrado $S1$ se

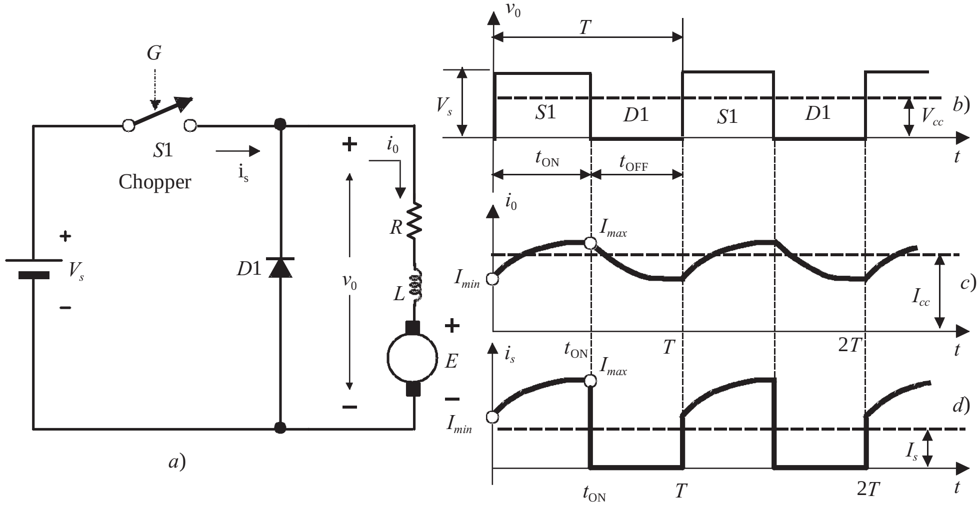


Figura 7.44. *Chopper* directo o reductor de tensión.

denomina tiempo de encendido t_{ON}. Durante este tiempo, y siempre que $V_s > E$, se produce un aumento exponencial de la corriente de carga regido por la ecuación:

$$V_s = Ri_0 + L\frac{di_0}{dt} + E \tag{7.82}$$

cuya solución, teniendo en cuenta que $i_0(t) = I_{\text{mín}}$, es de la forma:

$$i_0(t) = I_{\text{mín}} e^{-t/\tau} + \frac{V_s - E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \tag{7.83}$$

donde $\tau = L/R$ es la constante de tiempo del circuito. En la Figura 7.44*c* se muestra la forma de onda de la corriente anterior, cuya solución es válida para $0 \leq t < t_{ON}$. En el instante $t = t_{ON}$ se bloquea el interruptor estático $S1$ aplicando una señal al electrodo de control G. La corriente habrá alcanzado un valor máximo $i_0(t = t_{ON}) = I_{\text{máx}}$. En ese momento, debido al apagado de $S1$, la corriente de la carga se cierra por el diodo volante $D1$ cortocircuitando la tensión de la carga, por lo que $v_0 = 0$; esta situación continúa hasta $t = T$. La corriente en este período de tiempo responde a la solución de la ecuación:

$$0 = Ri_0 + L\frac{di_0}{dt} + E \tag{7.84}$$

que tomando la condición inicial $i_0(t = 0) = I_{\text{máx}}$ y redefiniendo el origen de tiempos a partir de $t = t_{ON}$, da lugar a la siguiente solución:

$$i_0(t) = I_{\text{máx}} e^{-t/\tau} - \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \tag{7.85}$$

cuya expresión es válida para $t_{ON} \leq t < T$. La corriente en la carga va disminuyendo con el tiempo y al final de este período tendrá un valor $i_0(t = t_{OFF} = T - t_{ON}) = I_{\text{mín}}$, como así se indica en la Figura 7.44*c*. En $t = T$, el interruptor $S1$ se vuelve a encender nuevamente y el ciclo se repite indefinidamente. En la Figura 7.44*b* se muestra la forma de onda de la tensión en la carga y en la Figura 7.44*c* la onda de corriente que se ha supuesto que su valor nunca pasa por cero, lo que supone un modo de funcionamiento continuo (y que se consigue en la práctica siempre que se cumpla que $L/R >> T$). Se observa que la tensión de alimentación de carga v_0 es un recorte de la tensión de alimentación de c.c. V_s, y de ahí el nombre de este tipo de convertidores: choppers en inglés, recortadores o troceadores en castellano. El valor medio de la tensión en la carga se obtiene fácilmente de la Figura 7.44*b*, resultando ser:

$$V_{cc} = \frac{1}{T} t_{ON} V_s = kV_s \quad ; \quad \text{donde } k = \frac{t_{ON}}{T} \tag{7.86}$$

en el que el parámetro k define el ciclo de trabajo (*duty cycle*) del chopper. La corriente media en la carga I_{cc} viene expresada por:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc} - E}{R} \tag{7.87}$$

donde V_{cc} es el valor medio de la tensión en la carga expresada en (7.86). Como quiera además que la corriente de alimentación i_s es igual a la corriente de carga i_0 durante el

período ON y cero durante el período OFF, como se muestra en la Figura 7.44*d*, su valor medio será:

$$I_s = \frac{t_{ON}}{T} I_{cc} \tag{7.88}$$

De este modo, y teniendo en cuenta además (7.86), se puede escribir:

$$\frac{V_s}{V_{cc}} = \frac{I_{cc}}{I_s} = \frac{T}{t_{ON}} = \frac{1}{k} \tag{7.89}$$

que expresa el principio de conservación de la energía del chopper ($V_s I_s = V_{cc} I_{cc}$), es decir, la potencia suministrada por la fuente es igual a la potencia absorbida por la carga. De acuerdo con (7.89), el chopper directo se puede considerar como un transformador de corriente continua con un primario de tensión V_s y corriente I_s y un secundario de tensión V_{cc} y corriente I_{cc}, de tal modo que la relación de transformación, de acuerdo con (7.89), es igual a $1/k$.

El período de las señales dibujadas en la Figura 7.44 es el inverso de la frecuencia ($T = 1/f$), donde f es la frecuencia en Hertz del interruptor recortador o troceador. Las frecuencias de conmutación prácticas dependen del tipo y tamaño del interruptor estático utilizado. Los valores típicos están comprendidos en el rango de 0,2 a 1 kHz para dispositivos de alta corriente de apagado por puerta (GTO) o en el rango de 3 a 100 kHz para transistores de baja corriente. En algunos dispositivos conviene utilizar una frecuencia de conmutación superior a 20 kHz para evitar el ruido audible que producen las fuerzas magnéticas oscilantes del sistema. Sin embargo, hay que tener en cuenta que las pérdidas de potencia en el interruptor estático aumentan con la frecuencia de conmutación.

Ejemplo de aplicación 7.9

El circuito chopper de la Figura 7.44 tiene los siguientes parámetros: V_s = 120 V; E = 30 V; L = 2 mH; R = 0,4 Ω; T = 2,5 ms; t_{ON} = 1 ms. Calcular: a) corrientes máxima y mínima en la carga; b) tensión media y corriente media en la carga.

Solución

a) La corriente $i_0(t)$ en el período $0 \leq t < t_{ON}$ viene expresada por (7.83):

$$i_0(t) = I_{\text{mín}} e^{-t/\tau} + \frac{V_s - E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

que para $t = t_{ON}$ conduce a un valor $I_{\text{máx}}$:

$$I_{\text{máx}} = I_{\text{mín}} e^{-t_{ON}/\tau} + \frac{V_s - E}{R}(1 - e^{-t_{ON}/\tau}) \tag{a}$$

b) La corriente $i_0(t)$ en el período $t_{ON} \leq t < T$ viene expresada por (7.85):

$$i_0(t) = I_{\text{máx}} e^{-t/\tau} - \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

que para $t = T - t_{ON}$ conduce a un valor $I_{\text{mín}}$:

$$I_{\text{mín}} = I_{\text{máx}} e^{-\frac{T - t_{ON}}{\tau}} - \frac{E}{R}\left(e^{-\frac{T - t_{ON}}{\tau}}\right) \tag{b}$$

De las ecuaciones (a) y (b) se obtiene:

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_s}{R}\left(\frac{1 - e^{-\frac{t_{ON}}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} - \frac{E}{V_s}\right);\ I_{\text{mín}} = \frac{V_s}{R}\left(\frac{e^{\frac{t_{ON}}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} - \frac{E}{V_s}\right) \qquad (c)$$

que teniendo en cuenta que el valor de la constante de tiempo es $\tau = L/R = 2/0,4 = 5$ ms y los datos del enunciado, da lugar a:

$$I_{\text{máx}} = \frac{V_s}{R}\left(\frac{1 - e^{-\frac{t_{ON}}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} - \frac{E}{V_s}\right) = \frac{120}{0,4}\left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{5}}}{1 - e^{-\frac{2,5}{5}}} - \frac{30}{120}\right) = 63,21 \text{ A}$$

$$I_{\text{mín}} = \frac{V_s}{R}\left(\frac{e^{\frac{t_{ON}}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} - \frac{E}{V_s}\right) = \frac{120}{0,4}\left(\frac{e^{\frac{1}{5}} - 1}{e^{\frac{2,5}{5}} - 1} - \frac{30}{120}\right) = 27,39 \text{ A}$$

Se observa que al ser la corriente mínima mayor que cero, la conducción es continua. El lector puede deducir a partir de la segunda ecuación (c) el tiempo t'_{ON} que se requeriría para que $I_{\text{mín}}$ llegara a valer cero, y que sería:

$$I_{\text{mín}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_s}{R}\left(\frac{e^{\frac{t'_{ON}}{\tau}} - 1}{e^{\frac{T}{\tau}} - 1} - \frac{E}{V_s}\right) \quad \Rightarrow \quad t'_{ON} = \tau \cdot \ln\left[1 + \frac{E}{V_s}\left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1\right)\right]$$

que en nuestro caso da un valor:

$$t'_{ON} = \tau \cdot \ln\left[1 + \frac{E}{V_s}\left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1\right)\right] = 5 \cdot \ln\left[1 + \frac{30}{120}\left(e^{\frac{2,5}{5}} - 1\right)\right] = 0,81 \text{ ms}$$

Como quiera que el tiempo de cierre real $t_{ON} = 1$ ms es superior al valor anterior de 0,81 ms, la conducción será continua.

c) La tensión media en la carga viene dada por (7.86):

$$V_{cc} = \frac{t_{ON}}{T} V_s = \frac{1}{2,5} 120 = 48 \text{ voltios}$$

por lo que la corriente media será, según (7.87):

$$I_{cc} = \frac{V_{cc} - E}{R} = \frac{48 - 30}{0,4} = 45 \text{ amperios}$$

Es evidente que si las curvas exponenciales de la Figura 7.44c se hubieran aproximado por líneas rectas, la corriente media en la carga se podría haber obtenido como media aritmética entre las corrientes $I_{\text{máx}}$ e $I_{\text{mín}}$, es decir:

$$I_{cc} \approx \frac{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}}{2} = \frac{63,21 + 27,39}{2} = 45,3 \text{ amperios}$$

que prácticamente coincide con el valor anterior. La aproximación será tanto más válida cuanto mayor sea la constante de tiempo del circuito frente al período T (en nuestro caso, $\tau = 5$ ms y $T = 2,5$ ms, por lo que $\tau = 2T$).

7.7.2. *Chopper* inverso o elevador de tensión

En el chopper directo estudiado en el epígrafe anterior se transfiere energía desde la fuente V_s hasta la carga (motor de c.c.), pero en la práctica es también importante poder efectuar el proceso inverso, es decir, transferir energía desde una fuente de c.c. de poca tensión a otra de mayor tensión mediante un chopper inverso (*step-up* en inglés). Por ejemplo, en los trenes metropolitanos es de gran interés devolver energía a la red de c.c. por parte de los motores de tracción, lo que se traduce en un frenado en los mismos por recuperación de energía o regenerativo. La Figura 7.45 muestra un circuito que es capaz de funcionar de este modo. Los sentidos de referencia de las tensiones y corrientes se han elegido igual que en el caso del chopper directo (véase Fig. 7.44).

Debido a que la f.c.e.m. E del motor de la Figura 7.45*a* es inferior a la tensión de alimentación V_s, no sucede nada hasta que no se cierra el interruptor estático $S2$. Al entrar en conducción $S2$, se cortocircuita la carga y la tensión en la misma es igual a cero, $v_0 = 0$. La f.c.e.m. E hace que la corriente en la carga i_0 empiece a aumentar en sentido negativo, almacenando energía magnética en la inductancia L del circuito durante el tiempo de conducción $(0 \leq t < t_{ON})$. La ecuación de funcionamiento en este período es:

$$0 = Ri_0 + L\frac{di_0}{dt} + E \qquad (7.90)$$

Cuando $S2$ pasa al estado de bloqueo en $t = t_{ON}$, la f.e.m. inducida en la inductancia L se suma a la f.c.e.m. E, lo que hace que la corriente de la carga continúe circulando a través del diodo $D2$ hacia la fuente V_s. Durante el período de bloqueo $(t_{ON} \leq t < T)$, la ecuación de funcionamiento del circuito es:

$$V_s = Ri_0 + L\frac{di_0}{dt} + E \qquad (7.91)$$

Considerando como instante de inicio de funcionamiento el momento en el que i_0 devuelve corriente a la red a través del diodo $D2$, las curvas de tensión y corriente en la carga son las mostradas en la Figura 7.45*b* y *c*. Como quiera que en el epígrafe siguiente combinaremos este chopper inverso con otro directo para formar un chopper de dos cuadrantes, se ha designado en las Figura 7.45*b* y *c* con t_{ON} el intervalo de tiempo correspondiente a *la conducción*

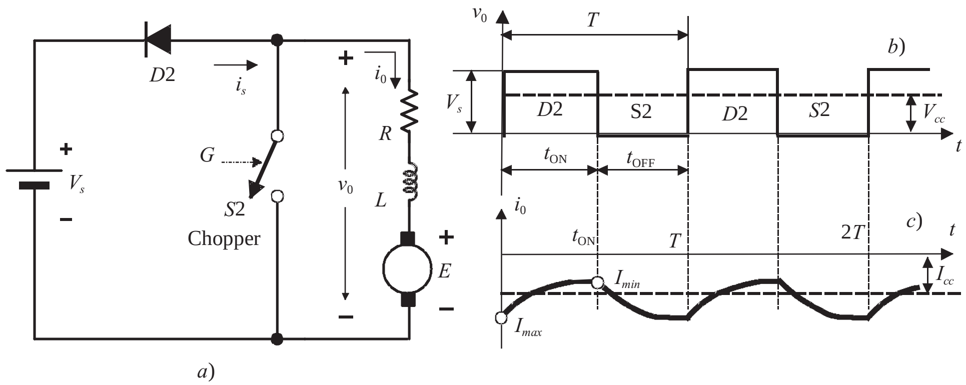


Figura 7.45. *Chopper* inverso o elevador de tensión.

*del diodo D*2 (y no de cierre del interruptor estático *S*2). Durante este intervalo la di_0/dt en la carga es positiva, como así se deduce de (7.91), y el *módulo* de la corriente negativa i_0 decrece. En $t = t_{ON}$ se cierra *S*2 y la di_0/dt en la carga se hace negativa de acuerdo con (7.90), por lo que aumenta el valor negativo de la corriente de carga (véase Fig. 7.45*c*).

Cuando el diodo *D*2 conduce, la tensión en la carga $v_0 = V_s$ y cuando se cierra *S*2 la tensión $v_0 = 0$, como así se señala en la Figura 7.45*b*. El valor medio de la tensión en la carga, de acuerdo con esta figura, es:

$$V_{cc} = \frac{t_{ON}}{T} V_s = kV_s \quad ; \quad \text{donde } k = \frac{t_{ON}}{T} \tag{7.92}$$

y el valor medio de la corriente en la carga es:

$$I_{cc} = \frac{V_{cc} - E}{R} \tag{7.93}$$

Debido a nuestra elección de los sentidos de las corrientes y del tiempo, las expresiones anteriores son idénticas a las que se obtenían en el caso del chopper directo [comparar (7.92) y (7.93) con (7.86) y (7.87)]. El valor medio de la corriente en la carga viene expresado también por (7.88), es decir:

$$I_s = \frac{t_{ON}}{T} I_{cc} \tag{7.94}$$

7.7.3. *Choppers* de dos y cuatro cuadrantes

En la práctica se necesita una combinación de choppers reductores y elevadores. Un esquema eléctrico que responde a esta doble combinación es el que se muestra en la Figura 7.46. Este circuito es capaz de suministrar un valor de la tensión media de la carga V_{cc} positivo, siempre que la corriente de la carga pueda circular en ambos sentidos, con una transición por cero. Esto significa que el sistema puede funcionar en los dos primeros cuadrantes del diagrama tensión-corriente ($v_0 - i_0$), tal como se señala en la Figura 7.46.

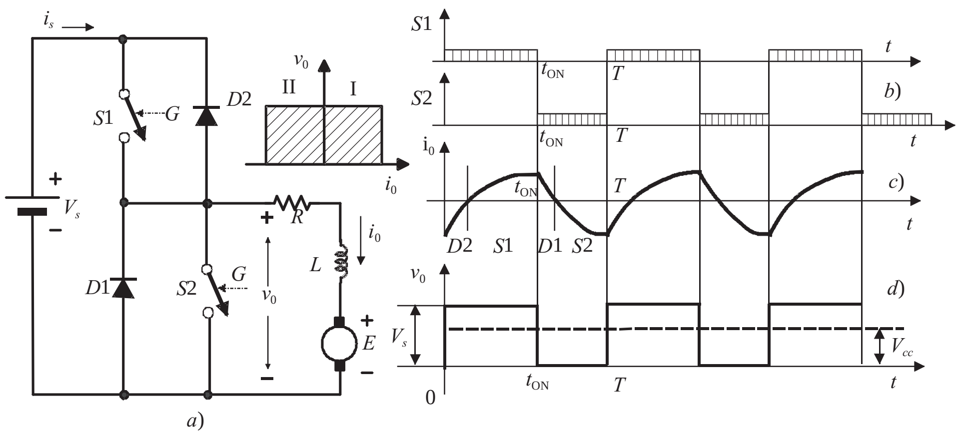


Figura 7.46. *Chopper* de dos cuadrantes.

En este chopper, los interruptores estáticos $S1$ y $S2$ se cierran o encienden alternativamente, tal como se muestra en la Figura 7.46*b*, con el pequeño intervalo de apagado del interruptor. Cuando funciona con una corriente i_0 positiva, el interruptor $S1$ y el diodo $D1$ actúan como un chopper directo o reductor. Ni $S1$ ni $D1$ pueden funcionar con este sentido de la corriente.

Similarmente, cuando la corriente i_0 es negativa, el interruptor $S2$ y el diodo $D2$ trabajan como un chopper inverso o elevador, independientemente de $S1$ y $D1$. La Figura 7.46*c* muestra una forma de onda típica de la corriente durante la transición de la corriente de valores positivos a negativos. Cuando la corriente es positiva, ésta se cierra a través de $S1$ y $D1$ (funcionamiento en el primer cuadrante), mientras que cuando la corriente es negativa, ésta circula a través de $S2$ y $D2$ (funcionamiento en el segundo cuadrante).

Las relaciones de las tensiones y corrientes para este chopper de dos cuadrantes son las mismas que las de los choppers directo e inverso, a saber:

$$V_{cc} = \frac{t_{ON}}{T} V_s = kV_s \quad ; \quad I_{cc} = \frac{V_{cc} - E}{R} \tag{7.95}$$

En aquellos casos en los que se necesita producir tanto tensiones como corrientes en ambos sentidos, es necesario utilizar un chopper de cuatro cuadrantes. Un ejemplo práctico podría ser el control de un brazo de robot accionado por un motor de c.c. en el que se necesita una corriente positiva para el período de aceleración y una corriente negativa para el período de frenado. Es preciso disponer también de una tensión positiva para regular la velocidad en sentido directo o positivo y una tensión negativa para invertir la velocidad. Se puede lograr este funcionamiento en cuatro cuadrantes utilizando dos sistemas como el señalado en la Figura 7.46, pero conectado según se muestra en la Figura 7.47. La combinación $S1$, $D1$, $S2$ y $D2$ se utiliza para el funcionamiento en los cuadrantes 1 y 2, mientras que se requieren los $S3$, $D3$, $S4$ y $D4$ para el funcionamiento en los cuadrantes 3 y 4. Igualmente el chopper de cuatro cuadrantes se utiliza con profusión en la regulación de velocidad de motores eléctricos de c.c. empleados en la tracción eléctrica. El motor que lleva la tracción puede funcionar en ambos sentidos en los cuadrantes 1 y 3, empleando los cuadrantes 2 y 4 para frenado regenerativo o por acumulación de energía.

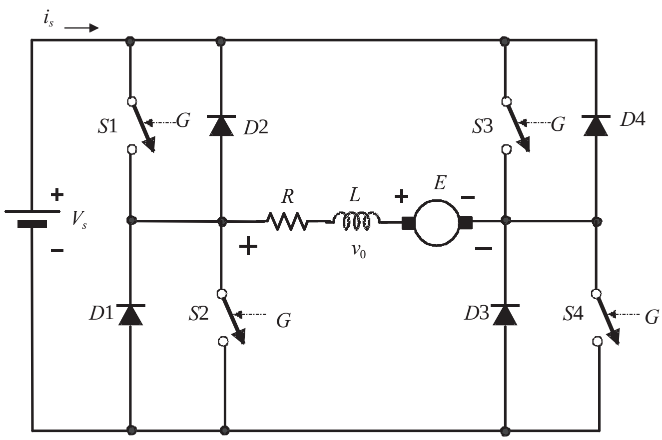


Figura 7.47. *Chopper* de cuatro cuadrantes.

Ejemplo de aplicación 7.10

Se dispone de un chopper de dos cuadrantes como el indicado en la Figura 7.46 para controlar la velocidad de un motor serie de c.c.; la constante kΦ del motor vale 0,1 V/r.p.m. (la f.e.m. del motor viene expresada por E = kΦn); la resistencia del inducido del motor es de 0,2 ohmios, siendo la inductancia lo suficientemente elevada como para considerar que la corriente de carga es plana y de amplitud constante; la frecuencia del chopper es constante y vale 1.000 Hz y la tensión de alimentación es de 100 V. a) El chopper S1 y el diodo D1 se emplean para trabajar la máquina como motor a una velocidad de 500 r.p.m. y con una corriente de carga media de 100 A (que se supone de valor constante, es decir, libre de rizado). Calcular el tiempo t_{ON} del chopper, la potencia desarrollada por el motor y absorbida de la red. b) El chopper S2 y el diodo S2 se utilizan para que la máquina funcione en régimen de frenado regenerativo a la misma velocidad y con una corriente de −100 A. Calcular el tiempo t_{ON} del chopper, la potencia desarrollada por el motor y la que se devuelve a la red.

Solución

a) La tensión media V_{cc} en bornes del motor vale:

$$V_{cc} = E + RI_{cc} = 0{,}1 \cdot 500 + 0{,}2 \cdot 100 = 70 \text{ voltios}$$

y teniendo en cuenta (7.95) y que T vale $T = 1/f = 1/1.000 = 10^{-3}$ s = 1 ms, resulta:

$$V_{cc} = \frac{t_{ON}}{T} V_s \quad \Rightarrow \quad 70 = \frac{t_{ON}}{T} 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{ON}}{T} = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad t_{ON} = 0{,}7 \cdot 1 = 0{,}7 \text{ ms}$$

por lo que la corriente media absorbida de la red, teniendo en cuenta (7.94), vale:

$$I_s = \frac{t_{ON}}{T} I_{cc} = 0{,}7 \cdot 100 = 70 \text{ A}$$

La potencia mecánica desarrollada por el motor vale:

$$P_m = E \cdot I_{cc} = (0{,}1 \cdot 500) \cdot 100 = 5.000 \text{ W}$$

y la potencia absorbida de la red es:

$$P_s = V_s \cdot I_s = 100 \cdot 70 = 7.000 \text{ W}$$

Téngase en cuenta que en la resistencia del inducido se disipa una potencia $P_{cu} = R \cdot I_{cc}^2 = 0{,}2 \cdot 100^2 = 2.000$ W, y de este modo la máquina absorbe de la red 7.000 W, de los cuales se pierden por efecto Joule 2.000 W y quedan 5.000 W para desarrollar potencia mecánica el motor.

b) La tensión media V_{cc} en bornes del motor (régimen generador) vale:

$$V_{cc} = E - RI_{cc} = 0{,}1 \cdot 500 - 0{,}2 \cdot 100 = 30 \text{ voltios}$$

y teniendo en cuenta (7.95) resulta:

$$V_{cc} = \frac{t_{ON}}{T} V_s \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{t_{ON}}{T} 100 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{ON}}{T} = 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad t_{ON} = 0{,}3 \cdot 1 = 0{,}3 \text{ ms}$$

Debe destacarse que el tiempo anterior representa ahora el tiempo de conducción del diodo *D*2, lo que quiere decir que el tiempo de conducción del chopper *S*2 es $T - t_{ON} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ ms. La corriente media entregada a la red, teniendo en cuenta (7.94), vale:

$$I_s = \frac{t_{ON}}{T} I_{cc} = 0{,}3 \cdot 100 = 30 \text{ A}$$

La potencia desarrollada por el motor es ahora una potencia eléctrica generada:

$$P_e = E \cdot I_{cc} = (0{,}1 \cdot 500) \cdot (100) = 5.000 \text{ W}$$

y la potencia eléctrica que entrega a la red vale:

$$P_s = V_s \cdot I_s = 100 \cdot 30 = 3.000 \text{ W}$$

Téngase en cuenta que en la resistencia del inducido se disipa, al igual que antes, una potencia $P_{cu} = R \cdot I_{cc}^2 = 0{,}2 \cdot 100^2 = 2.000$ W, y de este modo la máquina en régimen de frenado produce o genera una potencia eléctrica de 5.000 W, de los cuales se pierden por efecto Joule 2.000 W y quedan 3.000 W para entregar a la red.

7.8. CONVERTIDORES C.C. A C.A. (ONDULADORES O INVERSORES)

El propósito de un ondulador (*onduleur* en francés) o inversor (*inverter* en inglés) es convertir la energía eléctrica de una fuente de tensión o corriente continua en una salida de c.a. de frecuencia variable, con tensión o corriente ajustable. La tensión obtenida tiene la forma de una onda periódica que está formada por tramos rectangulares o escalonados procedentes de la tensión de c.c. de alimentación, lo cual es suficiente para aplicaciones de mediana y pequeña potencia. Para potencias elevadas es preciso mejorar la onda para que se acerque más a la forma sinusoidal, lo que se consigue en la práctica utilizando técnicas de conmutación dentro de los interruptores estáticos. Los inversores pueden ser monofásicos o trifásicos y con salida en *tensión* o *en corriente*. En este epígrafe solamente se estudian los inversores de tensión. Los inversores estáticos se utilizan en una variedad de aplicaciones como: calentamiento por inducción, regulación de velocidad de motores de c.a. (tanto síncronos como asíncronos). En sistemas de alimentación ininterrumpida o SAI (UPS en inglés*: uninterrumpible power supplies*) para ordenadores y otros. El sistema de alimentación de entrada puede ser una batería de acumuladores, células solares, pilas de combustible u otras fuentes de c.c., como por ejemplo la salida de un rectificador fijo o controlado.

7.8.1. Inversores monofásicos

En la Figura 7.48*a* se muestra un inversor monofásico media onda que servirá para comprender el principio de funcionamiento de los mismos. La alimentación es una fuente de c.c. doble con toma central y tensiones $V_s/2$ a cada lado. Los interruptores estáticos $S1$ y $S2$ pueden ser tiristores, GTO, transistores bipolares de unión (BJT) o MOSFET. Los diodos $D1$ y $D2$ se utilizan como diodos de libre circulación para devolver la energía reactiva de la carga a la red de c.c. en los instantes en que están abiertos los interruptores estáticos $S1$ y $S2$.

Los interruptores estáticos se abren alternativamente cada $T/2$ segundos, siendo T el período de la señal resultante y cuya inversa $f = 1/T$ es la frecuencia de la tensión generada de c.a. En las Figuras 7.48*b* y *c* se muestran los impulsos de disparo que se envían a las puertas de los interruptores estáticos, que se mantienen durante medio ciclo (debe tenerse en cuenta que antes de aplicar los impulsos de corriente i_{g2} al interruptor $S2$ debe haber finalizado la secuencia de los impulsos i_{g1} sobre $S1$ para evitar la coincidencia en la conducción de $S1$ y $S2$, que provocaría un cortocircuito en la red de alimentación).

Entre $0 \le t < T/2$ conduce el interruptor estático $S1$ debido a la aplicación de los impulsos i_{g1}, de este modo la tensión en la carga es $v_0 = V_s/2$. Durante el siguiente semiperíodo

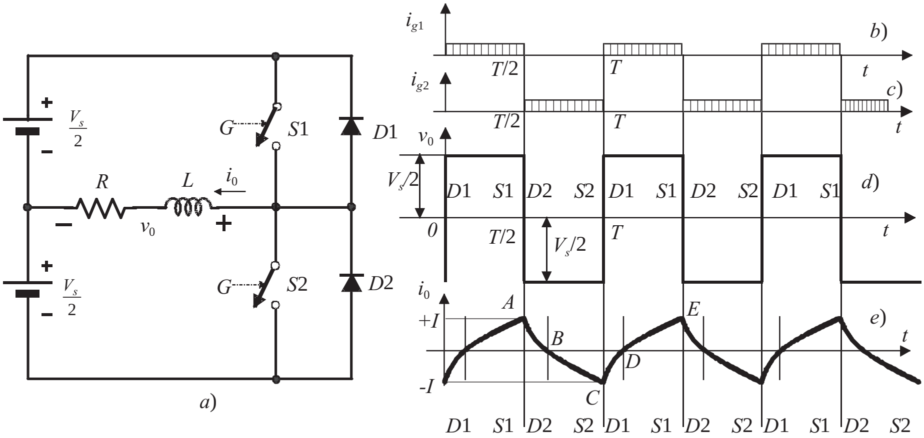


Figura 7.48. Inversor monofásico media onda.

$T/2 \leq t < T$ conduce $S2$ (debido a los impulsos i_{g2}), lo que da lugar a una tensión de carga $v_0 = -V_s/2$. Esta secuencia se va repitiendo continuamente, por lo que la tensión en la carga tendrá la forma de onda rectangular mostrada en la Figura 7.48*d*. Si la carga es inductiva, como es el caso de la Figura 7.48*a*, la corriente i_0 se retrasa respecto de la tensión de salida v_0 como se señala en la Figura 7.48*e* y corresponden a ciclos de carga y descarga del circuito *R-L*. Obsérvese que en los instantes previos a $t = T/2$ (punto *A* de la Fig. 7.48*e*), el interruptor $S1$ está cerrado y se tiene una corriente i_0 positiva que en $t = T/2$ es igual a $+I$. En ese momento se abre $S1$ y se cierra $S2$; como la corriente i_0 no puede ser discontinua, deberá seguir siendo positiva durante un cierto tiempo pese a la inversión de signo de v_0 (que ha pasado a valer $-V_s/2$), y es por ello que en el tramo *AB* la corriente de retorno la debe suministrar el diodo $D2$. En el punto *B* la corriente $i_0 = 0$, por lo que comienza a conducir $S2$ hasta el punto *C*, que corresponde a una corriente $i_0 = -I$. En ese instante, que corresponde a $t = T$, se abre $S2$ y se cierra $S1$ y la corriente de retorno la suministra el diodo $D1$, desde *C* hasta *D*, y desde este punto hasta *E*, la corriente es positiva y la suministra $S1$, y así sucesivamente. En definitiva, los diodos volantes de realimentación conducen cuando la tensión y la corriente en la carga tienen polaridades opuestas.

Se puede demostrar que el desarrollo en serie de Fourier de la onda de tensión de la Figura 7.48*d* del inversor monofásico media onda es de la forma:

$$v_0 = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{2V_s}{n\pi} \operatorname{sen} n\omega t \qquad (7.96)$$

donde $\omega = 2\pi f$ es la pulsación de la tensión alterna producida por el inversor y $f = 1/T$ es la frecuencia. En la expresión anterior para $n = 1$ se obtiene el valor de la componente fundamental, cuyo valor eficaz es:

$$V_1 = \frac{2V_s}{\sqrt{2}\pi} = 0{,}45\ V_s \qquad (7.97)$$

En la Figura 7.49*a* se muestra otro tipo de inversor monofásico, que corresponde al *inversor en puente*. Los interruptores estáticos $S1$ y $S2$ conducen durante el primer semiperíodo y

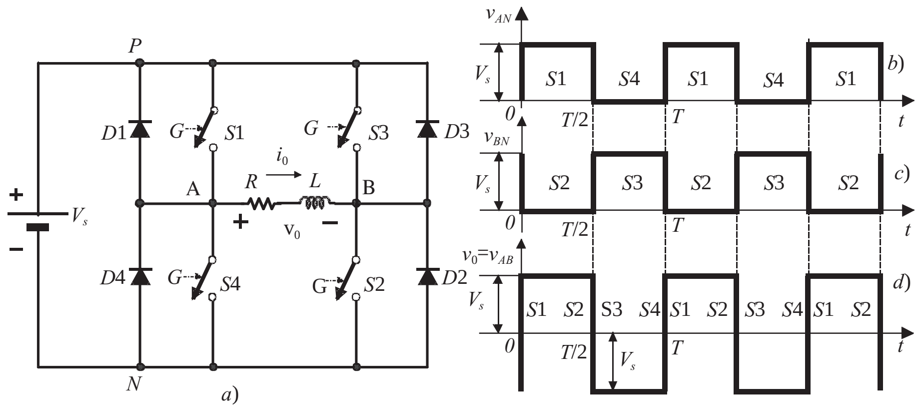


Figura 7.49. Inversor monofásico en puente.

los *S*3 y *S*4 conducen durante el segundo semiperíodo. En la Figura 7.49*b* se muestra el tipo de onda que se obtiene entre los terminales *A* y *N*; al cerrar *S*1 la tensión de v_{AN} es la tensión del generador V_s, mientras que cuando conduce *S*4 la tensión v_{AN} vale cero. De un modo análogo se obtiene la tensión entre los terminales *B* y *N*, cuya onda se muestra en la Figura 7.49*c*. La tensión entre los terminales de salida *A* y *B* vale: $v_0 = v_{AN} - v_{BN}$, cuya onda se ha dibujado en la Figura 7.49*d*. Es una onda periódica cuya amplitud máxima coincide con la tensión de alimentación V_s. En el caso de que la carga sea resistiva la señal de corriente coincidirá en su forma con la onda de tensión, pero en el caso de que la carga sea inductiva la corriente se retrasará de la tensión y, como ocurría en el caso de la Figura 7.48, habrá períodos de conducción de los diodos volantes *D*1, *D*2, *D*3 y *D*4 para devolver la energía inductiva a la red de c.c.

Se puede demostrar que el desarrollo en serie de Fourier de la onda de tensión de la Figura 7.49*d* del inversor monofásico en puente es de la forma:

$$v_0 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4V_s}{n\pi} \operatorname{sen} n\omega t \tag{7.98}$$

que corresponde a un valor doble que el del inversor monofásico media onda. Como en el caso anterior, la frecuencia del inversor depende de la frecuencia de conmutación de los interruptores estáticos.

7.8.2. Inversor trifásico en puente

Este inversor produce una tensión alterna trifásica a partir de una alimentación de c.c. El esquema correspondiente es el mostrado en la Figura 7.50. El funcionamiento de este inversor es esencialmente el mismo que el monofásico en puente comentado en el epígrafe anterior; es como si al tipo monofásico en puente se le hubiera añadido otra rama, de tal forma que los terminales *R*, *S* y *T* se conectan alternativamente (por medio de los interruptores estáticos) a los terminales positivo y negativo de la fuente de c.c., dando lugar a la obtención de una tensión trifásica siempre que los impulsos de disparo de los interruptores se desfasen 120° entre sí y entren en conducción siguiendo un determinado orden cíclico.

En la Figura 7.50 la numeración de cada interruptor corresponde al orden de estas secuencias de disparo para obtener un ciclo completo de la tensión de salida. El control de la fre-

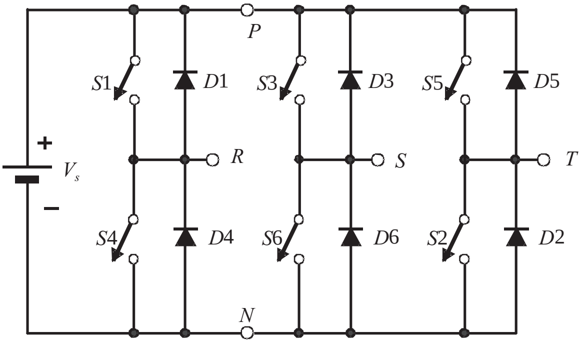


Figura 7.50. Inversor trifásico en puente.

cuencia de esta tensión viene definido por la frecuencia de disparo de los interruptores estáticos. Tomando como referencia de tensiones el borne *N* negativo de la fuente y suponiendo una conmutación instantánea se obtienen las ondas de las tensiones v_{RN}, v_{SN} y v_{TN}, mostradas en la Figura 7.51, que tienen forma rectangular con un valor máximo igual a la tensión de la fuente V_s. Las tensiones compuestas de salida se obtienen mediante las ecuaciones siguientes:

$$v_{RS} = v_{RN} - v_{SN} \quad ; \quad v_{ST} = v_{SN} - v_{TN} \quad ; \quad v_{TR} = v_{TN} - v_{RN} \tag{7.99}$$

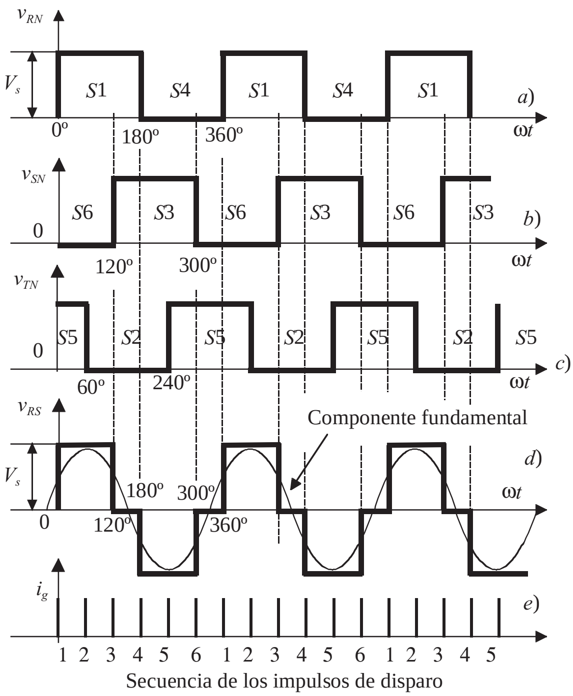


Figura 7.51. Tensiones del inversor trifásico en puente.

En la Figura 7.51*d* se ha dibujado únicamente la primera tensión compuesta anterior, cuyo desarrollo en serie de Fourier es de la forma:

$$v_{RS} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4V_s}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{6} \text{ sen } n\omega t \tag{7.100}$$

que al desarrollar nos da:

$$v_{RS} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} V_s \left(\text{sen } \omega t - \frac{1}{5} \text{ sen } 5\omega t - \frac{1}{7} \text{ sen } 7\omega t + \frac{1}{11} \text{ sen } 11\omega t + \cdots\right) \tag{7.101}$$

Es decir, las tensiones compuestas no tienen armónicos de orden tres ni múltiplos de tres, lo cual era de prever puesto que estos armónicos de las tensiones simples v_{RN}, v_{SN} y v_{TN}, van en fase entre sí, es decir, son homopolares, y al hacer las diferencias de tensiones señaladas en (7.99) estas componentes armónicas se anulan. Se observa además que el primer armónico que aparece es el de orden 5 y tiene un valor que es el 20 por 100 del fundamental.

7.8.3. Control de la tensión de salida de un inversor

En muchas aplicaciones industriales es necesario regular la tensión de salida de un inversor; por ejemplo, para controlar la velocidad de giro de un motor asíncrono o de inducción se necesita variar la tensión de alimentación e incluso la frecuencia (manteniendo entonces el cociente V/f constante para conseguir un flujo de entrehierro constante y evitar de este modo saturaciones en el núcleo de hierro). Es indudable que se puede regular la tensión de salida del inversor ajustando la tensión de c.c. de entrada, pero al ser ésta una acción externa al inversor no se va a desarrollar aquí; en nuestro caso solamente se va a estudiar el control de la tensión actuando sobre los instantes de conmutación de los interruptores estáticos, para lograr ajustar la anchura de los impulsos rectangulares de la señal de salida, procedimiento que se denomina en inglés *pulse width-modulated (PWM)* o modulación por la anchura de los impulsos, y que pueden clasificarse en tres categorías, a saber: *a*) modulación de un solo impulso; *b*) modulación de impulsos múltiples, y *c*) modulación senoidal de impulsos.

a) Modulación de un solo impulso

En este tipo de control se produce un solo impulso rectangular por semiciclo cuya anchura se puede ajustar actuando sobre los instantes de encendido de los interruptores estáticos del inversor. Se dispone para ello, y como se muestra en la Figura 7.52, de dos tensiones de control, una de las cuales es una señal de referencia de forma rectangular con un valor de pico V_R y frecuencia f igual a la frecuencia que debe producir el inversor; esta tensión tiene la misión de onda *moduladora*. La otra tensión se comporta como *portadora* y es una onda triangular con un valor de pico V_T y frecuencia f_T.

Los instantes de encendido de los interruptores estáticos vienen definidos por los puntos de intersección de las dos ondas anteriores. La anchura de los impulsos de salida corresponde al período de tiempo durante el cual se cumple la desigualdad $v_T(t) < v_R(t)$ en el semiperíodo positivo y al contrario en los semiciclos negativos. Los dos parámetros de control de la tensión producida son:

$$\textbf{\textit{Índice de amplitud}}: M = \frac{V_R}{V_T} \quad ; \quad \textbf{\textit{Índice de frecuencia}}: N = \frac{f_T}{f} \tag{7.102}$$

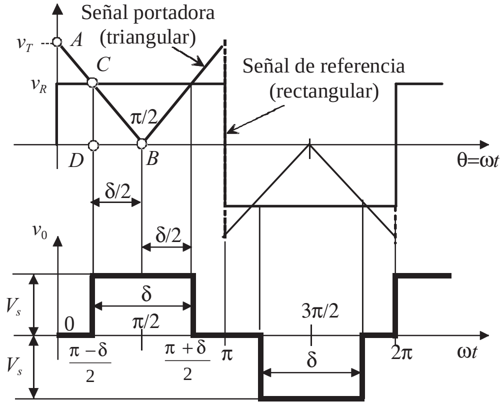


Figura 7.52. Modulación de un solo impulso.

El índice de amplitud se emplea para ajustar la amplitud de la tensión que produce el inversor; el índice de frecuencia representa el número de impulsos rectangulares que contiene la onda en cada semiciclo. En este caso, como solamente se quiere producir un solo impulso por semiciclo, el índice N es igual a 1, por lo que la frecuencia de la onda triangular coincide con la de la onda rectangular.

En la Figura 7.52*b* se muestra la forma escalonada de la tensión de salida, cuya tensión máxima es $+V_s$ para el impulso positivo y $-V_s$ para el impulso negativo, siendo V_s la tensión de c.c. de alimentación del inversor. Para comprender cómo la amplitud de la señal rectangular de referencia controla la anchura de los impulsos generados, obsérvese que la ecuación de la recta AB del primer tramo de la onda triangular es de la forma:

$$V(\theta) = -\frac{2V_T}{\pi}\theta + V_T \tag{7.103}$$

El punto C correspondiente a la intersección de las ondas triangular y rectangular se deduce de la ecuación anterior haciendo $V(\theta_C) = V_R$, resultando ser:

$$\theta_C = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{V_R}{V_T}\right) \tag{7.104}$$

Si se denomina δ la anchura del impulso, la distancia $|DB|$ es igual a la mitad de la anchura de un impulso, de donde se deduce:

$$|DB| = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{V_R}{V_T}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{V_R}{V_T} \quad \Rightarrow \quad \delta = \pi\frac{V_R}{V_T} \tag{7.105}$$

La ecuación anterior indica que la anchura del impulso es función lineal de la tensión de la señal rectangular o de referencia V_R, o en definitiva, teniendo en cuenta (7.102), la anchura del impulso es proporcional al índice de amplitud M; de este modo, si $M = 1$, es decir, $V_R = V_T$, el impulso de salida del inversor tiene una anchura de π radianes (análogo a la salida del inversor clásico sin control de la Fig. 7.49), mientras que si $M = 0$, es decir, $V_R = 0$, la anchura del impulso es cero. De esta forma, variando el índice de amplitud entre 0 y 1 se regula el ancho de los impulsos de salida del inversor entre 0 y π, lo que se traduce en una

variación de la tensión alterna del mismo, como claramente indica el desarrollo en serie de Fourier de la onda de la Figura 7.52*b*, que responde a la ecuación:

$$v_0 = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4V_s}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\delta}{2} \operatorname{sen} n\omega t \tag{7.106}$$

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que si el ángulo anterior δ se reduce demasiado para intentar conseguir bajas tensiones, aumenta enormemente el contenido de armónicos de la tensión de salida. Es fácil demostrar lo anterior a partir de la ecuación (7.106), ya que el cociente entre las amplitudes del tercer armónico frente al primero o fundamental vale:

$$\frac{b_3}{b_1} = \frac{\dfrac{4V_s}{3\pi} \operatorname{sen} \dfrac{3\delta}{2}}{\dfrac{4V_s}{\pi} \operatorname{sen} \dfrac{\delta}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{3\delta}{2}}{3 \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\delta}{2}} = \frac{3 - 4 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\delta}{2}}{3} \tag{7.107}$$

Es decir, conforme disminuye δ, la amplitud del tercer armónico es más elevada respecto de la amplitud del armónico fundamental.

b) Modulación de impulsos múltiples

Una forma de reducir el contenido de armónicos del inversor anterior es obtener varios impulsos de salida en cada semiciclo; para ello es preciso aumentar la frecuencia de la onda portadora triangular frente a la moduladora rectangular, o de otro modo, según (7.102), debe aumentarse el índice de frecuencia *N*. En la Figura 7.53 se ha considerado un índice de frecuencia igual a 3, es decir, la onda triangular tiene triple frecuencia que la rectangular, por lo que se obtienen tres impulsos de salida por semiciclo. Si se consideran *N* impulsos en cada semiciclo de anchura δ, la distancia entre impulsos es π/N con una anchura de cada impulso δ, que puede demostrarse de una forma similar a (7.105), que vale:

$$\delta = \frac{\pi}{N}\frac{V_R}{V_T} = \frac{\pi}{N} M \quad \text{ya que} \quad M = \frac{V_R}{V_T} \tag{7.108}$$

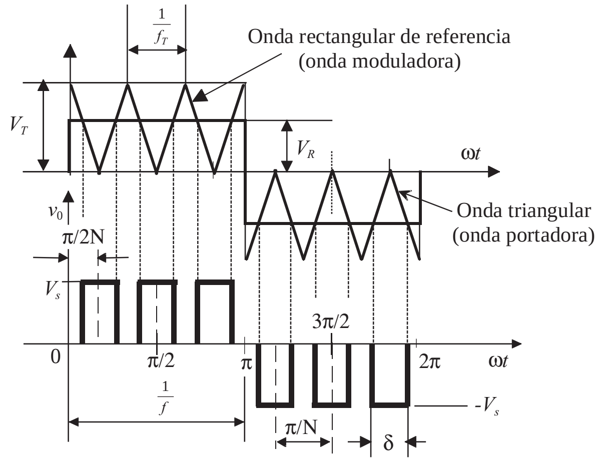


Figura 7.53. Modulación de impulsos múltiples.

De este modo con el índice de modulación M se gobierna la anchura de los impulsos y al variar M entre 0 y 1 la anchura varía entre 0 y π/N. Se puede demostrar (véase ejemplo de aplicación 7.11) que el desarrollo en serie de Fourier de la señal de salida de un inversor con modulación de impulsos múltiples es de la forma:

$$v_0 = \sum_{n=1,3,5,...}^{\infty} \left\{ \frac{4V_s}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\delta}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \operatorname{sen} \frac{n\pi(2i+1)}{2N} \right\} \operatorname{sen} n\omega t \tag{7.109}$$

donde N indica el número de impulsos en cada semiciclo y δ la anchura de cada impulso. El valor eficaz de la tensión de c.a. obtenida es:

$$V_0 = \sqrt{\frac{1}{\pi/N} \int_{\frac{\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} V_s^2 \, d(\omega t)} = V_s \sqrt{\frac{N\delta}{\pi}} = V_s \sqrt{M} \tag{7.110}$$

c) Modulación senoidal de los impulsos

Este método utiliza varios impulsos en cada semiciclo, pero en vez de ser todos del mismo ancho, como en el caso anterior, su anchura se hace variar de forma senoidal, de tal modo que los impulsos más cercanos al pico de la onda senoidal son más anchos y los cercanos al paso por cero de la onda senoidal son más estrechos. Este tipo de modulación tiene un contenido de armónicos muy reducido y por este motivo se ha impuesto en la mayoría de los inversores de gran potencia que se emplean en el control de velocidad de motores asíncronos. Para conseguir este tipo de modulación es evidente que la onda moduladora de referencia debe ser una sinusoide con un valor de pico V_R y frecuencia f igual a la frecuencia que debe producir el inversor, lo que corresponde a una expresión instantánea $v_R(t) = V_R \operatorname{sen} \omega t$ (con $\omega = 2\pi f$). La tensión *portadora* será, al igual que en el caso anterior, una serie de ondas triangulares con un valor de pico V_T y frecuencia f_T. De este modo, de acuerdo con (7.108) la anchura del impulso valdrá:

$$\delta = \frac{\pi}{N} \frac{V_R}{V_T} = \frac{\pi}{N} \frac{V_R \operatorname{sen} \omega t}{V_T} \tag{7.111}$$

Es decir, el ancho de cada impulso depende de la posición del impulso dentro de la onda senoidal; para aplicar la expresión anterior a un caso concreto, se debe considerar el valor del argumento ωt para el tiempo correspondiente al centro de cada impulso.

Generalmente en los inversores trifásicos el valor del índice de frecuencia N suele ser 6, aunque es válido cualquier número múltiplo de 3 (es decir, la onda triangular tiene una frecuencia múltiplo de 3 de la onda senoidal). Para ver la forma en la que se configuran los impulsos, en la Figura 7.54 se han mostrado tres composiciones diferentes de modulación senoidal con $N = 6$ en todas ellas. En cada semiperíodo existen 6 ondas triangulares positivas para el semiciclo positivo y otras 6 negativas para el semiciclo negativo. Los puntos de intersección de la serie de ondas triangulares con la onda senoidal determinan los instantes de encendido de los interruptores estáticos del inversor.

En el caso *a*) se ha considerado un índice de amplitud igual a 1 (es decir, la onda senoidal de referencia tiene el mismo valor de pico que las ondas triangulares) y por ello la tensión de salida mostrada en la parte inferior tiene impulsos anchos y la componente fundamental de esta tensión representa la tensión más elevada que puede producir el inversor. Los impulsos de la tensión de salida varían entre $\pm V_s$, siendo ésta el valor de la tensión continua de la red de

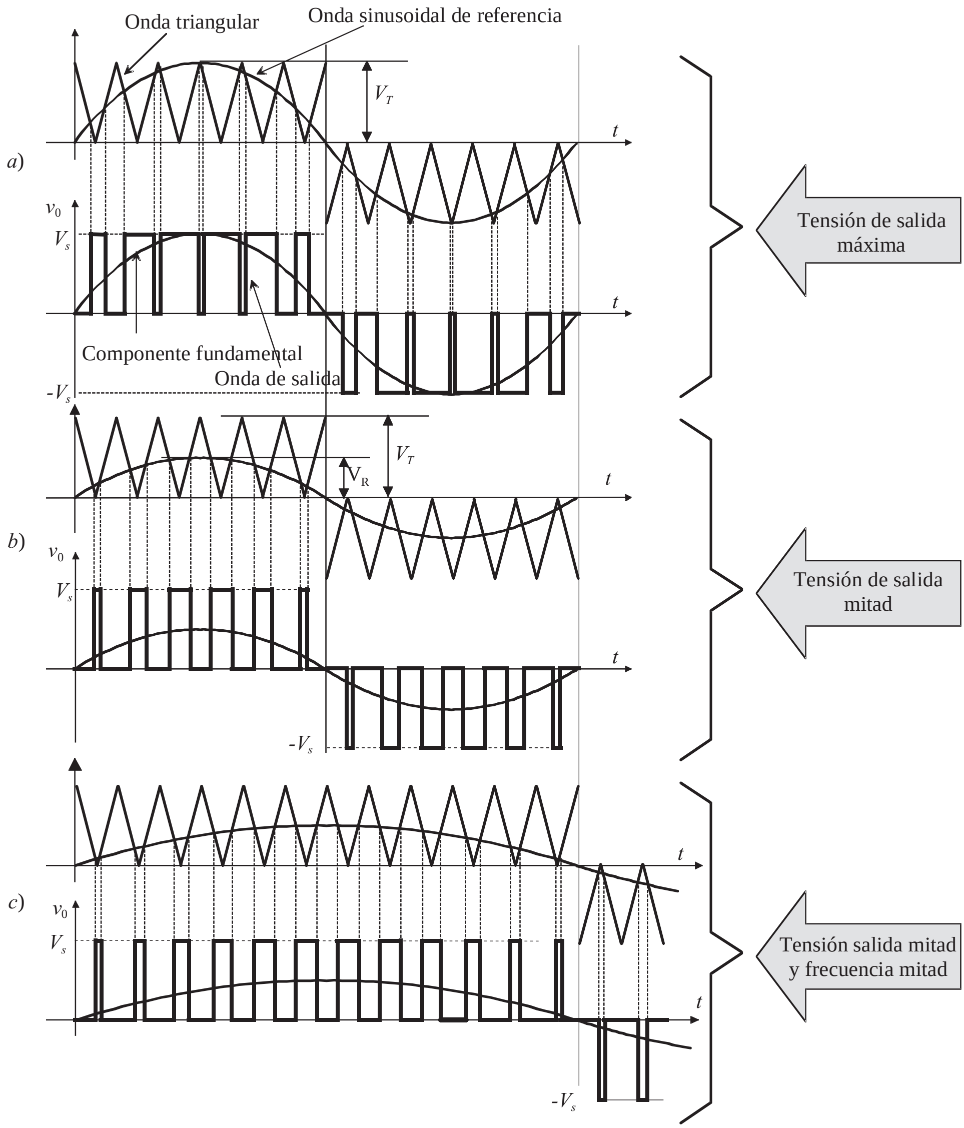


Figura 7.54. Modulación senoidal de la anchura de los impulsos.

alimentación del inversor. En el caso *b*) la señal senoidal de referencia se ha reducido a la mitad, por lo que se consigue una onda fundamental en el inversor cuya amplitud es la mitad que en el caso anterior. En el caso *c*) se ha considerado una onda senoidal de referencia de amplitud mitad y de frecuencia mitad (doble período), y es por ello que el número de impulsos en cada semiperíodo se ha duplicado, dando lugar a una componente fundamental de mitad de amplitud y frecuencia. Evidentemente, en los inversores trifásicos es necesario emplear tres ondas moduladoras senoidales desfasadas 120° para conseguir los instantes de disparo de los 6 interruptores estáticos que existen en el inversor.

Ejemplo de aplicación 7.11

Determinar el desarrollo en serie de Fourier de la tensión de salida de un inversor con modulación de impulsos múltiples del tipo señalado en la Figura 7.53; considerar N impulsos de anchura δ por semiciclo y una tensión de c.c. de alimentación del inversor de valor V_s. Si el número de impulsos por semiciclo es igual a 5 y el índice de modulación de amplitud vale M = 0,2, calcular las magnitudes de los once primeros armónicos en función de la tensión de alimentación.

Solución

El desarrollo en serie de Fourier viene expresado por:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega t$$

donde los valores de los coeficientes son:

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} v(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\theta)\, d\theta \quad ; \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} v(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} v(t) \operatorname{sen} n\omega t\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$$

Por el tipo de simetría de la onda de la Figura 7.53, se anulan los términos a_0, a_n y los términos pares b_n, y los valores de los otros coeficientes b_n son:

$$b_n = \frac{2V_s}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} \operatorname{sen} n\theta\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{3\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} \operatorname{sen} n\theta\, d\theta + \int_{\frac{5\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{5\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} \operatorname{sen} n\theta\, d\theta + \right.$$

$$\left. \int_{\frac{7\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{7\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} \operatorname{sen} n\theta\, d\theta + \int_{\frac{9\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{9\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} \operatorname{sen} n\theta\, d\theta + \cdots \right]$$

donde se ha tenido en cuenta que los centros de los impulsos se producen para los valores de θ igual a: $\pi/2N$, $3\pi/2N$, $5\pi/2N$, $7\pi/2N$, etc. Resolviendo la primera integral anterior se obtiene:

$$b_n = \frac{2V_s}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} \operatorname{sen} n\theta\, d\theta = \frac{2V_s}{\pi}\left[-\frac{\cos n\theta}{n}\right]_{\frac{\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}} = \frac{2V_s}{\pi n}\left[\cos n\left(\frac{\pi}{2N}-\frac{\delta}{2}\right) - \cos n\left(\frac{\pi}{2N}+\frac{\delta}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{4V_s}{\pi n} \operatorname{sen}\frac{n\delta}{2} \operatorname{sen}\frac{\pi n}{2N}$$

y de un modo análogo se obtienen las demás, resultando:

$$b_n = \frac{4V_s}{\pi n} \operatorname{sen}\frac{n\delta}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \operatorname{sen}\frac{\pi n(2i+1)}{2N}$$

por lo que el desarrollo en serie de Fourier es de la forma:

$$v_0 = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left\{\frac{4V_s}{\pi n} \operatorname{sen}\frac{n\delta}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \operatorname{sen}\frac{\pi n(2i+1)}{2N}\right\} \operatorname{sen} n\omega t$$

Para $N = 5$ los coeficientes b_n son de la forma:

$$b_n = \frac{4V_s}{\pi n} \operatorname{sen} \frac{n\delta}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi n}{10} + \operatorname{sen} \frac{3\pi n}{10} + \operatorname{sen} \frac{5\pi n}{10} + \operatorname{sen} \frac{7\pi n}{10} + \operatorname{sen} \frac{9\pi n}{10} \right]$$

El valor de δ es, según (7.108): $\delta = \frac{\pi}{N} M = \frac{\pi}{5} 0{,}2 = \frac{\pi}{25}$, y el primer coeficiente de la serie tiene un valor:

$$b_1 = \frac{4V_s}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{50} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{10} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{10} + \operatorname{sen} \frac{7\pi}{10} \operatorname{sen} \frac{9\pi}{10} \right] = 0{,}2587V_s$$

y operando los demás, se obtienen los valores siguientes:

$$b_3 = 0{,}0983V_s \quad ; \quad b_5 = 0{,}0787V_s \quad ; \quad b_7 = 0{,}0957V_s \quad ; \quad b_9 = 0{,}2453V_s \quad ; \quad b_{11} = -0{,}2388V_s$$

7.9. CONVERTIDORES C.A. A C.A. (CICLOCONVERTIDORES)

Un cicloconvertidor es un sistema de interruptores estáticos que es capaz de convertir una señal de c.a. de tensión y frecuencia constante (como la de la red eléctrica) en una tensión de c.a. de tensión y frecuencia variable, pero sin pasar por ninguna etapa intermedia de c.c. Se puede considerar que un cicloconvertidor monofásico está formado por dos convertidores conectados en oposición, tal como se muestra en la Figura 7.55*a*.

Los convertidores *P* y *N* son rectificadores controlados positivos y negativos, respectivamente. Si solamente trabaja el convertidor *P*, la tensión de salida es positiva, y de modo análogo, si solamente trabaja el convertidor *N*, la tensión será negativa. La frecuencia con que se suministran los impulsos de disparo a las puertas de los tiristores fija la frecuencia de salida del cicloconvertidor. Supóngase que los ángulos de encendido de los tiristores de ambos puentes sean iguales entre sí y de valor cero, es decir, $\alpha_P = \alpha_N = 0°$ y con una frecuencia 1/3 de la correspondiente de la red; entonces el convertidor *P* funcionará durante 1,5 ciclos y el convertidor *N* funcionará durante otros 1,5 ciclos, dando lugar a la forma de onda mostrada en la Figura 7.55*c*.

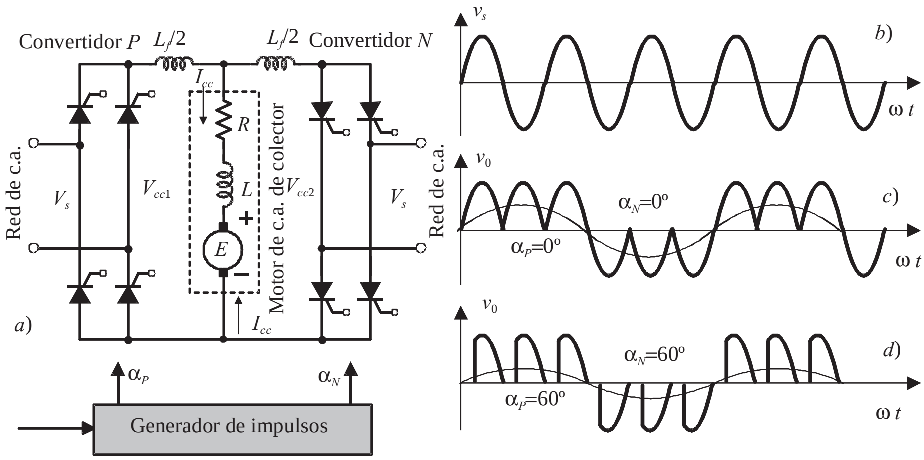


Figura 7.55. Principio de funcionamiento de un cicloconvertidor monofásico.

Si el ángulo de encendido de los tiristores es otro, por ejemplo, $\alpha_P = \alpha_N = 60°$ y con la misma frecuencia anterior, la forma de onda será la mostrada en la Figura 7.55*d*. Indudablemente, las Figuras 7.55*c* y *d* son tensiones alternas que se obtienen en la carga de frecuencia 1/3 de la correspondiente a la red de alimentación y cuyo valor eficaz depende de los ángulos de encendido de los convertidores. Ambas ondas tienen un contenido de armónicos importante, que se puede reducir si se van modificando gradualmente los ángulos de encendido de los tiristores dentro de cada semiciclo de la señal de salida e incluso utilizando una red de c.a. trifásica para alimentar dos convertidores trifásicos.

En la Figura 7.56*a* se muestra un cicloconvertidor que partiendo de una red trifásica alimenta una carga monofásica. Los dos convertidores, *P* y *N*, son trifásicos; el primero de ellos se utiliza para generar la parte positiva de la tensión de la carga y el otro para conformar la parte negativa de la misma. Sabemos del epígrafe 7.5 que la tensión media de salida de un rectificador controlado varía con el coseno del ángulo de encendido de sus tiristores [véase expresiones (7.48*b*) y (7.64*b*)], y es por ello que si se van cambiando los ángulos de encendido de un modo adecuado se puede llegar a construir una tensión media de salida que se acerque a la forma sinusoidal. En la Figura 7.56*b* se muestra la tensión de salida obtenida cuando los ángulos de encendido se modifican de acuerdo con los valores mostrados en su parte inferior (los ángulos de encendido superiores a 90° significan los períodos de conducción del convertidor negativo *N*; realmente, respecto a su propia referencia, los ángulos de encendido son $\alpha_N = 180° - \alpha_P$).

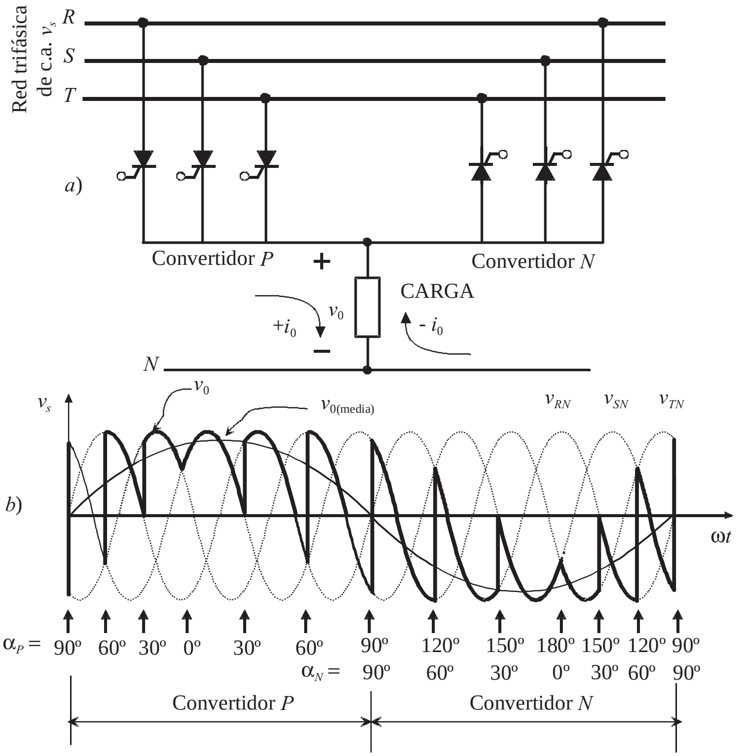


Figura 7.56. Cicloconvertidor trifásico a monofásico.

Si se desea transformar una alimentación trifásica con salida también trifásica es preciso utilizar tres grupos convertidores (uno por cada fase) como los indicados en la Figura 7.56*a*. Cada fase de la salida se alimenta por dos rectificadores trifásicos, uno que suministra la tensión durante el semiciclo positivo y el otro para el semiciclo negativo. Los ángulos de encendido de los tiristores se controlan de tal modo que se utilizan diveros sectores sucesivos de las tres tensiones de entrada para producir las tres ondas de salida. Los cicloconvertidores son útiles para producir una salida a una frecuencia regulable baja. Prácticamente, la máxima frecuencia de salida es alrededor de un tercio de la frecuencia de alimentación trifásica. Los cicloconvertidores se utilizan para el control de velocidad de grandes motores asíncronos o de inducción.

7.10. ACCIONAMIENTOS ELÉCTRICOS

7.10.1. Generalidades

Un accionamiento eléctrico es un sistema capaz de convertir energía eléctrica en mecánica, produciendo un trabajo útil y manteniendo el control sobre el proceso de conversión. En la Figura 7.57 se muestra el diagrama de bloques simplificado de un accionamiento eléctrico regulado electrónicamente. La red eléctrica alimenta, por medio de un convertidor electrónico, a un motor eléctrico que mueve la carga directamente o por medio de una transmisión mecánica. Existe un sistema de medida que recibe señales de la máquina accionada y del motor eléctrico y cuyas salidas se envían al sistema de control que actúa sobre el convertidor. La carga constituye el sistema mecánico empleado para realizar el trabajo productivo. Por ejemplo, en un tren eléctrico, máquinas herramientas, trenes de laminación en las fábricas metalúrgicas o en industrias papeleras, grúas, excavadoras, etc., normalmente las necesidades de la carga vienen definidas por unos requerimientos específicos de par y velocidad.

Para seleccionar adecuadamente un accionamiento eléctrico para una aplicación concreta, se deben conocer las demandas que requiere la carga. Debe elegirse un motor eléctrico con unas características par-velocidad y velocidad-corriente que se adapten a aquélla. Esto significa que para que las características del motor sean compatibles con los requerimientos de la carga, aquél debe funcionar sin que se sobrepasen los valores máximos de corriente y/o potencia. Las curvas par-velocidad que presenta el motor cuando la alimentación se ajusta a sus condiciones asignadas o nominales se denomina *característica natural*. Generalmente la característica natural del motor eléctrico no es compatible con las solicitaciones que requiere la carga, y es por ello que se hace necesario colocar un convertidor electrónico entre la red de alimentación y el motor eléctrico.

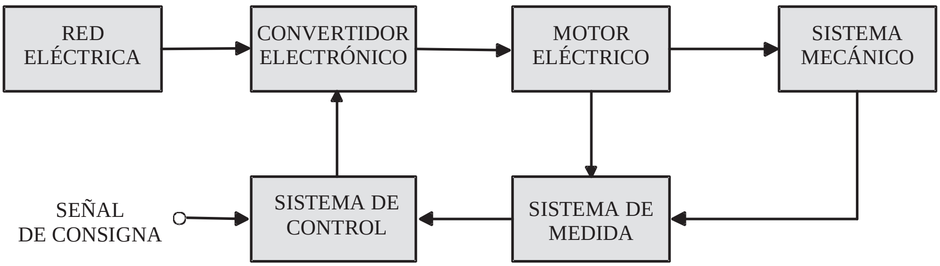


Figura 7.57. Diagrama de bloques de un accionamiento eléctrico.

El convertidor electrónico, o simplemente convertidor, controla el flujo de potencia que se transfiere de la red al motor, de tal modo que sus curvas características se adapten a la carga. Para realizar esta misión el convertidor dispone de un sistema de control que trabaja con niveles muy bajos de tensión y potencia, y que incorpora transistores y circuitos integrados, y también a veces sistemas microprocesadores. La señal de consigna, que define el punto de funcionamiento del accionamiento, representa una entrada al equipo de control. Existe un aislamiento eléctrico entre el circuito de potencia del convertidor y el sistema de control del mismo; esto se debe a dos razones fundamentales: por una parte evitar que una avería del circuito de potencia afecte al circuito de control e incluso al operador que esté ajustando los valores de las señales de consigna de este último, y por otra, intentar que los armónicos generados en el circuito de potencia no lleguen al circuito de control, ya que podrían provocar por interferencia electromagnética un funcionamiento anómalo del mismo. Un accionamiento eléctrico dispone también de elementos sensores o transductores que detectan la velocidad de giro, la corriente del motor, etc., lo cual es imprescindible tanto para la protección del convertidor como para un funcionamiento correcto del mismo, sobre todo cuando el equipo de control actúa como un sistema realimentado.

El accionamiento eléctrico completo mostrado en la Figura 7.57, que incluye la red, el convertidor con su equipo de control y sus entradas tanto de consigna como las que proceden de los sensores y el conjunto motor-carga, se puede considerar como un sistema integral. El punto de funcionamiento del motor puede variar si se producen cambios en alguno de los elementos del conjunto. Estos cambios o perturbaciones afectan al sistema completo, ya que todos los componentes están interconectados eléctrica o mecánicamente. Por ejemplo, la selección de las características más adecuadas de la red depende del tipo y potencia del motor que se quiera utilizar, o al contrario, hay que elegir el tipo de motor en función de las características de la red de alimentación.

El convertidor a utilizar debe tener muy en cuenta el comportamiento de la carga, pero también tiene influencia en su selección las limitaciones de la red eléctrica; por ejemplo, y de acuerdo con el Reglamento Electrotécnico de B.T., es posible que haya que limitar los efectos de las corrientes de arranque del motor del accionamiento, ya que éstas pueden provocar oscilaciones de tensión no admisibles por la compañía suministradora, aunque las puedan soportar el conjunto motor-carga. En algunos casos, el convertidor más adecuado técnica y económicamente, desde el punto de vista del accionamiento tiene que desecharse porque introduce demasiados armónicos en la red o porque trabaja con un factor de potencia demasiado pequeño.

7.10.2. Funcionamiento en cuatro cuadrantes

En las máquinas eléctricas, generalmente se expresa el par en función de la velocidad o el deslizamiento, y es por ello que la velocidad se considera como variable independiente y se representa en el eje de abscisas, mientras que el par es la variable dependiente y se lleva al eje de ordenadas. Sin embargo, en los accionamientos eléctricos el par se toma como variable independiente y por tanto se asigna al eje X, mientras que la velocidad es ahora la variable dependiente y se representa en el eje Y. La razón de este convenio es que cuando se selecciona un accionamiento, lo primero que debe conocerse es el par que requiere el motor para poder mover la carga, siendo un problema posterior el determinar la velocidad a que trabajará el conjunto.

Las características de un accionamiento pueden expresarse a través de un diagrama par-velocidad, cuyos límites se representan en un diagrama de cuatro cuadrantes, para incluir ambos signos del par y de la velocidad. Para comprender este tipo de representación conside-

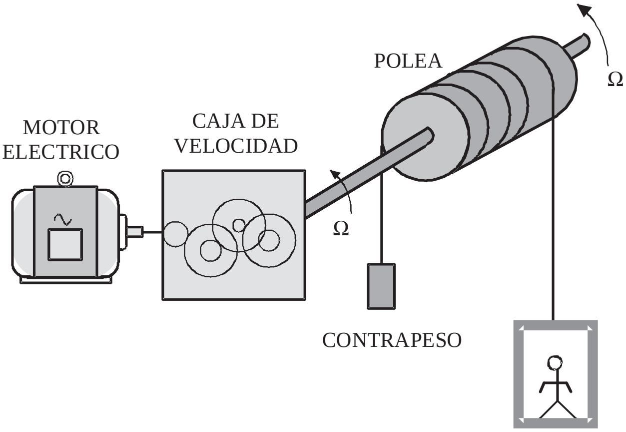


Figura 7.58. Accionamiento de un ascensor.

remos el esquema de la Figura 7.58, que representa el accionamiento de un ascensor. Se dispone de un motor que a través de una caja de engranajes reduce la velocidad para mover un torno o polea sobre el que se arrolla un cable que por una parte sujeta la cabina o caja del ascensor y por la otra lleva un contrapeso, que suponemos que ejerce una fuerza superior a la cabina vacía pero inferior al peso de la cabina cargada (en la práctica el contrapeso suele tener un peso mitad de la cabina cargada). La fuerza que debe ejercerse sobre el cable (en definitiva, el par necesario) para mover el ascensor puede tener un signo u otro dependiendo de los valores relativos de las masas del contrapeso y la cabina (llena o vacía) y del sentido del movimiento: subida o bajada. Como el ascensor debe subir o bajar, el accionamiento tiene que ser capaz de funcionar en todos los cuadrantes de un plano fuerza-velocidad de traslación de la cabina o, en definitiva, de un plano proporcional par-velocidad angular del motor. En la Figura 7.59 se muestra un diagrama de cuatro cuadrantes que servirá para explicar el funcionamiento del accionamiento.

En el primer cuadrante se supone que el ascensor está cargado y que está subiendo. El par motor T es positivo, ya que tiene el mismo sentido que el de la velocidad angular. El par resistente T_r actúa en sentido opuesto al de rotación y es negativo. La potencia mecánica desarrollada por la máquina, que es el producto del par motor T por la velocidad angular del mismo ω, tendrá signo positivo. *En este cuadrante I el accionamiento trabaja como motor en sentido directo o positivo.*

En el segundo cuadrante el ascensor sube, pero sin carga, movido por la acción del contrapeso, que al pesar más que la cabina vacía, tira de ella, y en estas condiciones la velocidad de subida puede alcanzar valores elevados y peligrosos. Para evitar esto, el par motor debe actuar en sentido opuesto al de rotación, lo que significa que su potencia mecánica $P = T\Omega$ es negativa. La máquina trabaja como freno desarrollando un par que se opone al movimiento frenando la carga. *Se dice que el cuadrante II representa el comportamiento del accionamiento en régimen de frenado en sentido directo.*

En el tercer cuadrante, el ascensor baja con la cabina vacía. El contrapeso evita el embalamiento de la cabina. Para que el ascensor baje, el par motor debe actuar en el mismo sentido que el movimiento. De este modo tanto el par como la velocidad son negativos, por lo que la potencia mecánica $P = T\Omega$ ejercida por el accionamiento tiene signo positivo.

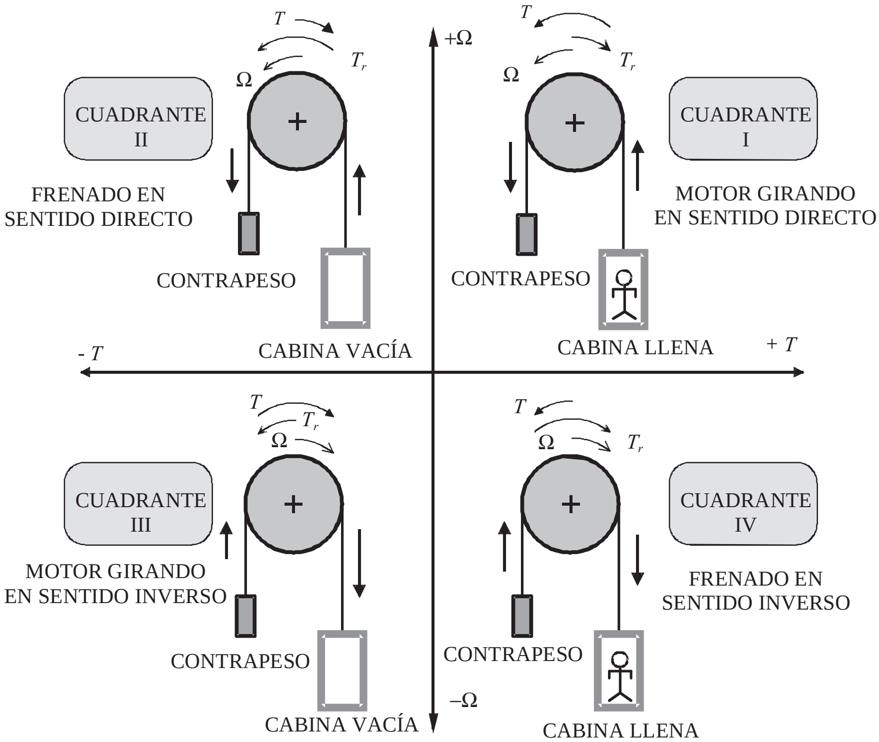


Figura 7.59. Funcionamiento en cuatro cuadrantes de un accionamiento eléctrico.

El cuadrante III representa el comportamiento del accionamiento girando como motor en sentido inverso.

En el cuarto cuadrante el ascensor está cargado. La cabina baja por su propio peso, sin necesidad del motor, pero la velocidad de caída podría alcanzar valores peligrosos. Por ello, la máquina eléctrica debe desarrollar un par que se oponga a la aceleración de la cabina. El motor actúa como freno, siendo el producto $T\Omega$ negativo. *El cuadrante IV representa el comportamiento del accionamiento como freno en sentido inverso.*

7.10.3. Dinámica de la combinación motor-carga. Estabilidad

Cuando se examinan los regímenes transitorios en los accionamientos eléctricos, se desprecia en primera aproximación los procesos electromagnéticos, ya que éstos se desarrollan más rápidamente que los procesos mecánicos. Si se denomina T el par electromagnético producido por el motor, T_r al par resistente que ofrece la carga, J al momento polar de inercia de las masas giratorias (motor + carga) y Ω la velocidad angular de rotación, la dinámica del cuerpo en rotación nos ofrece la ecuación de equilibrio de momentos:

$$T - T_r = J\frac{d\Omega}{dt} \tag{7.112}$$

que nos indica que el par de rotación desarrollado por el motor se equilibra con el par resistente y por el momento dinámico.

De la ecuación anterior se observa que:

1. Cuando $T > T_r \;\Rightarrow\; \dfrac{d\Omega}{dt} > 0$; es decir, tiene lugar la aceleración del motor.
2. Cuando $T < T_r \;\Rightarrow\; \dfrac{d\Omega}{dt} < 0$; lo que indica que el motor sufre una deceleración.
3. Cuando $T = T_r \;\Rightarrow\; \dfrac{d\Omega}{dt} = 0$; y en este caso el motor trabaja en régimen permanente en un estado de equilibrio.

De acuerdo con estas condiciones, es evidente que un accionamiento eléctrico alcanza un estado de equilibrio a una determinada velocidad, cuando se cumple la igualdad entre el par mecánico que ejerce el motor y el par resistente que ofrece la carga, es decir cuando $T = T_r$. Cuando se produce una perturbación en el sistema (por ejemplo, un cambio del par resistente que ofrece la carga), deja de cumplirse la igualdad anterior y el grupo motor-carga buscará un nuevo punto de trabajo para adaptarse a estas nuevas condiciones. Se dice que el sistema es estable, si al producirse una perturbación, se llega a alcanzar una nueva condición de equilibrio. En caso contrario, es decir, si la perturbación provoca un incremento continuado de la velocidad o una reducción de la misma hasta llegar a parar el accionamiento, se dice que el sistema es inestable, ya que es incapaz de alcanzar una velocidad de equilibrio.

Supóngase que el accionamiento se encuentra en una situación de equilibrio para un punto de funcionamiento específico para el cual se tiene un par motor T, un par resistente T_r y una velocidad de giro Ω. Entonces se cumplirá:

$$T = T_r \;\Rightarrow\; \frac{d\Omega}{dt} = 0, \text{ es decir: } \Omega = \text{cte.} \tag{7.113}$$

Al producirse una perturbación, es decir, una variación en la alimentación del motor, en la carga o en cualquier parte del accionamiento, se producirán cambios en los pares motor y resistente y también en la velocidad. Si se supone que estos cambios son pequeños y se designan, respectivamente, por ΔT, ΔT_r y $\Delta\Omega$ a partir del tiempo t contado desde que se produjo la perturbación, entonces la nueva condición de equilibrio vendrá expresada por:

$$J\left[\frac{d}{dt}(\Omega + \Delta\Omega)\right] = (T + \Delta T) - (T_r + \Delta T_r) \tag{7.114}$$

pero teniendo en cuenta la igualdad de (7.112) se obtiene:

$$J\frac{d\Delta\Omega}{dt} = \Delta T - \Delta T_r \tag{7.115}$$

La ecuación anterior representa la ecuación dinámica del accionamiento en función de sus desviaciones respecto a su punto de equilibrio o trabajo. Los incrementos anteriores, al ser pequeños, se pueden expresar como funciones lineales de las variaciones de velocidad, es decir:

$$\Delta T = \frac{dT}{d\Omega}\Delta\Omega \quad ; \quad \Delta T_r = \frac{dT_r}{d\Omega}\Delta\Omega \tag{7.116}$$

donde $dT/d\Omega$ y $dT_r/d\Omega$ representan, respectivamente, las derivadas de los pares motor y resistente en el punto de equilibrio, que son en definitiva las pendientes de las curvas $T = f(\Omega)$ y $T_r = \varphi(\Omega)$. Sustituyendo (7.116) en (7.115) se obtiene:

$$J\frac{d\Delta\Omega}{dt} = \frac{dT}{d\Omega}\Delta\Omega - \frac{dT_r}{d\Omega}\Delta\Omega \tag{7.117}$$

cuya solución es:

$$\Delta\Omega(t) = \Delta\Omega_0 \cdot e^{-\frac{1}{J}\left[\frac{dT_r}{d\Omega}-\frac{dT}{d\Omega}\right]t} \tag{7.118}$$

donde $\Delta\Omega_0$ es el valor inicial de la desviación de velocidad (es decir, para $t = 0$). Para que el sistema sea estable, es necesario que el término exponencial de la ecuación anterior tienda a cero conforme el tiempo tienda a infinito, de este modo el incremento de velocidad se anulará con el tiempo. En definitiva, lo que ocurrirá es que el motor volverá a su velocidad inicial, es decir, la que tenía en el punto de equilibrio previo. De este modo, para que el **sistema sea estable** deberá cumplirse la siguiente condición:

$$\frac{dT_r}{d\Omega} - \frac{dT}{d\Omega} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_r}{d\Omega} > \frac{dT}{d\Omega} \tag{7.119}$$

La ecuación anterior nos indica que el accionamiento será estable si al producirse una perturbación que aumente la velocidad del sistema, el nuevo par que ofrezca la carga T_r debe superar al par motor T; de este modo se produce una deceleración o frenado, haciendo que el grupo vuelva a alcanzar la velocidad de equilibrio que tenía anteriormente. De un modo análogo, si se produce una reducción en la velocidad del sistema, el nuevo par motor T debe ser mayor que el par resistente ofrecido por la carga T_r, y de este modo el sistema retorna a la velocidad estable.

Para comprender la relación (7.119), en la Figura 7.60 se muestra la característica par-velocidad de un motor asíncrono que mueve dos tipos de pares resistentes, uno de magnitud constante y otro que varía con el cuadrado de la velocidad (par ventilador). Para el par resistente 1, de valor constante, existen dos puntos de intersección con la curva del motor: *A* y *B*. Vamos a analizar la estabilidad permanente del punto *A*. Al producirse un aumento en la velocidad, se observa que el par de la carga se hace mayor que el par motor y esto provocará una deceleración del motor que devolverá la máquina a su punto de funcionamiento en *A*. De una forma similar, una reducción de velocidad hace que el par motor sea superior al par resistente, lo que provocará una aceleración del grupo que devolverá el sistema al punto de equilibrio *A*. Por consiguiente, *el punto A representa un punto de funcionamiento estable*. En el caso del punto *B*, si se produce un aumento de velocidad, el par motor se hace mayor que el par de carga, provocando una aceleración del motor y el punto de funcionamiento se alejará del punto *B* (el equilibrio se alcanzará en el punto *A*, si el par resistente no ha variado). Similarmente, una disminución de la velocidad hace que el par resistente sea mayor que el par motor, lo que provocará una deceleración y el punto de trabajo se alejará de *B*; de hecho, la máquina tenderá a pararse. Por ello, *el punto B es un punto de funcionamiento inestable*.

Vamos a analizar ahora el punto de equilibrio *C*, que se obtiene con el par resistente 2 y que es de tipo cuadrático. Si se aplican los razonamientos anteriores, podemos deducir que *C* es un punto de funcionamiento estable. Obsérvese que aunque los puntos *B* y *C* están dentro de la misma zona de trabajo de la curva par-velocidad del motor, tienen un comportamiento totalmente distinto, *ya que el punto C representa un funcionamiento estable*, mientras que el

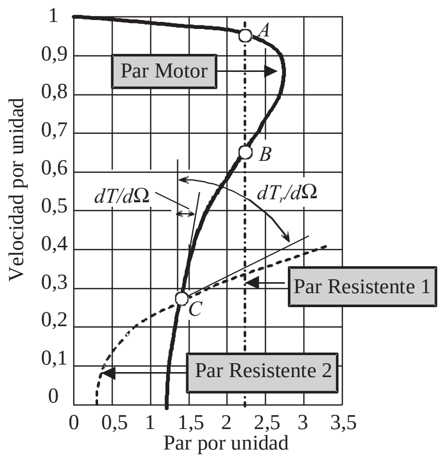


Figura 7.60. Curvas par-velocidad de diversas combinaciones motor-carga.

punto *B* no lo es. Esto demuestra que la estabilidad de un punto de equilibrio depende no solamente de la curva característica del motor sino también de la curva par-velocidad del par resistente o de carga. Obsérvese que los puntos *B* y *C* están situados en la zona del motor que tiene pendiente positiva y suele representar una región donde la mayoría de las cargas tienen un funcionamiento inestable, por lo que generalmente se denomina región de funcionamiento inestable.

7.11. ACCIONAMIENTOS ELÉCTRICOS CON MOTORES DE C.C.

7.11.1. Generalidades

La aplicación principal de los convertidores electrónicos descritos anteriormente en este capítulo es la regulación de velocidad de los motores eléctricos. Como quiera que históricamente los primeros motores que se utilizaron en los accionamientos eléctricos de velocidad variable fueron de corriente continua, este epígrafe se va a dedicar al control electrónico de este tipo de motores. Recuérdese del Capítulo 6 que el motor de c.c. está formado por un devanado inductor (excitación o campo) que está situado en el estátor y un inducido que está situado en el rotor y que dispone de un colector de delgas o conmutador, cuya representación simplificada se muestra en la Figura 7.61.

Las fórmulas fundamentales que gobiernan el comportamiento de los motores de c.c., y que ya se demostraron en el Capítulo 6, son:

Tensión aplicada al inducido: $V = E + R_i I_i$ (7.120*a*)

F.c.e.m.: $E = k_E n \Phi$ (7.120*b*)

Par electromagnético: $T = k_T \Phi I_i$ (7.120*c*)

Potencia mecánica: $P = T\Omega = EI_i$ (7.120*d*)

Curva de imanación lineal: $\Phi = k_I I_e$ (7.120*e*)

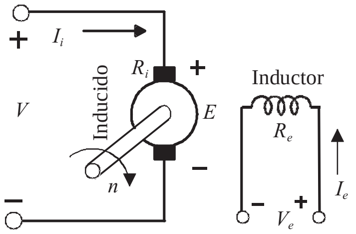


Figura 7.61. Partes constitutivas de un motor de c.c.

En las ecuaciones anteriores conviene hacer dos advertencias: *a*) se han supuesto despreciables las pérdidas en el hierro y mecánicas para que coincida la potencia electromagnética con la potencia mecánica; *b*) se ha supuesto el circuito magnético lineal y por ello existe proporcionalidad entre el flujo que producen los polos y la corriente de excitación. De acuerdo con las ecuaciones (7.120*a*) y (7.120*b*) se puede escribir:

$$n = \frac{E}{k_E \Phi} = \frac{V - R_i I_i}{k_E \Phi} \qquad (7.121)$$

lo que significa que la velocidad de un motor de c.c. se puede variar de los modos siguientes: *a*) regulando la tensión aplicada al inducido, que se denomina *control por tensión de inducido*; *b*) regulando el flujo magnético a través de la corriente aplicada al devanado inductor, y que se denomina *control por campo o excitación*. Debe tenerse en cuenta también que la corriente absorbida por el inducido I_i depende directamente del par electromagnético desarrollado por el motor.

La velocidad que corresponde a los valores nominales de tensión, corriente de excitación y corriente de inducido se denomina *velocidad base*; de este modo, y tal como se describió en el epígrafe 6.9.1 del capítulo anterior al estudiar el sistema de regulación electromecánico Ward Leonard, en la práctica la regulación de velocidad por debajo de la velocidad base se realiza manteniendo constante la corriente de campo I_e (y la corriente I_i adaptada al par resistente) y variando la tensión aplicada al inducido V, mientras que la regulación de velocidad por encima de la velocidad base se hace manteniendo la tensión V en su valor nominal y reduciendo I_e por debajo de su valor nominal.

En la Figura 7.62 se muestran las curvas obtenidas, que dan lugar a dos regiones. En la región 1, que cubre el rango entre la velocidad cero y la velocidad base o nominal, la regula-

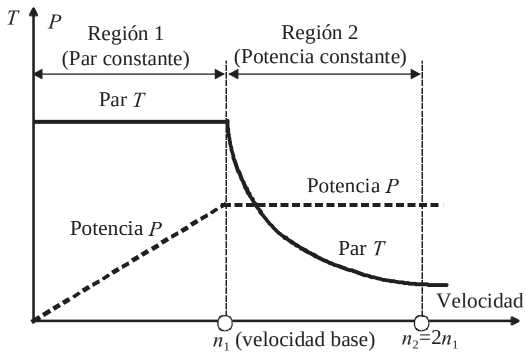


Figura 7.62. Regiones de regulación de velocidad de un motor de c.c.

ción se hace *por control de la tensión aplicada al inducido*, el motor trabaja a par constante y la potencia absorbida de la red es proporcional a la velocidad. En la región 2, que cubre el rango entre la velocidad base y una velocidad máxima que suele ser doble que la nominal, la regulación se realiza *por control de la corriente de excitación del inductor*; en esta zona la máquina trabaja a potencia constante mientras que el par se va reduciendo conforme aumenta la velocidad, al ser $P = T\Omega$ = constante, y es evidente que la rama correspondiente al par sigue la ecuación de una hipérbola y de ahí la forma que se muestra en la Figura 7.62. Los tipos de convertidores electrónicos que se utilizan para realizar las regulaciones anteriores, que representan en cierto modo convertidores estáticos Ward Leonard, dependen del tipo de red existente. Si la red de alimentación es de c.a. se necesitarán rectificadores controlados para transformar la c.a. de la red en c.c. de amplitud variable que se utilizará para alimentar el inducido o el inductor de los motores de c.c. Sin embargo, si la red de alimentación es de c.c., se deberán usar choppers o recortadores para transformar la tensión de c.c. de alimentación de amplitud constante (producida en la práctica por rectificadores fijos) en tensión de c.c. de amplitud variable.

7.11.2. Regulación de la velocidad de motores de c.c. por medio de rectificadores controlados

En la Figura 7.63 se representa de un modo simplificado el esquema correspondiente que utiliza rectificadores controlados para alimentar el inducido o el inductor o ambos a la vez. La red de c.a. puede ser monofásica o trifásica, por lo que los convertidores electrónicos serán, respectivamente, mono o trifásicos. Generalmente el uso de redes monofásicas se restringe a motores cuyas potencias nominales no superen 5 kW; para potencias mayores se recurre siempre a redes trifásicas para la alimentación del sistema convertidor, ya que se consigue un mejor equilibrado de las fases.

Como ya se indicó en el estudio de los convertidores electrónicos en forma de rectificadores controlados, si todos los dispositivos de conmutación son tiristores, el convertidor se denomina completo. En el caso de que la mitad de ellos sean tiristores y la otra mitad diodos, entonces se trata de semiconvertidores. Recuérdese que el retraso en el encendido de los tiristores determina el valor medio de la tensión de salida del convertidor de acuerdo con las expresiones siguientes:

Convertidor monofásico: $$V_{cc} = \frac{2V_m}{\pi}\cos\alpha \qquad (7.122a)$$

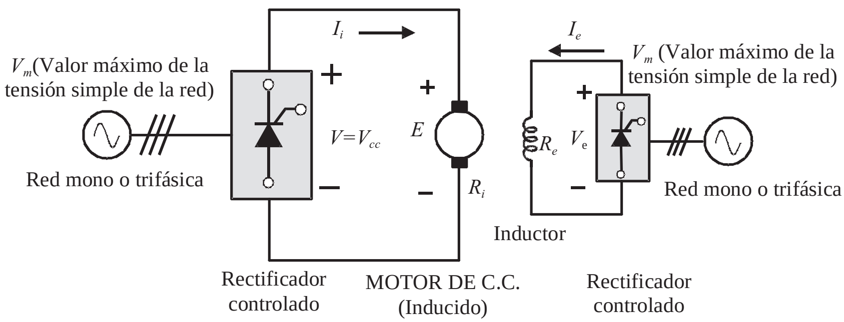


Figura 7.63. Regulación de velocidad de motores de c.c. con rectificadores controlados.

Semiconvertidor monofásico: $$V_{cc} = \frac{V_m}{\pi}(1 + \cos \alpha) \qquad (7.122b)$$

Convertidor trifásico: $$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi}\cos \alpha \qquad (7.122c)$$

Semiconvertidor trifásico: $$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{2\pi}(1 + \cos \alpha) \qquad (7.122d)$$

Que corresponden, respectivamente, a las expresiones ya demostradas en (7.47), (7.62), (7.64) y (7.71). En estas ecuaciones V_m es el valor máximo de la tensión de la red en el caso de que se trate de sistemas monofásicos y representa la tensión máxima de la tensión simple o de fase de la red en el caso de que se trate de sistemas trifásicos. Recuérdese asimismo que las expresiones anteriores solamente son válidas si la conducción de los tiristores es continua, lo que se produce siempre que la inductancia correspondiente de la máquina sea elevada; en caso contrario lo más conveniente es añadir una gran inductancia en serie con el circuito. En la Figura 7.64 se muestra de un modo gráfico las relaciones anteriores; dependiendo de que se trate de un convertidor completo o un semiconvertidor. El valor máximo de la tensión de salida V_{cc0} (que es el valor que resulta para un ángulo de disparo $\alpha = 0$) vale $2V_m/\pi$ o $(3\sqrt{3})V_m/\pi$, por lo que las expresiones anteriores obedecen las siguientes expresiones generales:

Convertidores: $$V_{cc} = V_{cc0}\cos \alpha \qquad (7.123a)$$

Semiconvertidores: $$V_{cc} = V_{cc0}(1 + \cos \alpha) \qquad (7.123b)$$

Conviene destacar al ver la Figura 7.64 que siempre que se utilicen convertidores completos, la tensión media resultante que producen tiene valores positivos para ángulos de encendido $0° < \alpha < 90°$ y valores negativos para $180° < \alpha < 360°$. Sin embargo, los semiconvertidores solamente dan una tensión media de c.c. de polaridad constante y generalmente requieren el uso de un diodo de libre circulación para retornar la energía inductiva del circuito a la red. En definitiva, en el caso de convertidores completos la tensión de salida puede variar entre $+V_{cc0}$ y $-V_{cc0}$, mientras que en el caso de los semiconvertidores la tensión de salida varía solamente entre 0 y V_{cc0}. Como quiera que para conseguir un control integral de un motor de c.c. conviene disponer de ambas polaridades de alimentación a la máquina, en lo que sigue se supondrá que se trabaja siempre con convertidores completos.

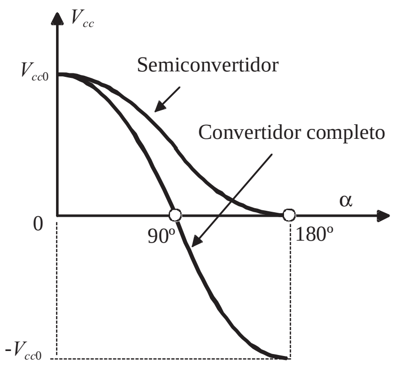


Figura 7.64. Tensión de salida de un convertidor en función del ángulo de encendido.

En el caso de que se *trabaje a par constante* (región 1 de la Fig. 7.62), el convertidor que alimenta al inducido, sea monofásico o trifásico, dispondrá de una tensión de salida que según (7.123a) es de la forma:

$$V_{cc} = V_{cc0} \cos \alpha \tag{7.124}$$

ahora bien, de acuerdo con (7.121) se tiene:

$$n = \frac{E}{k_E \Phi} = \frac{V - R_i I_i}{k_E \Phi} \tag{7.125}$$

En la expresión anterior, la tensión aplicada al motor V es igual a la tensión producida por el convertidor, es decir, $V = V_{cc}$. Despejando la corriente de inducido en función del par de la ecuación (7.120*c*) resulta:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{k_E \Phi} = \frac{1}{k_E \Phi}\left(V - R_i \frac{T}{k_T \Phi}\right) \tag{7.126}$$

y al sustituir (7.124) en (7.126) se obtiene:

$$n = \frac{V - R_i I_i}{k_E \Phi} = \frac{1}{k_E \Phi}\left(V_{cc0} \cos \alpha - R_i \frac{T}{k_T \Phi}\right) \tag{7.127}$$

Al ser el par T electromagnético constante en esta región, es evidente que la velocidad n del rotor del motor de c.c. depende del ángulo de encendido, de tal modo que conforme α aumenta la velocidad decrece, y a la inversa, al disminuir α la velocidad aumenta, que corresponde en cada caso a una reducción o elevación de la tensión V aplicada al inducido del motor.

En el caso de que el motor *trabaje a potencia constante* (región 2 de la Fig. 7.62), el convertidor que alimenta al inducido, sea monofásico o trifásico, se regula para que suministre la tensión nominal a la máquina. El inductor tiene que estar alimentado por un rectificador controlado para poder reducir la corriente de excitación. Como quiera que la corriente del inducido es constante (adaptada al valor de la carga mecánica), el mantener la potencia mecánica P constante significa que:

$$P = EI_i \quad \Rightarrow \quad E = \text{constante} = k_E n \Phi \tag{7.128}$$

y si se supone que el circuito magnético es lineal, al sustituir el flujo magnético de la ecuación (7.120*e*) en la ecuación anterior, resulta:

$$P = EI_i = k_E n \Phi I_i = k_E n k_I I_e I_i \quad \Rightarrow \quad n = \frac{P}{k_E k_I I_e I_i} \tag{7.129}$$

y teniendo en cuenta que en el inductor se cumple en régimen permanente que $I_e = V_e / R_e$, siendo V_e la tensión aplicada al inductor que se extrae de la salida de un convertidor completo, por lo que la ecuación anterior se transforma finalmente en:

$$n = \frac{PR_e}{k_E k_I I_i V_e} = \frac{PR_e}{k_E k_I I_i} \frac{1}{V_{cc0} \cos \alpha} \tag{7.130}$$

Es evidente entonces que al aumentar el ángulo de encendido del convertidor que alimenta al circuito de excitación se incrementa la velocidad del motor en la región correspondiente a potencia de la máquina constante. En cualquier caso, esta doble regulación de

par y de potencia con este sistema de control solamente permite que *el sistema trabaje en un único cuadrante.*

Para que la máquina *trabaje en dos cuadrantes* es preciso utilizar un convertidor doble o dual cuyos circuitos responden a los esquemas ya estudiados en las Figura 7.33 y 7.39; en ambos casos los ángulos de encendido de los convertidores deben estar relacionados por la ecuación (7.62). Se puede lograr también un funcionamiento en dos cuadrantes con un único convertidor completo empleando el esquema de la Figura 7.65. No se ha dibujado la alimentación del inductor que produce un flujo inductor constante, por lo que la tensión V_e es fija en ambas figuras (es decir, se supone un funcionamiento a par constante). En el caso *a*) el rectificador controlado que alimenta al inducido tiene un ángulo de encendido que varía en el rango $0° < \alpha < 90°$, por lo que la polaridad de la tensión es la mostrada y es superior en cada momento a la f.c.e.m. del motor, y por ello la potencia eléctrica que absorbe el motor es positiva, transformándose la energía eléctrica en mecánica. Para poder invertir el sentido de transferencia de la energía, al no poder cambiar el sentido de la corriente en el inducido debido a que el rectificador solamente conduce en un solo sentido, la única alternativa posible es invertir tanto los signos de V como de la f.c.e.m. E, de tal modo que además se cumpla que $|E| > |V|$, como se muestra en la Figura 7.65*b*.

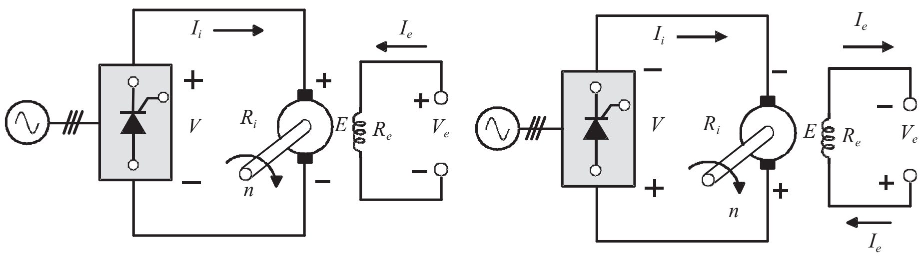
Para invertir la salida del rectificador es preciso que el ángulo de encendido varíe en el rango $180° < \alpha < 360°$, y en esta situación el rectificador trabaja como inversor conmutado por la red o por línea. La inversión de la f.c.e.m. E puede lograrse de varias formas:

a) Que la carga mecánica que mueve el motor de c.c. provoque en el rotor un movimiento en sentido inverso (es decir, que trabaje en el cuadrante IV de la Fig. 7.59).

b) Que se invierta la corriente en el circuito de excitación girando el motor en sentido directo, lo que se logra de una forma automática si el inductor se alimenta con un rectificador controlado haciendo que el convertidor funcione con ángulos de encendido comprendidos entre 90° y 180°, o si el rectificador es fijo o no controlado, conmutando los dos terminales entre sí del inductor respecto a la alimentación de su rectificador. (También se pueden invertir los terminales del inducido, pero no es conveniente abrir este circuito por la gran corriente que lleva.)

En ambos casos se logrará una inversión en el sentido de transferencia de la energía siempre que además se cumpla la condición $|E| > |V|$ y la máquina devolverá energía eléctrica a la red, lo que provocará su frenado regenerativo o por acumulación de energía.

Es indudable que el funcionamiento en cuatro cuadrantes requerirá el uso de dos convertidores para el inducido y dos para el inductor. Cada uno de ellos responderá al esquema de la Figura 7.63: uno de ellos tendrá los tiristores como se señala en esa figura y el otro tendrá los



a) $0° < \alpha < 90°$; $V > E$: Motor *b*) $180° < \alpha < 360°$; $E > V$; Frenado regenerativo

Figura 7.65. Funcionamiento en dos cuadrantes de un motor de c.c.

tiristores en posición o polaridad contraria. De este modo, con un grupo la máquina podrá funcionar en los cuadrantes I y IV y con el otro en los cuadrantes II y III.

Ejemplo de aplicación 7.12

Un motor de c.c. con excitación independiente de 20 kW, 500 V, 1.000 r.p.m. dispone de dos convertidores electrónicos trifásicos en puente completo controlados por fase para regular su velocidad, uno para alimentar el inducido y otro para el inductor, con un esquema similar al mostrado en la Figura 7.63. La red trifásica tiene una tensión de línea de 380 V, 50 Hz. La resistencia del inducido es $R_i = 0{,}2\ \Omega$ y la resistencia del inductor es $R_e = 150\ \Omega$. Se supone que el circuito magnético es lineal, de tal modo que la constante producto será $k_T k_I = 1{,}1$ V/A-rad/s. La máquina trabaja en régimen de conducción continua y el rizado de la corriente es despreciable. a) Si el devanado de excitación trabaja con máxima corriente desarrollando un par de 150 N.m a 1.000 r.p.m., calcular el ángulo de encendido α_i del convertidor del inducido; b) si el devanado inductor sigue trabajando con corriente máxima y mueve la misma carga anterior, que tiene un par de 150 N.m, y se ajusta el ángulo de encendido del inducido en el valor $\alpha_i = 0$, ¿cuál será la velocidad a la que girará el motor?; c) para el caso anterior, determinar el ángulo de encendido α_e del convertidor que alimenta el circuito de excitación si se desea elevar la velocidad al doble de la nominal, es decir, a 2.000 r.p.m.

Solución

a) La tensión eficaz de fase de la red vale:

$$V_f = \frac{380}{\sqrt{3}} = 219{,}39 \text{ voltios}$$

que corresponde a un valor máximo: $V_m = \sqrt{2} \cdot 219{,}39 = 310{,}27$ voltios.

La tensión media suministrada por el circuito de excitación es máxima cuando el ángulo de encendido es de 0°, por lo que, de acuerdo con (7.122*c*), se tiene:

$$V_e = V_{cc0} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} = \frac{3(\sqrt{3} \cdot 310{,}27)}{\pi} = 513{,}18 \text{ voltios}$$

por lo que la corriente máxima de excitación valdrá:

$$I_e = \frac{V_e}{R_e} = \frac{513{,}18}{150} = 3{,}42 \text{ amperios}$$

El par electromagnético, teniendo en cuenta (7.120*c*) y (7.120*e*), se puede expresar así:

$$T = k_T \cdot \Phi \cdot I_i = k_T \cdot k_I \cdot I_e \cdot I_i$$

Pero al ser el par igual a 150 N.m, la constante producto $k_T \cdot k_I = 1{,}1$ y la corriente de excitación máxima igual a 3,42 A, de la ecuación anterior resulta:

$$I_i = \frac{150}{1{,}1 \cdot 3{,}42} = 39{,}87 \text{ amperios}$$

La f.c.e.m. del motor, teniendo en cuenta (7.120*c*), (7.120*d*), y (7.120*e*), es igual a:

$$E = \frac{T\Omega}{I_i} = k_T \Phi \Omega = k_T k_I I_e \Omega$$

de donde se deduce:

$$E = 1{,}1 \cdot 3{,}42 \cdot 2\pi \frac{1.000}{60} = 393{,}96 \text{ voltios}$$

De este modo la tensión necesaria para alimentar el inducido será:

$$V = E + R_i I_i = 393{,}96 + 0{,}2 \cdot 39{,}87 = 401{,}93 \text{ voltios}$$

y de (7.122*c*) se deduce:

$$401{,}93 = V_{cc0} \cos \alpha_i = 513{,}18 \cos \alpha_i \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha_i = 0{,}783 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 38{,}44°$$

b) Si $\alpha_i = 0$, en el convertidor del inducido se obtiene la siguiente tensión:

$$V = V_{cc0} = 513{,}18 \text{ voltios}$$

que da lugar a una f.c.e.m.:

$$E = V - R_i I_i = 513{,}18 - 0{,}2 \cdot 39{,}87 = 505{,}21 \text{ voltios}$$

de donde se deduce:

$$E = (k_T k_I) I_e \Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega = \frac{E}{(k_T k_I) I_e} = \frac{505{,}21}{1{,}1 \cdot 3{,}42} = 134{,}29 \text{ rad/s}$$

es decir:

$$\Omega = 2\pi \frac{n}{60} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{60 \cdot 134{,}29}{2\pi} = 1.282{,}4 \text{ r.p.m.}$$

c) La f.c.e.m. será la misma que en el caso anterior, es decir, 505,21 voltios, por lo que se tiene:

$$E = (k_T k_I) I_e \Omega \quad \Rightarrow \quad 505{,}21 = 1{,}1 \cdot I_e \cdot 2\pi \frac{2.000}{60} \quad \Rightarrow \quad I_e = 2{,}19 \text{ amperios}$$

lo que requiere una tensión en el inductor:

$$V_e = R_e I_e = 150 \cdot 2{,}19 = 328{,}94 \text{ voltios}$$

de donde se deduce:

$$328{,}94 = V_{cc0} \cos \alpha_e = 513{,}18 \cos \alpha_e \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha_e = 0{,}641 \quad \Rightarrow \quad \alpha_e = 50{,}13°$$

7.11.3. Regulación de la velocidad de motores de c.c. por medio de *choppers*

Como ya se ha señalado, los *choppers* son convertidores electrónicos que transforman una tensión de c.c. de magnitud fija en c.c. de magnitud variable, por lo que son útiles en la regulación de motores eléctricos de c.c. Un ejemplo clásico de ello es la tracción eléctrica. Los trenes eléctricos, trolebuses y tranvías han funcionado y en muchos casos siguen funcionando con una alimentación de c.c. y empleando motores con excitación serie debido a las grandes ventajas que ofrecen éstos por su alto par de arranque. Así, en España los trenes metropolitanos funcionan a una tensión comprendida entre los 600 V y 1.500 V, los ferrocarriles de vía estrecha funcionaban a 1.500 V de c.c. (en la actualidad 3.000 V) y los trenes eléctricos de vía normal disponen de 3.000 V de c.c., que es la tensión normalizada en RENFE. Hasta hace unos años la regulación de velocidad se lograba con la incorporación de reóstatos de arranque y reóstatos de regulación, con los grandes inconvenientes de las pérdidas que se producían por efecto Joule. Para simplificar el trabajo del conductor estos reóstatos se agrupaban en un combinador (*controller*), que era un tambor que disponía de una serie de contactos unidos a las resistencias de arranque y regulación para que las maniobras se hicieran en el orden correcto, lo que evitaba combinaciones prohibidas. Estos combinadores era frecuente

verlos en los tranvías y trolebuses, hoy ya desaparecidos pero que aún se encuentran en muchos países europeos. Los convertidores electrónicos han sustituido a estos clásicos reóstatos, permitiendo la regulación de velocidad con elevados rendimientos. Una aplicación más moderna de los choppers está en el control del arranque y regulación de velocidad de prototipos de vehículos eléctricos terrestres como automóviles y autobuses, evitando la contaminación ambiental que producen los motores de combustión interna; en estos casos la fuente de alimentación es una batería de acumuladores eléctricos que a través de choppers alimenta el motor de c.c. del vehículo. Los choppers tienen grandes ventajas, como alto rendimiento, control flexible, peso ligero, tamaño pequeño, respuesta rápida, y siendo posible también el funcionamiento en varios cuadrantes.

En la Figura 7.66 se muestra un *chopper de dos cuadrantes* que es repetición del esquema de la Figura 7.46. En este chopper, los interruptores estáticos $S1$ y $S2$ se cierran o encienden alternativamente. Cuando la corriente que alimenta el motor tiene el sentido positivo mostrado en la Figura 7.66, la corriente de alimentación de la fuente V_s pasa a través de $S1$ retornando la energía inductiva por el diodo $D1$. Se dice entonces que el *chopper es directo o reductor* y el motor funciona en el primer cuadrante. Cuando la corriente i_0 tiene sentido contrario, la corriente circula por el interruptor estático $S2$ y el diodo $D2$, se dice entonces que *el chopper es inverso o elevador* y el motor devuelve energía a la red trabajando en el segundo cuadrante. Recuérdese de la expresión (7.95) que los valores medios de la tensión y la corriente suministrada por el *chopper* son los señalados a continuación:

$$V_{cc} = \frac{t_{ON}}{T} V_s = kV_s \quad ; \quad I_{cc} = \frac{V_{cc} - E}{R} \tag{7.131}$$

donde t_{ON} representa el tiempo de cierre del interruptor estático $S1$, mientras que el tiempo $T - t_{ON}$, es decir, el resto del ciclo, corresponde al tiempo de cierre del interruptor estático $S2$. El parámetro $k = t_{ON}/T$ es el denominado *ciclo de trabajo* del chopper. Como consecuencia de ello, si el *chopper* tiene frecuencia constante (es decir, T constante), al variar el tiempo t_{ON} se puede regular la tensión media que suministra al motor de c.c., o en definitiva, la velocidad de la máquina. Se pueden utilizar también en el control de motores de c.c. choppers de cuatro cuadrantes como el indicado en la Figura 7.47. Recuérdese que los interruptores estáticos del chopper pueden ser GTO, IGBT y también transistores MOSFET.

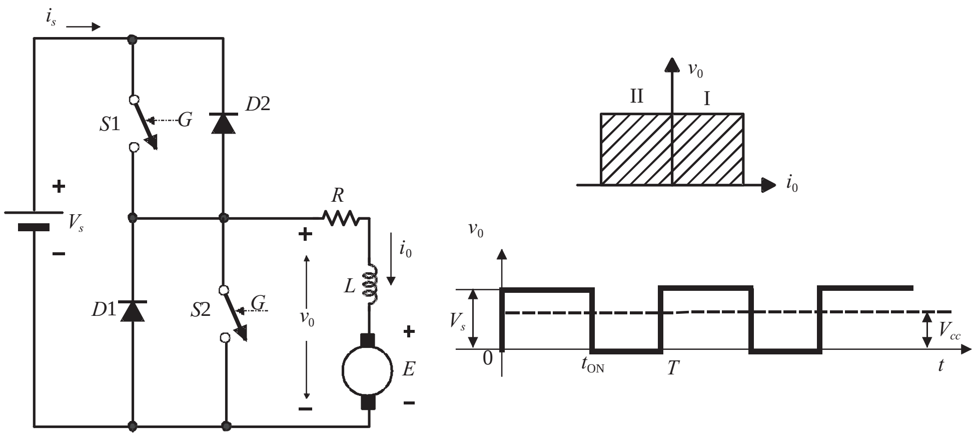


Figura 7.66. *Chopper* de dos cuadrantes.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Aplicación de los choppers a la tracción eléctrica española

1. RENFE

En la Figura 7.67 se muestra de un modo simplificado el esquema eléctrico de un coche motor de la unidad de tren S/446 de Renfe para cercanías como ejemplo de un sistema de tracción eléctrica que utiliza choppers. Este tren se ajusta a la composición Mc-T-Mc (Mc: coche motor con cabina, T: coche remolque), es decir, tiene dos coches motores y un remolque. La catenaria tiene una tensión de 3.000 V respecto al carril (en algunos países se emplea una alimentación por tercer carril). En cada boje (o bogie) del coche motor existen dos motores de c.c. de 4 polos de 300 kW de potencia, y como hay dos bojes en cada coche motor, se tiene una potencia total de 1.200 kW. El tren tiene dos coches motores, por lo que la potencia total instalada en motores eléctricos en estas unidades de tren es de 2.400 kW.

El chopper de tracción tiene una frecuencia nominal de 300 Hz (aunque funciona en los saltos de 75-150 y 300 Hz) para tener en cuenta las condiciones de arranque. El sistema incorpora también un chopper de frenado a 600 Hz que introduce una resistencia eléctrica para disipación de energía reostática y un filtro a la entrada del pantógrafo para eliminar lo más posible los armónicos de red, que consiste en una inductancia de núcleo de aire de 17 mH y un condensador de 600 μF. Este tren tiene un esfuerzo de tracción medio de 127,8 kilonewtons (kN) y está diseñado para velocidades máximas de solamente 100 km/h. La aceleración en recta y horizontal es de 0,75 m/s^2 (0 a 60 km/h) y de 0,55 m/s^2 (0 a 100 km/h). La deceleración máxima de servicio es de 0,7 m/s^2 solamente con freno eléctrico y de 1 m/s^2 (con freno combinado).

2. Metropolitano de Madrid

La serie 5.500 del Metro de Madrid se alimenta por una catenaria de 600 V de c.c. (+20-30 por 100) con motores de tracción (1/boje) AEG-ABS 3324, con una potencia continua de 211 kW (a 1.900 r.p.m.) y una potencia unihoraria de 235 kW (a 1.825 r.p.m.). El chopper de tracción es del tipo AEG-1.200 A, con frecuencia nominal o asignada de 250 Hz. El filtro de red está formado por una inductancia L = 2 mH y un condensador C = 30 μF. El freno eléctrico es de recuperación y está combinado con frenado reostático. La velocidad máxima del tren es de 70 km/h, con una aceleración-deceleración de 1,05 m/s^2.

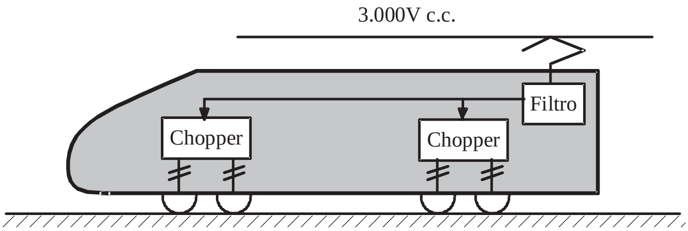


Figura 7.67. Esquema eléctrico de un coche motor de tren equipado con *choppers*.

Ejemplo de aplicación 7.13

Un motor de c.c. con excitación independiente de 600 V, 1.500 r.p.m., 200 A, tiene una resistencia de inducido R_i = 0,2 Ω. Este motor está controlado por un chopper de 600 V, 400 Hz. a) Calcular la velocidad del motor para un ciclo de trabajo k = 0,5 y un par resistente mitad del nominal; b) ¿cuál será la velocidad del motor cuando funcione en régimen de frenado regenerativo con k = 0,5 y moviendo una carga con par nominal? NOTA: El flujo magnético del inductor se mantiene constante y la inductancia del inducido es lo suficientemente elevada para considerar plana la corriente absorbida por el motor.

Solución

a) En condiciones nominales, la tensión aplicada al motor es de 600 V y la corriente del inducido 200 A, por lo que la f.c.e.m. del motor vale: $E_1 = V_s - RI_{cc} = 600 - 0{,}15 \cdot 200 = 570$ voltios. Si el par resistente es mitad del nominal, la corriente absorbida será también mitad de la nominal, es decir, de 100 A, y como además el ciclo de trabajo es igual a 0,5, de las ecuaciones (7.131) se deduce:

$$E_2 = kV_s - RI_{cc} = 0{,}5 \cdot 600 - 0{,}15 \cdot 100 = 285 \text{ voltios}$$

pero teniendo en cuenta que la f.c.e.m. del motor viene expresada por $E = k_E \Phi n$, es decir, la f.c.e.m. es directamente proporcional a la velocidad en las condiciones de flujo constante. Como quiera que la velocidad nominal es de 1.500 r.p.m., se tendrá:

$$E_1 = k_E \cdot \Phi \cdot n_1 \quad \Rightarrow \quad 570 = k_E \cdot \Phi \cdot 1.500 \quad ; \quad E_2 = k_E \cdot \Phi \cdot n_2 \quad \Rightarrow \quad 285 = k_E \cdot \Phi \cdot n_2$$

es decir:

$$\frac{570}{285} = \frac{1.500}{n_1} \quad \Rightarrow \quad n_2 = 750 \text{ r.p.m.}$$

b) En la situación de frenado la corriente tendrá signo negativo; si además mueve un par nominal, la corriente entregada por el motor al chopper y de ahí a la red será de 200 A. Como el ciclo de trabajo es de 0,5, la f.c.e.m. del motor en esta situación será:

$$E_3 = kV_s - RI_{cc} = 0{,}5 \cdot 600 - 0{,}15 \cdot (-200) = 330 \text{ voltios}$$

y por consiguiente, al comparar con los datos nominales, se tendrá:

$$\frac{570}{330} = \frac{1.500}{n_3} \quad \Rightarrow \quad n_3 = 868{,}42 \text{ r.p.m.}$$

*7.11.4. Regulación de motores de c.c. mediante realimentación

En los epígrafes anteriores se ha analizado la regulación de velocidad de los motores de c.c. utilizando tanto rectificadores controlados como choppers. En ambos casos la configuración empleada se conoce en la ingeniería de control como sistemas de lazo abierto (*open loop* en inglés). En los sistemas de lazo abierto se comprueba que cuando varían las condiciones de trabajo de la máquina, también cambia la respuesta de la misma, y de este modo, si por ejemplo se producen cambios en el par resistente aplicado al motor, aparecen también cambios en la velocidad de giro. Este comportamiento, que en muchos accionamientos no tiene demasiada importancia, en otros es inadmisible, ya que repercute en el proceso de fabricación que mueve el accionamiento.

Se puede conseguir una mayor estabilidad de la velocidad del motor y de la respuesta dinámica que tiene el mismo, utilizando las técnicas de los sistemas realimentados (*feedback* en inglés) o de lazo cerrado (*closed loop*). Un motor de c.c. con realimentación tiene, como se indica en el diagrama de bloques de la Figura 7.68, una entrada de referencia o de consigna n^* y dispone en el eje motor-carga de

un tacogenerador (o simplemente tacómetro eléctrico) que detecta la velocidad real de la máquina *n*. El funcionamiento del sistema es tal que aunque se produzcan cambios en el par resistente que ofrece la carga, la velocidad del motor se ajustará rápidamente al valor de consigna asignado. Para simplificar el circuito se ha supuesto que la máquina se alimenta con excitación constante a través de un rectificador monofásico, por lo que la regulación de velocidad se consigue mediante la variación de la tensión de c.c. aplicada al inducido, que procede de un convertidor electrónico, que en el caso de que esté alimentado por una red trifásica será un rectificador controlado, o cuando la red sea de c.c., que será un chopper. El tacogenerador es una dinamo de imán permanente que produce una f.e.m. proporcional a la velocidad y que tiene salidas típicas del orden de 10 V cada 1.000 r.p.m.; la tensión del tacómetro es, por consiguiente, proporcional a la velocidad de giro de la máquina, y como quiera que a bajas velocidades esta tensión tiene mucho rizado, se alisa su salida por medio de un filtro adecuado. En la Figura 7.68 se ha denominado *n* a la salida del tacómetro (realmente es una tensión proporcional a la velocidad del motor).

El funcionamiento del circuito es el siguiente: la salida del tacómetro *n* se compara con la señal de referencia n^* en el nudo restador, mostrado en la parte superior izquierda de la Figura 7.68. La salida de este nudo es una tensión de error de velocidad $e_n = n^* - n$, que se aplica a un *regulador de velocidad*, que suele ser del tipo proporcional-integral (PI) y cuya misión es estabilizar el comportamiento del motor o en general del accionamiento, mejorando la respuesta transitoria y reduciendo el error de velocidad a cero por efecto de la acción integral. La tensión de salida del regulador de velocidad V_c se lleva a un circuito generador de impulsos de disparo que modifica el ángulo de encendido α de los componentes activos (tiristores, GTO, etc.) del convertidor.

Si se parte de una situación estacionaria o de régimen permanente en la que el motor está girando a la velocidad de consigna n^*, al aumentar el par resistente del motor se producirá una reducción de su

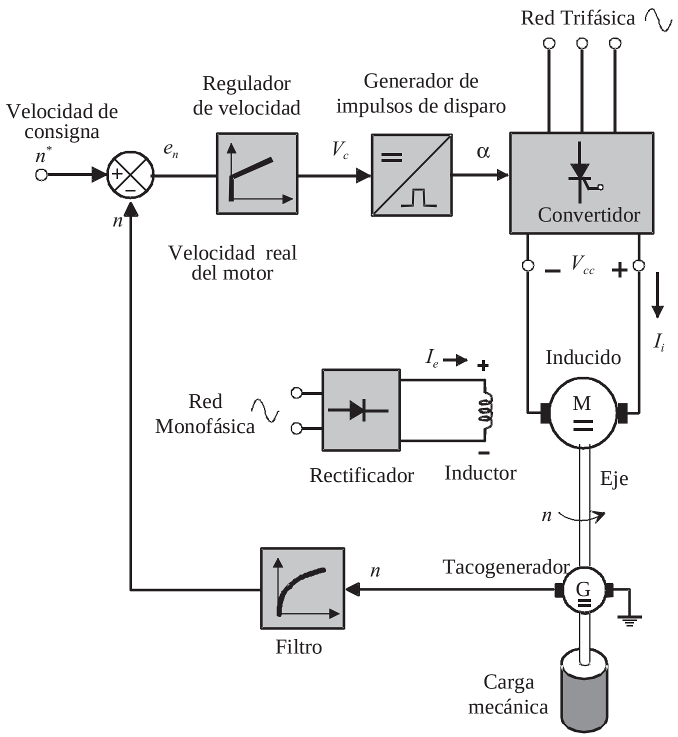


Figura 7.68. Control de la velocidad de un motor de c.c. con realimentación de velocidad.

velocidad de giro, que llegará a tener un valor n, lo que da lugar a una señal de error de velocidad e_n tanto más elevada cuanto menor sea la velocidad de la máquina n respecto a la de referencia n^*. La salida del regulador de corriente V_c aumenta y como consecuencia de ello se reduce el ángulo de encendido α que produce el generador de impulsos (en el caso de que se trate de un convertidor constituido por rectificadores controlados), o actúa aumentando el ciclo de trabajo (*duty cycle*) en el caso de que el convertidor sea un chopper. Como consecuencia de ello aumenta la tensión de salida V_{cc} del convertidor que alimenta el inducido del motor de c.c., lo que eleva la corriente del inducido I_i provocando un aumento del par electromagnético producido por el motor, haciendo que se eleve su velocidad de giro hasta conseguir anular el error de velocidad, logrando que la velocidad real de la máquina n coincida con la velocidad de consigna o referencia n^*. En esta situación se habrá alcanzado una condición de equilibrio, al haber conseguido reducir el error de velocidad a cero para el nuevo ángulo de conducción de los tiristores.

El sistema de control analizado de la Figura 7.68, aunque es muy simplificado, sirve para conocer las ventajas del control realimentado, que permite mejorar el comportamiento transitorio de la máquina con una gran precisión y una alta estabilidad de funcionamiento. El problema de este circuito es que no tiene protección de sobrecorriente; es decir, cuando se produce un aumento del par resistente, sobre todo si éste es brusco (operación de arranque, frenado, etc.), se produce un aumento de la tensión de salida del convertidor que se aplica al inducido, pero teniendo en cuenta que tanto la inductancia del mismo L_i como su resistencia R_i son de pequeño valor e incluso también su cociente, que define la constante de tiempo $\tau = L_i/R_i$, la variación de la corriente de inducido con el tiempo puede incluir transitorios con valores de pico peligrosos para la vida de los tiristores del convertidor. Es por ello conveniente ampliar el esquema de la Figura 7.68 introduciendo un lazo de realimentación de corriente que limite la intensidad del inducido a valores seguros. En la Figura 7.69 se muestra un esquema de control realimentado de un motor de c.c. con dos lazos de control: de velocidad y de corriente.

Si se analiza la parte superior del circuito de control del inducido, se observa que el error de velocidad pasa a través del controlador de velocidad y luego a un limitador de corriente (que es un circuito electrónico con características de saturación). La salida de este bloque se denomina I_i^* y es la corriente de referencia o consigna del inducido. La corriente del inducido I_i se detecta con un transductor de corriente, que en los casos más simples es un *shunt*, aunque modernamente es un *dispositivo de efecto Hall* (que produce una tensión proporcional a la corriente). La salida de este transductor se filtra convenientemente y se compara con la corriente de inducido de referencia, dando lugar a una tensión e_i que se aplica a un *regulador de corriente tipo PI* (proporcional-integral) para reducir el error a cero y mejorar la respuesta dinámica del lazo. Es la salida de este regulador V_c la que pasa por el generador de impulsos de disparo para ajustar los ángulos de encendido de los tiristores del convertidor que alimenta al inducido.

Para ver el efecto combinado de ambos lazos de realimentación supóngase, por ejemplo, la operación de arranque del motor. En esta situación la velocidad del motor es $n = 0$ y la velocidad de consigna es n^*, por lo que el error de velocidad es máximo y su valor es: $e = n^* - n$, lo que provocará la saturación del limitador de corriente, cuya salida será $I_i^* = I_{i\text{máx}}^*$, y de este modo la corriente del inducido no podrá sobrepasar este valor, protegiendo tanto al motor como al convertidor. Conforme el motor se vaya acelerando, el error de velocidad se irá reduciendo y el limitador de corriente se saldrá de la zona de saturación, dando lugar a una I_i^* inferior al valor máximo permitido.

Evidentemente, si con el esquema de la Figura 7.69 se mantiene la excitación constante en su valor nominal o de consigna, la regulación de velocidad solamente se puede realizar controlando la tensión del inducido, lo que permite una regulación por debajo de la velocidad base (véase Fig. 7.62). Por encima de esta velocidad base, la regulación de velocidad se consigue actuando sobre la corriente de excitación. De este modo una regulación completa de velocidad requiere que el inductor del motor esté alimentado también por un convertidor, para poder modificar la corriente de excitación I_e. Esta fase de la regulación se denomina **control por debilitamiento del campo** (*field weakening* en inglés), que se puede realizar de una forma manual ajustando el valor de consigna de la entrada E^* al circuito de control del inductor o de forma automática mediante la realimentación de la corriente del inducido con los bloques señalados con línea discontinua en la Figura 7.69; en este caso suele fijarse el valor de la

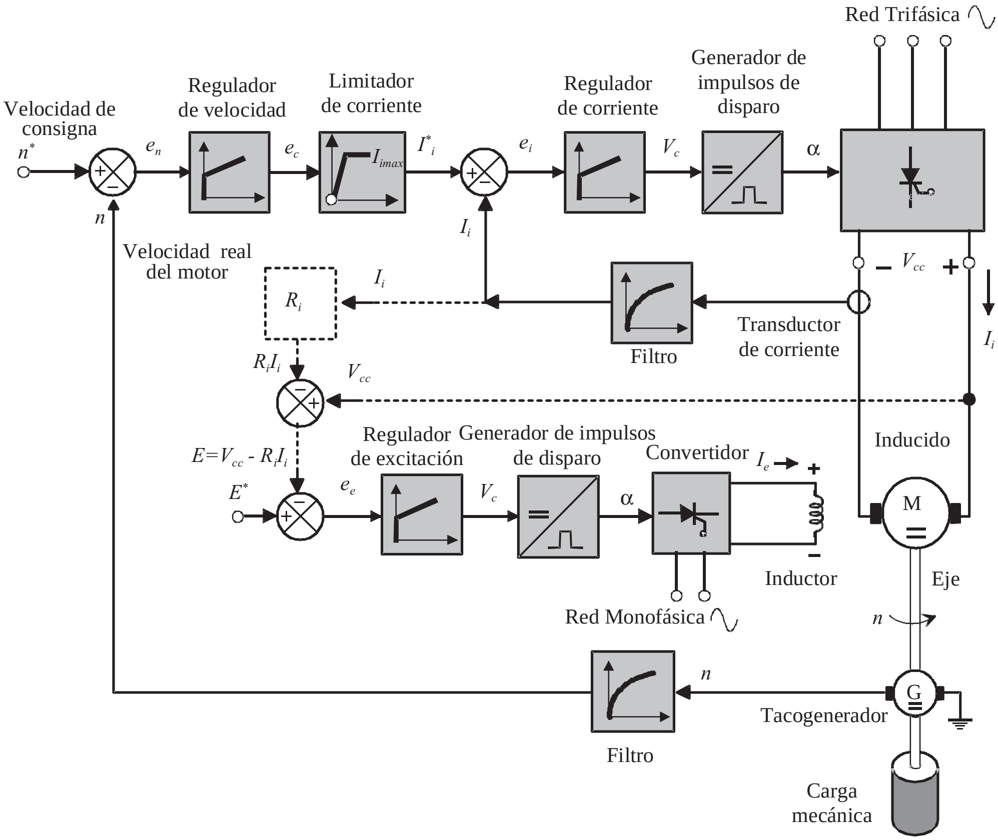


Figura 7.69. Control de la velocidad de un motor de c.c. con realimentación de velocidad y de corriente.

f.c.e.m. de consigna entre el 80 y el 90 por 100 de la tensión nominal o asignada del inducido. El valor de la f.c.e.m. real del motor, que viene expresada por $E = V_{cc} - R_i I_i$, se compara con E^* en el circuito restador señalado en la parte central izquierda de la Figura 7.69, cuya salida se aplica a un regulador de excitación y que actúa sobre el generador de impulsos del inductor, variando de este modo la corriente de excitación I_e. Por debajo de la velocidad base, el regulador de excitación se satura debido al gran valor de la tensión de error e_e, haciendo que la tensión aplicada al inductor sea la nominal o asignada, lo que asegura que por debajo de la velocidad base, la corriente de excitación será la nominal. Si la velocidad de consigna n^* se ajusta para un valor superior a la velocidad base, en el circuito de control del inducido se producirá la saturación, dando lugar a una $I^*_{imáx}$ que limitará el ángulo de encendido de los tiristores del convertidor para suministrar la tensión nominal V_{cc} al inducido. El motor se acelerará y la f.c.e.m. del mismo aumentará, lo que provocará una reducción de la tensión de error e_e del lazo de control de campo, y como consecuencia de ello se reducirá la corriente de excitación, hasta que la velocidad real n coincida con la impuesta por la consigna n^*. El circuito de excitación de la Figura 7.69 puede incluir también protección por corriente de una forma análoga al circuito del inducido.

Si el convertidor del inducido admite ángulos de encendido superiores a 90°, el circuito de la Figura 7.69 se puede emplear para que la máquina trabaje en dos cuadrantes. Colocando otro convertidor en conexión antiparalelo o dual, podrá lograrse una regulación de velocidad en los cuatro cuadrantes; es decir, la máquina admitirá el trabajo como motor en los dos sentidos de giro y con frenado regenerativo en ambos casos.

7.12. ACCIONAMIENTOS ELÉCTRICOS CON MOTORES DE C.A. ASÍNCRONOS

7.12.1. Introducción

Los motores asíncronos o de inducción, en particular los de rotor en jaula de ardilla, tienen grandes ventajas frente a los motores de c.c., como son la robustez, mantenimiento reducido, mayor fiabilidad, menor coste y peso por unidad de potencia. Como ya se sabe, el mayor inconveniente del motor de c.c. es su colector de delgas, que requiere un mantenimiento continuo debido al chispeo que en él se produce por los fenómenos asociados a la conmutación, ya estudiados en el Capítulo 6. La tracción eléctrica y los trenes de laminación de las empresas metalúrgicas requerían motores con una buena regulación de velocidad, por lo que estas aplicaciones estuvieron dominadas hasta fechas muy recientes por motores de c.c. El motor asíncrono se utilizaba como máquina eléctrica robusta para transformar la energía eléctrica en mecánica con un gran rendimiento y poco mantenimiento pero siempre que el proceso productivo no necesitara regulación de velocidad. Con la llegada del tiristor al mercado en el año 1957, el aumento posterior de sus capacidades de tensión y corriente, el descubrimiento sucesivo de otros componentes electrónicos como el GTO, los IGBT, los transistores de potencia MOSFET e incluso el microprocesador (1971) se hizo posible el desarrollo de convertidores electrónicos para la regulación de velocidad de los motores de inducción, que se incorporan cada vez con más frecuencia en los sistemas que eran desde antaño un campo exclusivo de los motores de c.c. Hoy en día, como decía un importante fabricante de máquinas eléctricas, *para pequeñas potencias se vende a la vez en un solo conjunto: cobre, hierro y silicio*, indicando con ello que los fabricantes al suministrar el motor asíncrono clásico (realizado con bobinas de *cobre* en un circuito magnético de *hierro*) incorporan como valor añadido el convertidor electrónico (componentes de *silicio*) para la regulación de velocidad y casi al mismo precio que costaba únicamente el motor de inducción hace unos pocos años. Para ver un ejemplo concreto de esta evolución o trasvase del motor de c.c. hacia el motor de c.a., es interesante señalar que el sistema de transporte suburbano de Madrid (METRO), alimentado por una red de c.c. de 600 V (y en las nuevas líneas a 1.500 V), y que en la década de 1980 toda su tracción se basaba en motores de c.c., en el año 2003 estas máquinas solamente representaban el 40 por 100 del total; es decir, en unos veinte años, más de la mitad de los motores de c.c. se han sustituido por motores de c.a. asíncronos. Es de esperar que a este ritmo de cambio dentro de otros veinte años la tracción eléctrica se realizará totalmente con motores de c.a. Para comprender los principios básicos de la regulación de velocidad de los motores asíncronos, debe recordarse del Capítulo 4 que la velocidad mecánica de giro de estas máquinas en r.p.m. viene expresada por:

$$n = n_1 (1 - s) = \frac{60 f_1}{p} (1 - s) \tag{7.132}$$

y como se señalaba en el epígrafe 4.11, y de acuerdo con la expresión anterior, existen tres procedimientos para cambiar la velocidad n, a saber: *a*) variar el número de polos de la máquina; *b*) cambiar la frecuencia de alimentación f_1; *c*) modificar el deslizamiento s. El primer procedimiento, ya descrito en 4.11.1, no es un sistema de regulación de velocidad en un sentido estricto sino una modificación de la velocidad pero discreta, es decir, a saltos; por ejemplo, la conexión Dahlander permite conseguir dos velocidades de giro en una misma máquina mediante dos combinaciones distintas del devanado, pero nada más. De este modo

los procedimientos prácticos para regular la velocidad de un motor asíncrono se basan fundamentalmente en el control de la frecuencia y del deslizamiento, y éste a su vez se puede controlar indirectamente ajustando la tensión de alimentación aplicada a la máquina.

De acuerdo con lo anterior, los accionamientos eléctricos con motores de inducción se clasifican en las tres categorías principales siguientes:

1. ***Alimentación con frecuencia constante y tensión variable:*** este procedimiento se denomina también control por tensión del estátor. Con este método se regula únicamente la tensión aplicada al estátor; esta acción se puede conseguir en la práctica utilizando autotransformadores o incluyendo en serie con el estátor del motor una serie de impedancias para provocar una caída de tensión intermedia entre la red y el motor, pero a nivel electrónico se consigue empleando los reguladores de c.a. estudiados en el epígrafe 7.6.
2. ***Alimentación con tensión y frecuencia variable:*** en este caso la alimentación al estátor consiste en una tensión que se varía a la vez que la frecuencia, es decir, haciendo que el cociente $E_1/f_1 \approx V_1/f_1$ sea constante, para conseguir mantener inalterable el flujo magnético de la máquina y evitar saturaciones. Para efectuar esta operación existen en la práctica dos sistemas: uno de ellos pasa por una etapa intermedia de c.c. y el otro emplea cicloconvertidores. En el primer caso se emplean dos convertidores electrónicos, uno para rectificar la c.a. de la red y transformarla en c.c., que va seguido de un inversor para convertir la c.c. en c.a. de frecuencia y tensión variable. En el caso de los cicloconvertidores se efectúa una transformación de la c.a. de la red en una c.a. de tensión y frecuencia variable sin pasar por la etapa intermedia de c.c.; generalmente este sistema se emplea para potencias grandes.
3. ***Recuperación de la potencia de deslizamiento:*** este método consiste en variar la resistencia efectiva del circuito del rotor utilizando convertidores electrónicos, que se unen a los anillos del rotor para recuperar la potencia de deslizamiento que se produce a la frecuencia del rotor $f_2 = sf_1$. Es obvio que este método solamente se puede emplear cuando el motor tiene el rotor devanado o con anillos deslizantes.

7.12.2. Regulación de velocidad por control de la tensión de línea aplicada al estátor

Se puede regular la velocidad de un motor asíncrono variando la tensión que alimenta al devanado del estátor. En la Figura 7.70 se muestra el esquema correspondiente, que utiliza dos tiristores por fase colocados en oposición, que en el caso de pequeños motores se suelen sustituir por triacs, de acuerdo con lo analizado en el epígrafe 7.6. La tensión que llega al estátor puede regularse fácilmente variando el ángulo de encendido de los tiristores. Este método de control es sencillo y se puede aplicar a motores que poseen una jaula de ardilla con resistencia elevada, lo que se consigue utilizando bronce en vez de cobre en la construcción de las barras del rotor (las normas americanas NEMA, *National Electrical Manufactures'Association* denominan a esta clase de motor como *tipo D*). El comportamiento de este tipo de accionamiento no es muy bueno debido a los armónicos que introduce en la red y por el bajo factor de potencia que se consigue.

Las curvas par-velocidad de estos motores se parecen a las que tienen los motores con rotor devanado en los que se haya incluido una resistencia adicional en serie por medio de los anillos; por ello el par máximo se obtiene para deslizamientos altos, del orden del 50 por 100 (s = 0,50) y con deslizamientos a plena carga bastante elevados y que oscilan entre el 8 y el 15

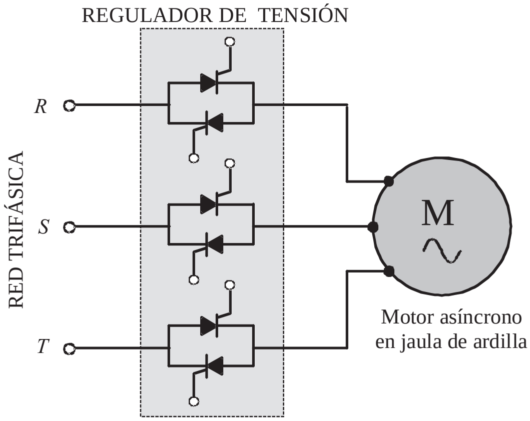


Figura 7.70. Control de velocidad de un motor asíncrono por medio de un regulador de c.a.

por 100, por lo que el rendimiento de estas máquinas es pequeño. En la Figura 7.71 se muestran las curvas par-velocidad de un motor asíncrono para diversas tensiones de alimentación.

Hay que tener en cuenta que la expresión del par electromagnético producido por un motor asíncrono es de la forma:

$$T = \frac{3R_2'V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60} s \cdot \left[\left(R_1 + \dfrac{R_2'}{s}\right)^2 + (X_1 + X_2')^2\right]} \tag{7.133}$$

es decir, el par depende del cuadrado de la tensión aplicada al estátor, y es por ello que si las cargas ofrecen un alto par de arranque existirán problemas de regulación de velocidad. Sin embargo, este sistema puede ser útil para cargas con pares resistentes tipo ventilador (ventiladores y bombas centrífugas), como el señalado en la Figura 7.71. Las distintas curvas de par se han calibrado en función del porcentaje de la tensión producida frente a la nominal V_{1n}, lo

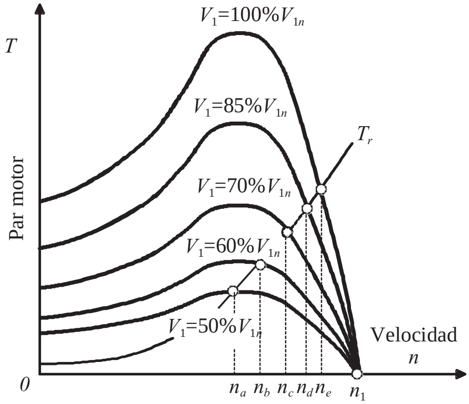


Figura 7.71. Curvas par-velocidad de un motor asíncrono para diversos valores de la tensión.

que corresponde en definitiva a distintos ángulos de encendido de los tiristores. Las velocidades n_a, n_b, n_c, ... son las diversas velocidades de equilibrio que se obtienen para las distintas tensiones aplicadas.

7.12.3. Regulación de velocidad por control de la tensión y frecuencia de línea. Control escalar

De acuerdo con la ecuación (7.132), es evidente que un método simple de cambiar la velocidad de giro de un motor asíncrono es cambiar la frecuencia de alimentación f_1 que llega al estátor, pues ésta modifica la velocidad de sincronismo del campo magnético giratorio y por ende la velocidad mecánica de giro, que es cercana a aquélla en virtud del pequeño valor del deslizamiento en este tipo de máquinas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el flujo magnético en el entrehierro es directamente proporcional a la f.e.m. inducida en cada devanado del estátor e inversamente a la frecuencia. Recuérdese que la f.e.m. E_1 inducida por fase en el devanado 1 (estátor) es de la forma:

$$E_1 = 4{,}44\, k_1 f_1 N_1 \Phi_m \quad \Rightarrow \quad \Phi_m = \frac{E_1}{4{,}44\, k_1 f_1 N_1} \tag{7.134}$$

Por consiguiente, una reducción en la frecuencia de alimentación f_1 produce un aumento del flujo magnético Φ_m. Para evitar la saturación del núcleo magnético debido al aumento del flujo, deberá aumentarse proporcionalmente la f.e.m. E_1, es decir, hay que mantener el cociente E_1/f_1 constante. En este sistema de regulación de velocidad se controla, por tanto, la magnitud del flujo magnético y por ello recibe el nombre de «control escalar», frente al moderno «control vectorial», que se explica en el epígrafe 7.12.6, en el que se regula tanto el módulo como la fase del flujo magnético, lo que se traduce en una mejor respuesta dinámica del motor.

Para estudiar el comportamiento del motor para un cociente E_1/f_1 constante, vamos a considerar el circuito equivalente exacto por fase de un motor asíncrono, mostrado en la Figura 7.72, en el que se desprecian las pérdidas en el hierro. La f.e.m. E_1 es la d.d.p. en la rama central, por lo que la corriente en la reactancia magnetizante X_μ vale:

$$I_\mu = \frac{E_1}{X_\mu} = \frac{E_1}{2\pi f_1 L_\mu} = \frac{1}{2\pi L_\mu}\frac{E_1}{f_1} = \text{constante} \tag{7.135}$$

es decir, si se conserva constante el cociente E_1/f_1, la corriente magnetizante I_μ permanece constante y el flujo magnético mutuo del motor Φ_m no varía.

Vamos a analizar el comportamiento mecánico del motor a través de sus curvas par-velocidad en el caso de que se mantenga constante el cociente E_1/f_1. De acuerdo con la expre-

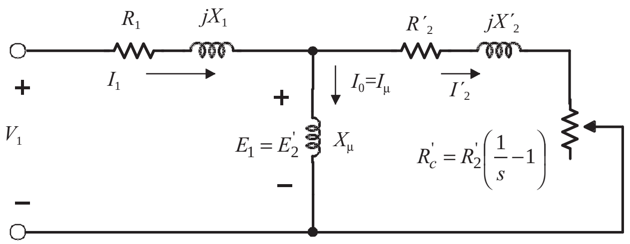


Figura 7.72. Circuito equivalente de la máquina asíncrona.

sión (4.74) del Capítulo 4, el par electromagnético producido por una máquina asíncrona vale:

$$T = \frac{m_1 \dfrac{R_2'}{s} I_2'^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}} \tag{7.136}$$

Del circuito de la Figura 7.72, la corriente I_2' es igual a:

$$I_2' = \frac{E_1}{\sqrt{\left(\dfrac{R_2'}{s}\right)^2 + X_2'^2}} = \frac{sE_1}{\sqrt{R_2'^2 + (sX_2')^2}} \tag{7.137}$$

valor que al sustituir en (7.136) nos da:

$$T = \frac{m_1 R_2' s E_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60} [R_2'^2 + (sX_2')^2]} \tag{7.138}$$

pero teniendo en cuenta que la velocidad de sincronismo n_1 es igual a $60f_1/p$, la ecuación anterior se puede escribir, de una forma equivalente, de este modo:

$$T = \frac{m_1 p s R_2' E_1^2}{2\pi f_1 [R_2'^2 + (sX_2')^2]} \tag{7.139}$$

Para una determinada frecuencia de alimentación f_1, la f.e.m. E_1 se mantiene constante (en virtud de que el cociente E_1/f_1 es constante), y de la expresión anterior se puede calcular el valor del deslizamiento, para el cual se obtiene el par máximo del siguiente modo:

$$\frac{dT}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_m = \pm \frac{R_2'}{X_2'} \tag{7.140}$$

que difiere de la (4.77) calculada en el Capítulo 4 debido a que allí se utilizó el circuito equivalente aproximado del motor. Sustituyendo (7.140) en (7.139) se obtiene el valor del par máximo:

$$T_{\text{máx}} = \frac{m_1 p}{2\pi f_1} \frac{E_1^2}{2X_2'} \tag{7.141}$$

pero teniendo en cuenta que $X_2' = L_{d2}' 2\pi f_1$, siendo L_{d2}' la inductancia de dispersión del rotor reducida al estátor, el par máximo se puede expresar del siguiente modo:

$$T_{\text{máx}} = \frac{m_1 p}{8\pi^2 L_{d2}'} \left(\frac{E_1}{f_1}\right)^2 \tag{7.142}$$

de donde se deduce que si el cociente E_1/f_1 es constante, el valor del par máximo será constante para todas las frecuencias de alimentación al motor.

Por otro lado, si el motor trabaja para un deslizamiento inferior a s_m, y en especial para bajos deslizamientos, se cumple la desigualdad $R'_2 >> sX'_2$, por lo que la ecuación del par (7.139) se transforma en:

$$T = \frac{m_1 p E_1^2}{2\pi f_1 R'_2} s \tag{7.143}$$

lo que indica que para bajos deslizamientos, el par es proporcional a s, es decir, la curva par-velocidad en esta zona es lineal. En la Figura 7.73 se muestran las curvas par-velocidad de un motor asíncrono cuando se mantiene constante el cociente E_1/f_1 (curvas E_{1a}/f_{1a}, E_{1b}/f_{1b}, E_{1c}/f_{1c}, ...), y en las que se aprecia que el valor del par máximo $T_{\text{máx}}$ permanece inalterable para las diversas curvas y que la zona situada a la derecha del deslizamiento correspondiente al par máximo es prácticamente lineal (para mayor claridad se han omitido las zonas de las curvas de pares que quedan a la izquierda de los puntos correspondientes a los pares máximos respectivos).

Por otro lado, si se tiene en cuenta que según la ecuación (4.5) del Capítulo 4 el deslizamiento del motor es el cociente entre la frecuencia del rotor f_2 y la frecuencia del estátor f_1, al sustituir en (7.143) resulta:

$$T = \frac{m_1 p}{2\pi R'_2} \left(\frac{E_1}{f_1}\right)^2 f_2 \tag{7.144}$$

Es decir, para un mismo par resistente aplicado al motor, la frecuencia de las corrientes del rotor se mantiene constante. Esto es, para los puntos A, B, C, ... de la Figura 7.73, en los que el par es el mismo para las diversas combinaciones E_1/f_1, la frecuencia f_2 del rotor es la misma en todos los puntos de trabajo. De aquí se deduce, de acuerdo con la expresión (4.12) del Capítulo 4, que al ser f_2 proporcional a la diferencia entre la velocidad de sincronismo y la velocidad del rotor, denominada ***velocidad de deslizamiento*** $n_2 = n_1 - n$, esta diferencia será constante para todos los puntos de trabajo que tienen el mismo par, lo que se aprecia claramente en la Figura 7.73. Esta propiedad es muy importante, ya que permite determinar la velocidad a la que trabaja el motor en cada punto, si se conoce el valor de la velocidad de deslizamiento de solamente uno de ellos. Supóngase, por ejemplo, que en el caso de la Figura 7.73, para la curva primera situada más a la derecha que la frecuencia aplicada al motor es la nominal $f_{1a} = 50$ Hz y que la máquina tiene 4 polos (por lo que la velocidad de sincronismo en el punto A_1 es $n_{1a} = 60 \cdot f_{1a}/p = 60 \cdot 50/2 = 1.500$ r.p.m.), si en el punto de trabajo A la velocidad es de 1.440

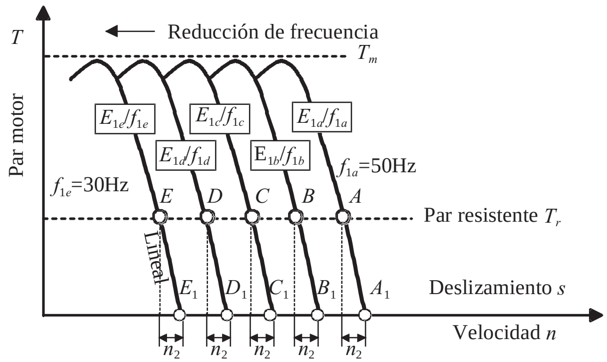


Figura 7.73. Curvas par-velocidad de un motor asíncrono para E_1/f_1 constante.

r.p.m., la velocidad de deslizamiento es $n_2 = 1.500 - 1.440 = 60$ r.p.m.; si en esta situación la frecuencia de la alimentación cambia y pasa a valer $f_{1e} = 30$ Hz, la velocidad síncrona correspondiente al punto E_1 será de $n_{1e} = 60 \cdot 30/2 = 900$ r.p.m. y la velocidad del motor en el punto E será: $900 - 60 = 840$ r.p.m., y de un modo análogo para otras frecuencias de trabajo.

En la práctica, la forma más sencilla de regular la f.e.m. E_1 y su frecuencia f_1 asociada es controlando la tensión de alimentación V_1. De acuerdo con el circuito equivalente de la máquina asíncrona mostrado en la Figura 7.72, en el circuito del estátor se cumple:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 + R_1\mathbf{I}_1 + jX_1\mathbf{I}_1 \tag{7.145}$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (7.134) y (7.144) se puede escribir:

$$\Phi_m = \frac{1}{4{,}44\,k_1N_1}\left|\frac{\mathbf{E}_1}{f_1}\right| = \frac{1}{4{,}44\,k_1N_1}\left|\frac{\mathbf{V}_1}{f_1} - \frac{R_1\mathbf{I}_1}{f_1} - \frac{jX_1\mathbf{I}_1}{f_1}\right| \tag{7.146}$$

A la frecuencia nominal, los términos R_1I_1/f_1 y jX_1I_1/f_1 son despreciables frente a V_1/f_1, por lo que se puede considerar válida la siguiente aproximación:

$$\Phi_m = \frac{1}{4{,}44\,k_1N_1}\cdot\frac{E_1}{f_1} \approx \frac{1}{4{,}44\,k_1N_1}\cdot\frac{V_1}{f_1} \tag{7.147}$$

De este modo, al variar la frecuencia de alimentación f_1 siempre que se cambie al mismo tiempo la tensión aplicada V_1 se conseguirá una buena regulación de la velocidad del motor. A bajas frecuencias la aproximación anterior no es válida; téngase en cuenta que el término inductivo $jX_1I_1/f_1 = jL_{d1}2\pi f_1I_1/f_1 = jL_{d1}2\pi I_1$ no depende de la frecuencia, por lo que su magnitud seguirá siendo despreciable; sin embargo, el término resistivo R_1I_1/f_1 aumentará su valor relativo al reducirse la frecuencia. Es por ello que para mantener el mismo flujo magnético en el entrehierro, se deberá elevar el cociente V_1/f_1 en bajas frecuencias, tal como se señala en la Figura 7.74.

La realización práctica de este sistema de control requiere el uso de dos convertidores electrónicos: un rectificador controlado y un inversor de conmutación forzada (*force-commutated inverter* en inglés), tal como se señala en la Figura 7.75. El rectificador controlado transformará la tensión trifásica de la red en una etapa intermedia de c.c., de tal modo que se puede regular la tensión que llega al inversor modificando el ángulo de encendido de los tiristores del rectificador controlado.

El inversor produce una tensión trifásica cuya frecuencia depende de la secuencia de impulsos que se aplican a las puertas de sus tiristores, de este modo al motor asíncrono llega una

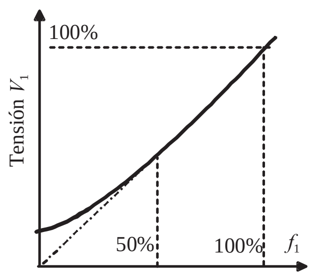


Figura 7.74. Variación de la tensión en función de la frecuencia en porcentaje de los valores nominales.

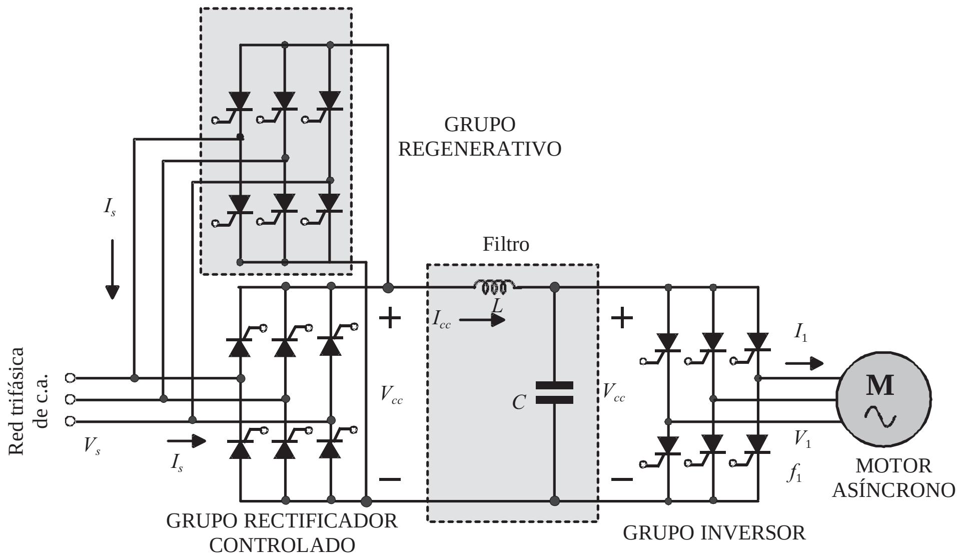


Figura 7.75. Regulación de velocidad por control V_1/f_1.

tensión variable en frecuencia y tensión. Aunque el esquema de la Figura 7.75 suele ser el clásico, en algunos casos se utiliza un rectificador fijo y el control de la tensión se realiza con la ayuda de un chopper colocado en la etapa de c.c. En otros casos el inversor genera una salida de tensión y frecuencia variable empleando técnicas de modulación PWM con objeto de que las tensiones sean lo más senoidales posibles, y que incluyen además métodos de control sofisticados para provocar una eliminación selectiva de armónicos. El circuito LC del esquema de la Figura 7.75 es un filtro para alisar la c.c. que se obtiene a la salida del rectificador controlado.

En el caso de que interese que el motor funcione en régimen regenerativo, deberá incorporarse al circuito un inversor adicional, que se señala en la Figura 7.75 por un recuadro discontinuo, y que se conecta en antiparalelo con el rectificador controlado, formando ambos un ***grupo dual***; de este modo, cuando el motor trabaja en régimen regenerativo (cuadrante II) circula una corriente negativa a través del grupo inversor situado a la salida, que alimenta al motor, y esta corriente pasa por el grupo dual devolviendo energía a la red trifásica a través del inversor superior. El motor puede funcionar también en los cuadrantes III y IV si se invierte la secuencia de fases del grupo inversor, cuya salida se aplica al motor.

Las características par-velocidad de este sistema de regulación se muestran en la Figura 7.76. Se considera que a la frecuencia nominal o frecuencia base, la tensión aplicada al motor es la tensión nominal. Por debajo de esta frecuencia, el flujo se mantiene constante, variando la frecuencia pero haciendo que sea constante el cociente tensión/frecuencia (recuérdese que a bajas frecuencias se aumenta esta relación), con lo que se consigue que el par máximo sea el mismo para todas las curvas par-velocidad que resultan para las frecuencias inferiores a la nominal o base (véase ejemplo de aplicación 7.14).

Por encima de la frecuencia nominal no se puede realizar el mismo tipo de control de conservar inalterable la relación V_1/f_1, ya que obligaría a aumentar la tensión por encima de su valor nominal, y es por ello que la tensión se fija en el valor nominal y se aumenta la frecuencia paulatinamente en esta zona; esto provoca una disminución del flujo magnético en

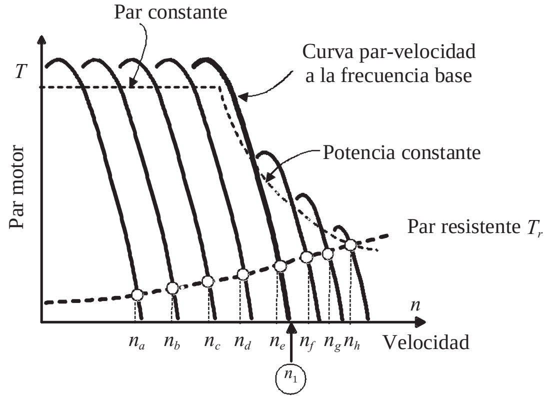


Figura 7.76. Curvas par-velocidad por control V_1/f_1.

el entrehierro, lo que se traduce en una reducción del valor par máximo en todo el rango de variación superior, como puede observarse en la parte derecha de la Figura 7.76. Esta acción corresponde al control por reducción de campo explicado en los motores de c.c., por lo que es posible funcionar en esta zona en un régimen de potencia constante, como así se ha señalado con las curvas de trazado discontinuo mostradas en la Figura 7.76. Se observan también en esta figura las diferentes velocidades de funcionamiento cuando el motor mueve una carga con par cuadrático.

Cuando se requiere un control muy preciso de la velocidad de un accionamiento movido por un motor asíncrono, el circuito de la Figura 7.75 no es capaz de cumplir tal objetivo y debe completarse con algún lazo de realimentación que incorpore una medida de la velocidad del motor. En la Figura 7.77 se muestra el circuito correspondiente. En este esquema se fija la velocidad de consigna desde el exterior por medio de la tensión de referencia n^*; el tacogenerador acoplado al eje del motor produce una f.e.m. proporcional a la velocidad real de la máquina y que se ha denominado n. En la parte inferior izquierda hay un nudo sumador en el que se restan ambas tensiones (velocidades), dando lugar a la tensión de error de velocidad $n^* - n$, que se procesa a través de un controlador proporcional integral PI para reducir el error a cero y mejorar la dinámica del lazo de control; la parte proporcional de este controlador incluye un factor $p/60$, siendo p el número de pares de polos del motor, para convertir la diferencia de velocidades medida en r.p.m. en una frecuencia equivalente del circuito del rotor o frecuencia de deslizamiento f_2. A continuación existe un regulador de la frecuencia anterior, que es simplemente un limitador, que fija el valor de la frecuencia de consigna del rotor f_2^* para que no sea superior a la que corresponde a la condición de par máximo, limitando de este modo la corriente del inversor a un valor permisible. A continuación existe otro nudo sumador que suma la frecuencia f_2^* con la frecuencia eléctrica de giro del rotor $np/60$, generando de este modo la frecuencia de consigna en el valor $f_1^* = f_2^* + np/60$, que debe producir el inversor que alimenta el motor. Por otro lado, esta señal f_1^* se lleva a un generador de funciones para producir la señal de referencia de tensión V_1^* que debe aplicarse a la máquina y que regula los impulsos de disparo de rectificador controlado, haciendo que la máquina funcione con el cociente V_1^*/f_1^* constante. Si la frecuencia f_1^* que llega al generador de funciones es inferior a la frecuencia (velocidad) base, este generador suministra una tensión proporcional de la forma $V_1^* = k \cdot f_1^* + V_0$, donde V_0 representa la tensión necesaria que debe aplicarse al estátor, para que el motor

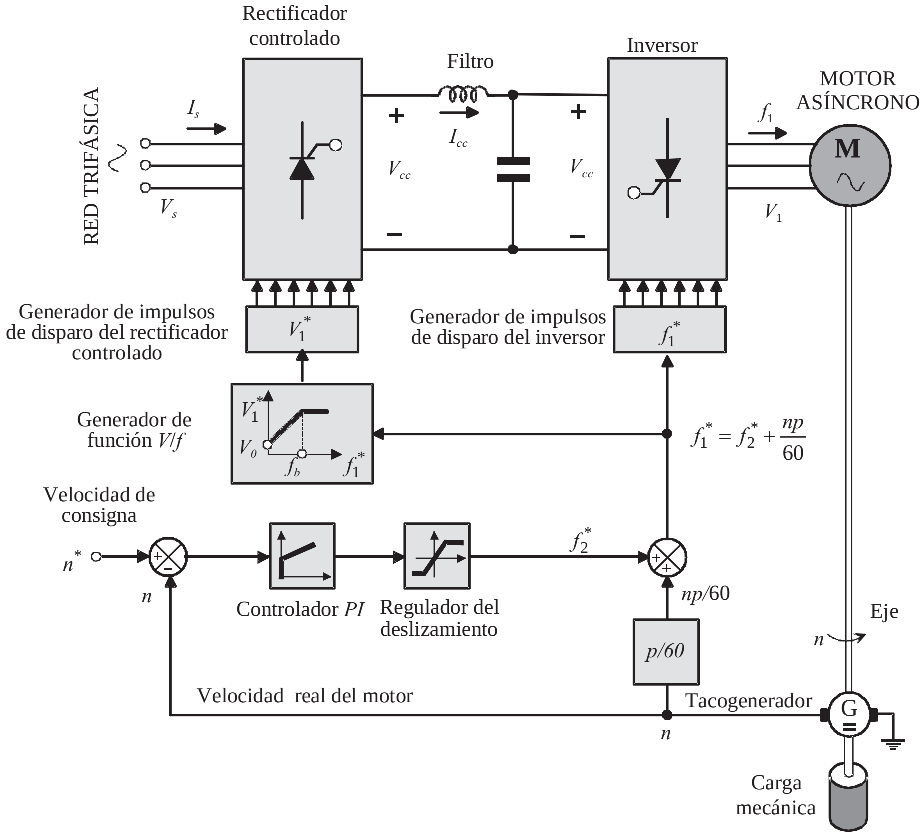


Figura 7.77. Regulación V_1/f_1 con realimentación.

trabaje con flujo nominal a velocidad cero, y donde k se elige de tal modo que la máquina trabaje a la tensión nominal o asignada cuando el valor de la frecuencia es la nominal.

Cuando f_1^* es superior a la frecuencia base f_b se produce una saturación del bloque generador de funciones, lo que limita el valor de V_1^* a su valor máximo, que es igual a la tensión nominal. De este modo, por debajo de la frecuencia base se tiene una regulación simultánea de V_1^* y f_1^*, la primera de las cuales se utiliza para cambiar la salida del rectificador controlado y la segunda para modificar la frecuencia del inversor, manteniendo en cada momento el cociente V_1^*/f_1^* constante. Por encima de la frecuencia base, el valor de V_1^* es constante y la regulación de velocidad se hace a través de la frecuencia de salida del inversor y que va fijando la frecuencia f_1^*.

Si se considera que la máquina está girando en una situación determinada a velocidad n y se aumenta la velocidad de consigna n^*, se produce un error de velocidad positivo que satura el regulador de la frecuencia del rotor f_2, dando lugar a una salida máxima de f_2^*; de este modo el motor se acelera aumentando la corriente de la máquina hasta el valor máximo permitido por el inversor, lo que da lugar al máximo par de aceleración posible hasta que se consigue reducir el error de velocidad a cero. El accionamiento que mueve el motor alcanza el régimen permanente para un valor de f_2^* para el cual se cumple el balance de pares motor y resistente. El proceso inverso tiene lugar si se reduce la velocidad de consigna n^*.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

La tracción eléctrica española con motores asíncronos

a) Locomotora S252 de Siemens. Línea de alta velocidad Madrid-Sevilla (AVE)

Un ejemplo de regulación de velocidad de motores asíncronos en la tracción eléctrica española se muestra en la Figura 7.78. Corresponde a la locomotora S252 de Siemens para la línea de alta velocidad Madrid-Sevilla (AVE). Este coche motor se utiliza para la tracción del Talgo en esta línea. La alimentación de la catenaria es una red de c.a. monofásica de 25 kV, 50 Hz. Se tiene un transformador de entrada que alimenta dos circuitos idénticos, que constan a su vez de un rectificador controlado monofásico para transformar la c.a. de 25 kV de la alimentación de la catenaria en c.c. a 2,6 kV (etapa intermedia), y un inversor trifásico se encarga de convertir esta corriente continua en c.a. trifásica de amplitud y frecuencia variable utilizando la modulación de anchura de impulso (PWM). Cada equipo alimenta a dos motores trifásicos asíncronos (situados en un mismo boje del coche motor) con una potencia de 1.400 kW cada uno, lo que representa un total de 2.800 kW por boje, es decir, 5.600 kW en total. La velocidad máxima del tren es de 220 km/h.

Existen centros de transformación en el recorrido (separados entre sí unos 40 km) alimentados por redes de muy alta tensión (de 220 kV) para reducir al máximo las interferencias con los sistemas eléctricos cercanos; en cada centro se dispone de dos transformadores monofásicos de 20 MVA cada uno y salida a 25 kV, que alimentan transversalmente a dos catenarias distintas.

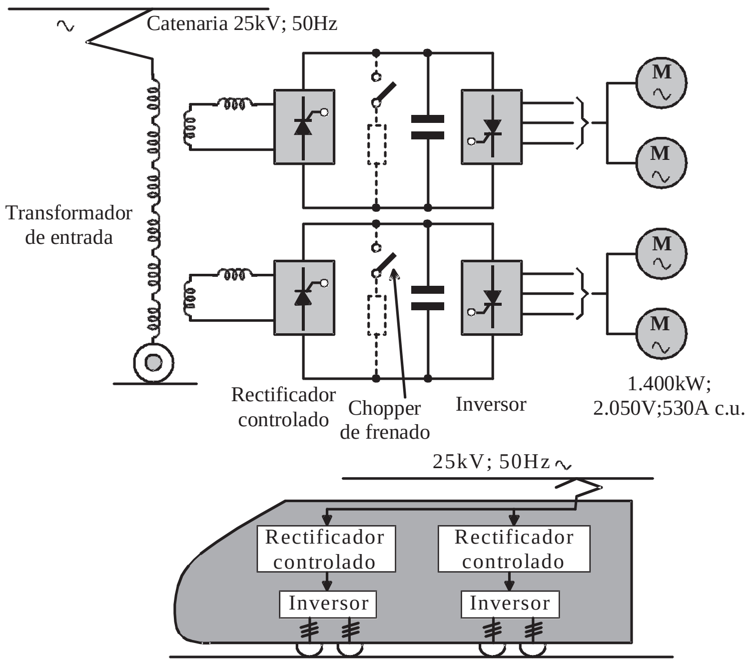


Figura 7.78. Esquema eléctrico de la locomotora Siemens S252.

b) Tren ICE 350E de Siemens. Línea de alta velocidad Madrid-Barcelona (AVE)

El ICE 350E de la compañía alemana Siemens es una evolución del ICE 3 de la misma empresa, capaz de alcanzar los 350 km/h y que incorpora el concepto de tracción distribuida. Sin cabezas tractoras, todo el equipo eléctrico va repartido a lo largo del tren, bajo el bastidor de todos los coches y con un 50 por 100 de los ejes motorizados. Este sistema, al margen de aumentar el espacio disponible para los viajeros, permite una mejor adherencia, mayor aceleración y capacidad de superar pendientes más pronunciadas. El tren tiene una longitud de 200 m y 8 coches, con un peso máximo por eje de 15 toneladas. Dispone de 16 motores asíncronos de 550 kW, lo que da lugar a un total de 8.800 kW.

El sistema de alimentación a la catenaria es el denominado 2 × 25 kV, 50 Hz. La alimentación a los trenes se realiza a través de la catenaria a +25 kV, la línea de retorno puesta a tierra y un alimentador o feeder negativo a −25 kV. Este sistema 2 × 25 kV implica el tendido de un conductor negativo a lo largo de la línea que, en combinación con el conductor de retorno, debidamente conectado a los carriles a distancias regulares, produce el efecto de disminuir las perturbaciones electromagnéticas originadas por el sistema.

Otro sistema de regulación que se utiliza para el control de los motores asíncronos es el uso de cicloconvertidores. En la Figura 7.79 se muestra de una forma simplificada el esquema correspondiente; en este caso dicho sistema electrónico produce una tensión trifásica variable en amplitud y frecuencia directamente, sin que se requiera una etapa de c.c. intermedia.

El inconveniente de los cicloconvertidores es que el rango de variación de la frecuencia producida varía solamente entre 0 y 1/3 de la frecuencia de alimentación de aquéllos. Este sistema de regulación se emplea principalmente en motores de gran potencia, debido a la complejidad del equipo de control de disparo de los tiristores. Obsérvese que se requieren 12 tiristores por cada fase, que deben ir perfectamente desfasados y al mismo tiempo sincronizados entre sí.

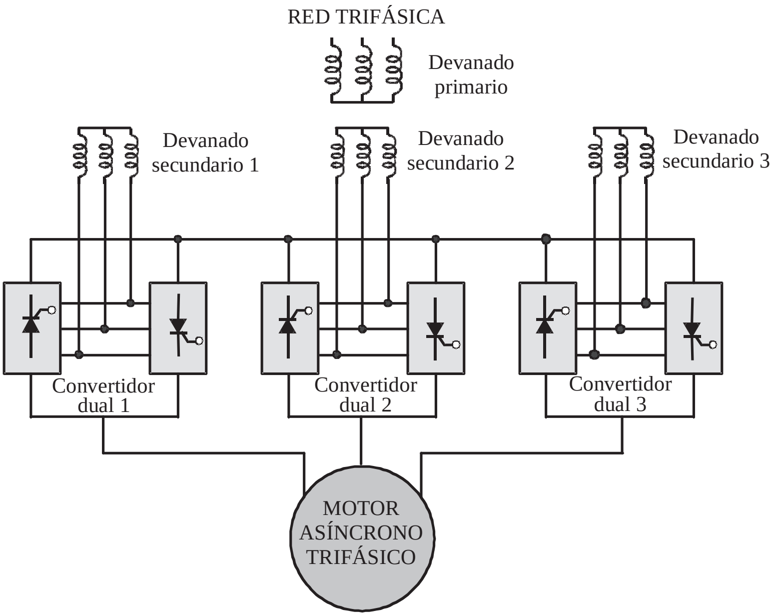


Figura 7.79. Control de velocidad por medio de un cicloconvertidor.

Ejemplo de aplicación 7.14

Se dispone de un motor asíncrono trifásico de 4 polos que tiene los siguientes parámetros del circuito equivalente medidos a 50 Hz: R_1 = 0,1 ohmios; R'_2 = 0,2 ohmios; X_1 = 0,4 ohmios; X'_2 = 0,35 ohmios.

Se desprecian las pérdidas mecánicas y la rama paralelo del circuito equivalente.

1. *Calcular la velocidad de sincronismo, velocidad para par máximo y par máximo correspondiente y par de arranque, cuando las tensiones por fase y frecuencias aplicadas al motor son: a) V_1 = 200 voltios; f_1 = 50 Hz; b) V_1 = 160 voltios; f_1 = 40 Hz; c) V_1 = 80 voltios; f_1 = 20 Hz; d) V_1 = 40 voltios; f_1 = 10 Hz; e) V_1 = 200 voltios; f_1 = 60 Hz.*
2. *¿Qué tensión debería aplicarse al estátor (por fase) para el caso anterior c) para que el par máximo producido coincida con el que se obtiene a 50 Hz?*

Solución

1*a*) Tensión: V_1 = 200 voltios; frecuencia f_1 = 50 Hz

La velocidad de sincronismo viene expresada por:

$$n_1 = \frac{60\, f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{2} = 1.500 \text{ r.p.m.}$$

El deslizamiento para par máximo vale:

$$s_m = \frac{R'_2}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X'_2)^2}} = \frac{0,2}{\sqrt{0,1^2 + 0,75^2}}$$

Por consiguiente, la velocidad para par máximo será:

$$n = n_1\,(1 - s) = 1.500\,(1 - 0,264) = 1.103,5 \text{ r.p.m.}$$

y el par máximo tendrá un valor:

$$T_{\text{máx}} = \frac{3V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}\, 2 \cdot \left[R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X'_2)^2}\right]} = \frac{3 \cdot 200^2}{2\pi \dfrac{1.500}{60}\, 2 \cdot \left[0,1 + \sqrt{0,1^2 + 0,75^2}\right]} = 445,9 \text{ N.m}$$

El par de arranque se obtiene de la expresión general del par, haciendo s = 1, resultando un valor:

$$T = \frac{3R'_2V_1^2}{2\pi \dfrac{n_1}{60}\, s \cdot \left[\left(R_1 + \dfrac{R'_2}{s}\right) + (X_1 + X'_2)^2\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ T_a = \frac{3 \cdot 0,2 \cdot 200^2}{2\pi \dfrac{1500}{600} \cdot 1 \cdot [(0,1 + 0,2)^2 + 0,75^2]} = 234,16 \text{ N.m}$$

1*b*) Tensión: V_1 = 160 voltios; frecuencia f_1 = 40 Hz

El proceso de cálculo es idéntico al anterior pero teniendo en cuenta que al cambiar la frecuencia de alimentación se modifican las reactancias de la máquina. En este caso se tiene:

$$X_1 + X'_2 = X_{cc} = 0,75\,\frac{40}{50} = 0,6 \text{ ohmios}$$

y aplicando las mismas expresiones que en el apartado anterior resulta:

$$n_1 = 1.200 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad n_{\text{máx}} = 805 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad T_{\text{máx}} = 431{,}43 \text{ N.m} \quad ; \quad T_a = 275{,}62 \text{ N.m}$$

Se observa que el par máximo se reduce levemente respecto al caso anterior y que el par de arranque aumenta porque la curva par-velocidad correspondiente se ha desplazado a la izquierda respecto al caso anterior.

1*c*) Tensión: V_1 = 80 voltios; frecuencia f_1 = 20 Hz

Ahora la reactancia de cortocircuito a esta frecuencia vale:

$$X_1 + X_2' = X_{cc} = 0{,}75 \frac{20}{50} = 0{,}3 \text{ ohmios}$$

y aplicando las mismas expresiones que en el apartado anterior resulta:

$$n_1 = 600 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad n_{\text{máx}} = 220{,}53 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad T_{\text{máx}} = 367{,}08 \text{ N.m} \quad ; \quad T_a = 339{,}53 \text{ N.m}$$

se observa que a esta frecuencia tan reducida el par máximo se reduce sensiblemente respecto al caso *a*) de frecuencia nominal de 50 Hz.

1*d*) Tensión: V_1 = 40 voltios; frecuencia f_1 = 10 Hz

La reactancia de cortocircuito a esta frecuencia vale:

$$X_1 + X_2' = X_{cc} = 0{,}75 \frac{10}{50} = 0{,}15 \text{ ohmios}$$

y aplicando las mismas expresiones que en el apartado anterior resulta:

$$n_1 = 300 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad n_{\text{máx}} = -32{,}82 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad T_{\text{máx}} = 272{,}57 \text{ N.m} \quad ; \quad T_a = 271{,}62 \text{ N.m}$$

Se observa que a esta frecuencia tan reducida el par máximo es muy inferior al caso *a*) de frecuencia nominal de 50 Hz.

1*e*) Tensión: V_1 = 200 voltios; frecuencia f_1 = 60 Hz

En este caso la reactancia de cortocircuito a esta frecuencia vale:

$$X_1 + X_2' = X_{cc} = 0{,}75 \frac{60}{50} = 0{,}9 \text{ ohmios}$$

y aplicando las mismas expresiones que en el apartado anterior resulta:

$$n_1 = 1.800 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad n_{\text{máx}} = 1.402{,}4 \text{ r.p.m.} \quad ; \quad T_{\text{máx}} = 316{,}56 \text{ N.m} \quad ; \quad T_a = 141{,}47 \text{ N.m}$$

Se observa que para esta frecuencia superior a la nominal también el par máximo se reduce respecto al obtenido en el caso *a*) de frecuencia nominal de 50 Hz.

Es instructivo que el lector dibuje las curvas par-velocidad que se obtienen en este problema y las compare con las curvas de la Figura 7.76. En esta figura el par máximo se conserva constante para $f < f_{base}$ debido a que el flujo se supone constante o de otro modo el cociente E_1/f_1, pero en este problema se ha conservado constante realmente el cociente V_1/f_1, se exceptúa el caso *e*) y por ello las curvas par-velocidad que quedan a la izquierda de la correspondiente a la frecuencia base (de 50 Hz) van disminuyendo su par máximo conforme disminuye la frecuencia de alimentación.

2. De acuerdo con los resultados expuestos en el apartado anterior, para que el par máximo se conserve a frecuencias inferiores a la nominal, es preciso aumentar la relación V_1/f_1 correspondiente; en el caso que se solicita en el problema se tiene:

Caso *a*: V_1 = 200 voltios; f_1 = 50 Hz. $T_{máx}$ = 445,9 N.m
Caso *c*: V_1 = 80 voltios; f_1 = 20 Hz. $T_{máx}$ = 367,08 N.m

El par máximo es proporcional al cuadrado de la tensión aplicada, es decir:

$$T_{máx} = \frac{3V_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} 2 \cdot \left[R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2} \right]} = kV_1^2$$

Como quiera que con 80 V, 20 Hz se tiene un par máximo de 367,08 N.m, para conseguir un par máximo de 445,9 N.m a 20 Hz se requerirá una tensión V_1 que se deduce a continuación:

$$367{,}08 = k \cdot 80^2 \quad ; \quad 445{,}9 = kV_1^2 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 80\sqrt{\frac{445{,}9}{367{,}08}} = 88{,}17 \text{ voltios}$$

El lector puede comprobar que para una frecuencia de 10 Hz, la tensión necesaria en el estátor para conservar el par máximo, teniendo en cuenta los resultado del apartado 1*d*), sería:

$$V_1 = 40\sqrt{\frac{445{,}9}{272{,}57}} = 51{,}16 \text{ voltios}$$

Estos resultados justifican la forma de la curva de la Figura 7.74, que a bajas frecuencias aumenta la relación V_1/f_1.

7.12.4. Regulación de velocidad por control estático de una resistencia adicional en el rotor

En el epígrafe 4.9.2 del Capítulo 4 se estudió el arranque de motores asíncronos con rotor devanado, en el que se introducía un reóstato trifásico en los anillos del rotor para reducir la corriente de arranque. Es evidente que al variar la resistencia del reóstato se puede regular la velocidad de giro del motor. En la Figura 4.38 se representaron las curvas par-velocidad para cuatro resistencias adicionales distintas.

La resistencia externa se puede variar estáticamente empleando el circuito mostrado en la Figura 7.80. En este montaje, la potencia que llega al rotor se rectifica por medio de un puente trifásico de diodos y la inductancia L se utiliza como elemento de filtro para alisar la c.c. que sale del rectificador. La resistencia externa R_{ex} está en paralelo con un chopper, de tal modo que el valor de la resistencia efectiva que se añade al rotor depende del parámetro k o *ciclo de trabajo* del chopper. Recuérdese, de acuerdo con el epígrafe 7.7, que el ciclo de trabajo de un chopper o troceador está definido por:

$$k = \frac{t_{ON}}{T} \tag{7.148}$$

siendo t_{ON} el tiempo de cierre del interruptor estático S y T el período del mismo. La frecuencia del chopper $f = 1/T$ se elige cercana a 1 kHz.

Si en el circuito de la Figura 7.80 se desprecia el rizado de la corriente I_{cc}, la energía absorbida por la R_{ex} durante un ciclo de funcionamiento del chopper viene definida por:

$$W_R = R_{ex} I_{cc}^2 \, (T - t_{ON}) \tag{7.149}$$

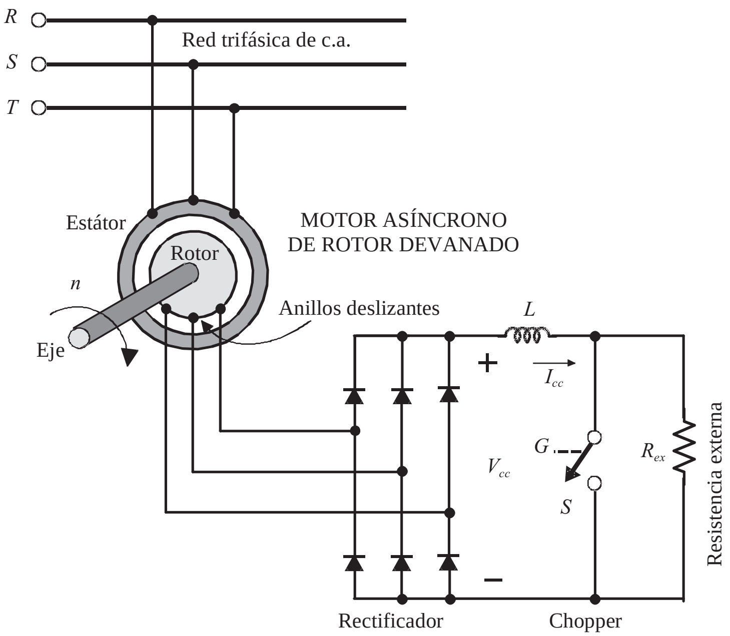


Figura 7.80. Regulación de velocidad con chopper y resistencia externa en el rotor.

lo que significa que la potencia absorbida por la resistencia externa durante el período T vale:

$$P_R = \frac{1}{T} R_{ex} I_{cc}^2 (T - t_{ON}) = R_{ex} I_{cc}^2 \left(1 - \frac{t_{ON}}{T}\right) \tag{7.150}$$

y teniendo en cuenta la definición (7.148) se puede escribir:

$$P_R = R_{ex} I_{cc}^2 (1 - k) = R_{ex}^* I_{cc}^2 \tag{7.151}$$

donde R_{ex}^* representa la resistencia efectiva externa, que vale:

$$R_{ex}^* = R_{ex} (1 - k) \tag{7.152}$$

Cuando $k = 0$, el interruptor estático del chopper está abierto todo el tiempo y se tiene $R_{ex}^* = R_{ex}$ y cuando $k = 1$ el interruptor estático S está cerrado, por lo que la resistencia externa queda cortocircuitada y $R_{ex}^* = 0$; en este caso la resistencia total del rotor por fase es únicamente la resistencia de cada fase del devanado rotórico del motor. Al variar k entre 0 y 1, la resistencia efectiva varía en el rango $0 < R_{ex}^* < R_{er}$, dando lugar a las curvas par-velocidad mostradas en la Figura 7.81.

Si como se señaló en el Capítulo 4, se denomina E_2 a la f.e.m. inducida por fase en el rotor en reposo y la f.e.m. inducida en el rotor móvil con deslizamiento s se denomina E_{2s}, la relación entre ambas f.e.m.s. se señaló en (4.10) y vale:

$$E_{2s} = sE_2 \tag{7.153}$$

La frecuencia del rotor f_2 respecto de la frecuencia de las corrientes del estátor f_1, para un *deslizamiento s* vale:

$$f_2 = sf_1 \tag{7.154}$$

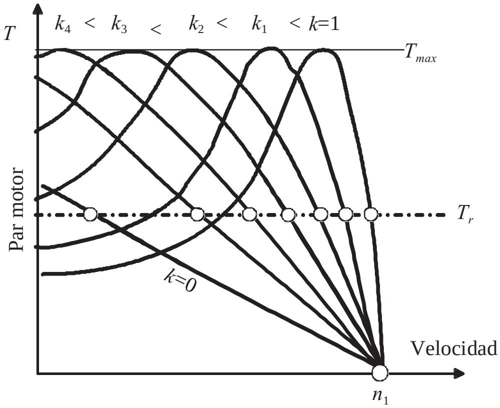


Figura 7.81. Curvas par-velocidad para diversos valores del ciclo de trabajo *k* del chopper.

La tensión rectificada V_{cc} del circuito de la Figura 7.80, teniendo en cuenta (7.43), es:

$$V_{cc} = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi} = \frac{3(\sqrt{3}\sqrt{2}E_{2s})}{\pi} = s\frac{3\sqrt{6}}{\pi}E_2 \tag{7.155}$$

donde se ha tenido en cuenta que $V_m = \sqrt{2}E_{2s} = s\sqrt{2}E_2$, que es la tensión máxima por fase que alimenta al puente de diodos.

Si se denomina P_a a la ***potencia del entrehierro*** (es decir, la potencia que se transfiere del estátor al rotor), la potencia disipada en el circuito del rotor, de acuerdo con (4.68), vale:

$$P_{cu2} = sP_a \tag{7.156}$$

donde sP_a se denomina potencia de deslizamiento. Si se desprecian las pérdidas en el cobre del devanado del rotor frente a la potencia disipada en la resistencia externa R_{ex}, se puede escribir:

$$sP_a = V_{cc}I_{cc} \tag{7.157}$$

y teniendo en cuenta que según (4.73) se cumple:

$$P_a = T \cdot 2\pi\frac{n_1}{60} = T \cdot \Omega_1 \tag{7.158}$$

donde Ω_1 representa la velocidad de sincronismo del campo giratorio en rad/s, al sustituir (7.158) en (7.157) y teniendo en cuenta (7.155), resulta:

$$sT \cdot \Omega_1 = s\frac{3\sqrt{6}}{\pi}E_1 \cdot I_{cc} \tag{7.159}$$

es decir:

$$T = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\frac{E_2}{\Omega_1}I_{cc} \tag{7.160}$$

lo que significa que el par electromagnético desarrollado por el motor es proporcional a la corriente continua rectificada en el circuito del rotor, o de otro modo, *la corriente I_{cc} es una*

imagen del par motor, consecuencia importante a tener en cuenta cuando se realizan regulaciones de velocidad utilizando sistemas realimentados. Este método de regulación de velocidad por control estático de la resistencia del rotor tiene el grave inconveniente de que el rendimiento es pequeño, sobre todo con altos deslizamientos; sin embargo, el sistema tiene una electrónica muy simple y por ello encuentra aplicaciones en mecanismos de elevación y transporte tales como grúas, cabrestantes, montacargas, etc.

7.12.5. Regulación de velocidad por recuperación de la potencia de deslizamiento

En el sistema de regulación analizado en el epígrafe anterior, la potencia de deslizamiento sP_a se transformaba, según (7.156), en potencia disipada en las resistencias eléctricas del rotor y de ahí su bajo rendimiento por la gran energía disipada en pérdidas por efecto Joule del rotor. Téngase en cuenta que el efecto de la resistencia o resistencias externas es producir tensiones a la frecuencia $f_2 = sf_1$ que se oponen a las f.e.m.s. inducidas en los devanados rotóricos. Sin embargo, si en vez de colocar un reóstato de arranque en los anillos del rotor, se introducen en los mismos una f.e.m. trifásica a la frecuencia $f_2 = sf_1$ que tenga la posibilidad de ajustar tanto su magnitud como su fase, se podrá aumentar el rendimiento del conjunto. La forma práctica de introducir esta f.e.m. externa es mediante un montaje denominado *recuperación de la energía de deslizamiento*, por el que la potencia sP_a se devuelve a la red.

En la historia de la ingeniería eléctrica se han empleado diferentes esquemas para regular el deslizamiento de una forma activa utilizando la conexión en cascada de varias máquinas eléctricas rotativas, como los sistemas Kramer (1908), Scherbius (1912) y también el motor Schrage (1914) de escobilllas deslizantes, todos ellos en la actualidad ya obsoletos. Sin embargo, la electrónica de potencia ha permitido la reproducción de alguno de ellos sin utilizar máquinas electromecánicas. En la Figura 7.82 se muestra el ***accionamiento eléctrico Kramer estático***, que permite una regulación de velocidad por debajo de la correspon-

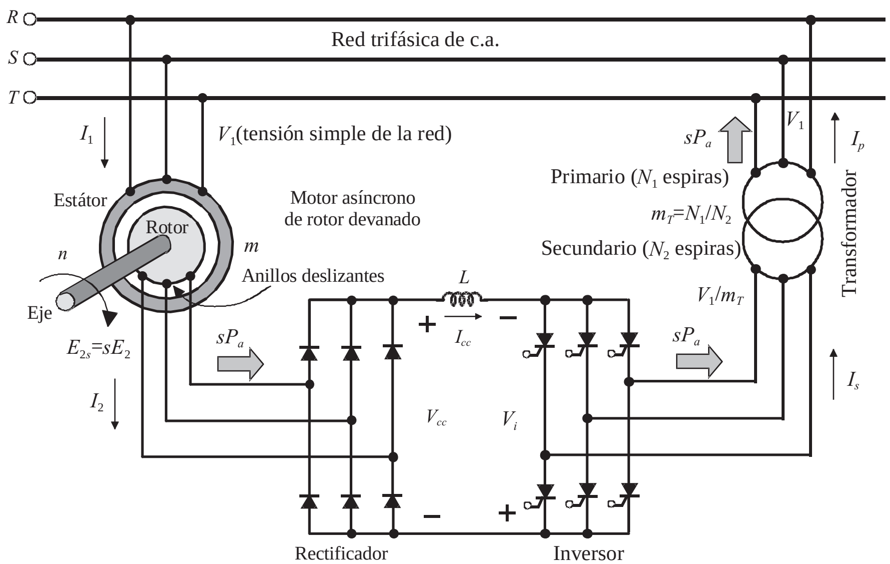


Figura 7.82. Accionamiento Kramer estático.

diente al sincronismo y de ahí que algunos autores denominen a este montaje como *cascada subsíncrona*.

Como se indica en la Figura 7.82, el sistema estático Kramer tiene un rectificador en puente trifásico que transforma la c.a. del rotor a la frecuencia de deslizamiento $f_2 = sf_1$ en c.c. y dispone de una inductancia de filtrado y un inversor conmutado por línea con tiristores que devuelve la energía del rotor a la red a través de un transformador trifásico. Si se supone que en el motor asíncrono los factores de devanado de estátor y rotor son iguales entre sí (o simplemente que los factores son iguales a 1), entonces la relación de transformación entre estátor y rotor es la relación de espiras, es decir:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \tag{7.161}$$

y teniendo en cuenta (7.153), la f.e.m. por fase en el rotor móvil será igual a:

$$E_{2s} = sE_2 = s\,\frac{E_1}{m} \tag{7.162}$$

Si se denomina V_1 a la tensión eficaz por fase aplicada al estátor del motor y se desprecian las caídas de tensión de los devanados del estátor y del rotor, entonces $E_1 = V_1$, por lo que la tensión V_{cc} que se obtiene a la salida del puente rectificador de la Figura 7.82, de acuerdo con (7.155) y (7.162), será:

$$V_{cc} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\,\frac{sV_1}{m} \tag{7.163}$$

Si se considera ahora el inversor de la Figura 7.82 conectado a la red a través de un transformador de relación m_T (es importante observar en la Fig. 7.82 que se ha denominado *primario* al devanado conectado a la red y *secundario* al devanado que está unido al inversor, aunque la transferencia de energía va en sentido inverso), la tensión V_i del inversor está relacionada con la tensión simple de la red V_1 y con el ángulo α de encendido de los tiristores por la expresión (7.64*b*):

$$V_i = \frac{3(\sqrt{3}V_m)}{\pi}\cos\alpha = \frac{3\left(\sqrt{3}\,\sqrt{2}\,\dfrac{V_1}{m_T}\right)}{\pi}\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad V_i = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\,\frac{V_1}{m_T}\cos\alpha \tag{7.164}$$

Si se desprecia la resistencia de la inductancia de filtrado, entonces en la malla eléctrica intermedia de c.c. se cumple:

$$V_{cc} + V_i = 0 \tag{7.165}$$

y sustituyendo (7.163) y (7.164) en (7.165) resulta:

$$\frac{3\sqrt{6}}{\pi}\,\frac{sV_1}{m} + \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\,\frac{V_1}{m_T}\cos\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad s = -\frac{m}{m_T}\cos\alpha = -m_\Delta\cdot\cos\alpha \tag{7.166}$$

donde $m_\Delta = m/m_T$. El ángulo α de encendido debe ser superior a 90° como así le corresponde a un rectificador controlado trabajando en el modo inversor. De este modo, según (7.166) al variar α entre 90° y 180°, el deslizamiento s cambiará entre 0 y m_Δ. Si se elige $m = m_T$, entonces $m_\Delta = 1$ y se podrá variar el deslizamiento del motor entre 0 y 1; es decir, la velocidad del motor se podrá regular entre la velocidad de sincronismo y cero. Por consiguiente, la

velocidad del motor se puede regular en la zona subsíncrona simplemente ajustando el ángulo de encendido de los tiristores del inversor. Si se siguen despreciando las pérdidas de potencia del motor, la potencia de deslizamiento vale, según (7.157):

$$sP_a = V_{cc}I_c \quad \Rightarrow \quad P_a = \frac{V_{cc}I_{cc}}{s} \tag{7.167}$$

Por consiguiente, el valor del par electromagnético producido por el motor, teniendo en cuenta además (7.158), será:

$$T = \frac{P_a}{\Omega_1} = \frac{V_{cc}I_{cc}}{s\Omega_1} \tag{7.168}$$

donde Ω_1 es la velocidad angular de sincronismo del campo magnético giratorio en rad/s. Sustituyendo (7.163) en (7.168) resulta:

$$T = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\frac{sV_1}{m}\frac{I_{cc}}{s\Omega_1} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\frac{V_1 I_{cc}}{m\Omega_1} \tag{7.169}$$

que nos indica que el par es proporcional a la corriente continua I_{cc}. En la Figura 7.83 se muestran las curvas par-velocidad para diversos ángulos de encendido (n_s es la velocidad de sincronismo nominal), que son similares a las de un motor de c.c. con excitación en derivación o también con excitación independiente, en este caso para diversas tensiones aplicadas al inducido.

Este método de regulación de velocidad se utiliza en máquinas de gran potencia (MW) en las que un ajuste de la velocidad en amplios rangos da lugar a una gran potencia de deslizamiento. Si el rango de variación es pequeño, entonces el sistema Kramer tiene la ventaja de que la potencia de los convertidores electrónicos es mucho menor que la potencia del motor asíncrono, ya que se diseñan solamente para la potencia de deslizamiento de la máquina; por ejemplo, si sólo se desea regular la velocidad en el rango comprendido entre el 80 y 100 por 100 de la velocidad de sincronismo, la potencia de los convertidores electrónicos será solamente el 20 por 100 de la potencia del motor (ya que el deslizamiento máximo previsto es del 20 por 100).

El sistema Kramer estático se puede modificar para que funcione por encima de la velocidad de sincronismo, lo que requiere que la potencia de deslizamiento pueda fluir en ambos sentidos, es decir, desde el rotor del motor a la red o desde la red al rotor. Para efectuar esta doble conversión, se debería sustituir el rectificador fijo de la Figura 7.82 por un rectificador

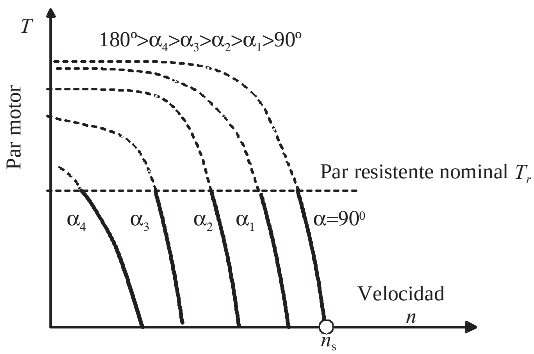


Figura 7.83. Curvas par-velocidad para diferentes ángulos de encendido.

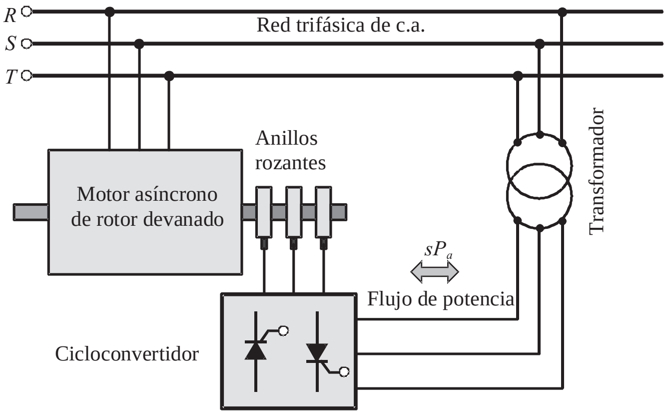


Figura 7.84. Accionamiento Scherbius estático con cicloconvertidor.

controlado y de este modo ambos convertidores controlados de la Figura 7.82 pueden funcionar en régimen de rectificación o de inversión. Esta idea es difícil de implementar en la práctica por las diferentes frecuencias a las que deben trabajar ambos rectificadores controlados, que provoca problemas de sincronización de señales en las puertas de los tiristores, y es por ello que en la práctica se sustituyen ambos convertidores por un *cicloconvertidor*, de acuerdo con el esquema de la Figura 7.84.

Este montaje se denomina ***accionamiento Scherbius estático***. El cicloconvertidor permite que la potencia de deslizamiento circule en ambos sentidos y de este modo se puede regular la velocidad de la máquina tanto en la zona de velocidades subsíncronas como supersíncronas.

Ejemplo de aplicación 7.15

Un motor asíncrono trifásico de 4.000 kW, 5 kV, 50 Hz, 10 polos de rotor devanado, se utiliza para mover una bomba centrífuga a velocidad variable con un sistema de accionamiento Kramer estático análogo al mostrado en la Figura 7.82. Tanto el estátor como el rotor del motor están conectados en estrella. Cuando el motor está parado y se aplica al estátor la tensión nominal de 5 kV, se mide entre dos anillos del rotor una tensión de 2.000 V. Un transformador trifásico Yy0 de relación 5.000/500 V se conecta entre la línea y el inversor. Si el motor desarrolla una potencia mecánica de 1.200 kW a 480 r.p.m., calcular: a) potencia que devuelve el rotor a la red a través del inversor; b) tensión entre los anillos del rotor; c) corriente I_{cc} de la etapa de c.c.; d) ángulo de encendido del inversor; e) corrientes eficaces en el primario y secundario del transformador. NOTA: Suponer que el motor y el transformador son ideales y sin pérdidas.

Solución

a) La velocidad de sincronismo del motor vale:

$$n_1 = \frac{60 f_1}{p} = \frac{60 \cdot 50}{5} = 600 \text{ r.p.m.}$$

El deslizamiento del motor en las condiciones especificadas vale:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} = \frac{600 - 480}{600} = 20\,\%$$

como quiera que la potencia mecánica interna del motor es igual a 1.200 kW, la potencia de entrehierro vale:

$$P_{mi} = P_a(1 - s) \quad \Rightarrow \quad 1.200 = P_a(1 - 0{,}2) \quad \Rightarrow \quad P_a = \frac{1.200}{0{,}8} = 1.500 \text{ kW}$$

y por consiguiente, la potencia de deslizamiento, que es la potencia que devuelve el motor a la red, es:

$$sP_a = 0{,}2 \cdot 1.500 = 300 \text{ kW}$$

b) La f.e.m. de línea que se induce en el rotor cuando la máquina está parada es de 500 V, por lo que la relación de transformación del motor asíncrono vale:

$$m = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{E_2} = \frac{5.000/\sqrt{3}}{2.000/\sqrt{3}} = 2{,}5$$

Como quiera que la tensión simple de la red es de $5.000/\sqrt{3}$, y de acuerdo con (7.163), la tensión de c.c. que sale del rectificador vale:

$$V_{cc} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\frac{sV_1}{m} = \frac{3\sqrt{6}}{\pi}\frac{0{,}2 \cdot \dfrac{5.000}{\sqrt{3}}}{2{,}5} \approx 540{,}2 \text{ voltios}$$

c) La potencia de deslizamiento, de acuerdo con (7.167), se puede escribir:

$$sP_a = V_{cc}I_{cc} \quad \Rightarrow \quad 300.000 = 540{,}2 \cdot I_{cc} \quad \Rightarrow \quad I_{cc} = \frac{300.000}{540{,}2} = 555{,}36 \text{ amperios}$$

d) Para calcular el ángulo de encendido de los tiristores aplicamos la expresión (7.166), resultando:

$$s = -\frac{m}{m_T}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = -\frac{s \cdot m_T}{m} = -\frac{0{,}2 \cdot \dfrac{5.000}{500}}{2{,}5} = -0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 143{,}13°$$

e) La corriente I_{cc} de la etapa de c.c. se ha calculado en el apartado *c*) y vale 555,36 amperios. Para calcular la corriente en el lado de corriente alterna del inversor (que corresponde a la corriente eficaz en el secundario del transformador) debemos aplicar la expresión (7.69), resultando ser:

$$I_s = \sqrt{\frac{2}{3}}\,I_{cc} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,553{,}36 = 453{,}17 \text{ amperios}$$

y por consiguiente, la corriente primaria del transformador, supuesto éste ideal, será:

$$I_p = \frac{I_s}{m_T} = \frac{453{,}17}{5.000/500} = 45{,}317 \text{ amperios}$$

*7.12.6. Control vectorial de motores asíncronos

El control vectorial (*vector control* en inglés), denominado también control por orientación de campo (*field oriented control*), constituye el método de regulación de velocidad más sofisticado y moderno de los motores asíncronos. La base de este método de regulación es controlar tanto la magnitud como la fase del flujo magnético del motor asíncrono para conseguir un funcionamiento análogo al que tienen

los motores de c.c. y que hasta fechas muy recientes han representado el motor por excelencia en los accionamientos eléctricos de velocidad variable. De acuerdo con el epígrafe 6.8 del Capítulo 6, en un motor de c.c. el valor del par electromagnético producido por esta máquina es de la forma:

$$T = K_T \Phi I_i \tag{7.170}$$

De la ecuación anterior se deduce que la regulación del par de un motor de c.c. se puede realizar modificando bien sea el flujo magnético Φ, la corriente que atraviesa el inducido I_i o de ambas magnitudes a la vez. Para mejorar la dinámica del sistema generalmente la mejor regulación se realiza manteniendo constante el flujo magnético y variando la corriente que atraviesa el inducido, en virtud de que la inductancia del devanado inducido es mucho menor que la del inductor, lo que significa que la constante de tiempo del inducido es menor que la del inductor, lo que se traduce en una respuesta más rápida.

Si se considera el esquema de la Figura 7.85*a*, en que se representa un motor de c.c. con excitación separada, se observa que en este motor se tiene:

a) Un campo magnético estacionario producido por el devanado de excitación o campo inductor que lleva una corriente I_e. Este devanado produce un flujo magnético Φ a lo largo del eje de los polos, que se denomina **eje directo** o **eje *d*** del motor.

b) Para generar un par electromagnético en los conductores del rotor, se debe hacer circular una corriente por el devanado inducido I_i tal como se señala en la Figura 7.85*a*. Debido a que el rotor lleva un colector de delgas y a la situación del eje de escobillas que lleva el conmutador anterior y que se sitúa en la línea neutra de la máquina, las corrientes del inducido producen una f.m.m. que tiene lugar en el eje de escobillas, es decir, a 90º del eje magnético del inductor, y que se conoce como **eje en cuadratura** o **eje *q***.

En la Figura 7.85*b* se muestra para mayor claridad los fasores espaciales de flujo y f.m.m. de un motor de c.c. y que conservan sus posiciones constantes en el espacio (es decir, realmente son *vectores espaciales*). De acuerdo con la expresión (7.170), la producción del par en un motor de c.c. es proporcional al producto del flujo magnético del inductor, que a su vez es proporcional a la corriente de excitación I_e y de la corriente que atraviesa el inducido I_i, que a su vez es proporcional a la f.m.m. de este devanado. Debido a que la f.m.m. del inducido es perpendicular al flujo magnético del inductor, la variación de la corriente que circula por este devanado no modificará o afectará al campo magnético inductor (se consideran despreciables los efectos de la reacción de inducido); se dice por ello que las corrientes del inductor y del inducido están **desacopladas**, de este modo manteniendo la corriente de excitación constante, los cambios del par seguirán los cambios en la corriente aplicada al inducido instantánea y exactamente.

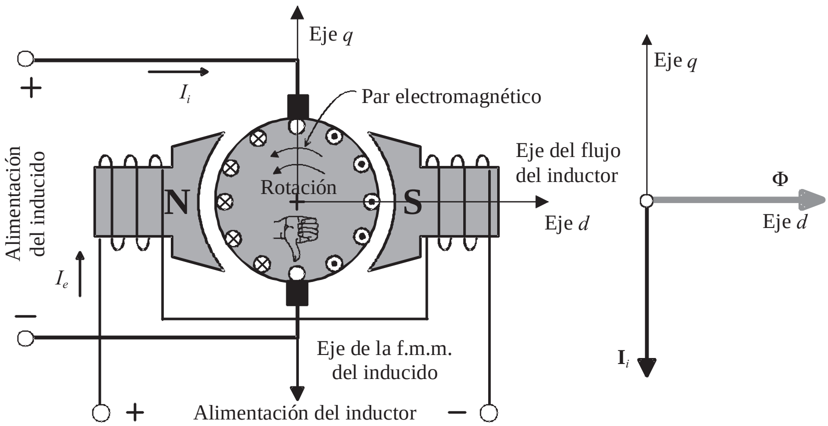


Figura 7.85. Motor de c.c. con excitación independiente.

En un motor asíncrono la situación es mucho más complicada que en un motor de c.c. En este caso hay un devanado trifásico en el estátor, y la f.m.m. producida por este arrollamiento es giratoria, es decir, se mueve a la velocidad angular de sincronismo $\omega_1 = 2\pi f_1$, siendo f_1 la frecuencia de las corrientes estatóricas. El rotor gira a la velocidad angular mecánica $\Omega = 2\pi n/60$ (donde n se mide en r.p.m.), que corresponde a una velocidad angular eléctrica $p\Omega$, siendo p el número de pares de polos del motor; pero teniendo en cuenta que la pulsación de las corrientes del rotor es igual a ω_2 (que se denomina pulsación de deslizamiento), la f.m.m. del rotor gira a una velocidad total eléctrica $\omega_2 + p\Omega$ que es igual a ω_1; de este modo las f.m.m.s. del estátor y del rotor están enclavadas eléctricamente (a esta igualdad la designan algunos autores como *condición de autopilotaje del motor asíncrono*). La interacción de estas dos f.m.m.s. produce la f.m.m. resultante de imanación, que crea a su vez el fujo máximo en el entrehierro de la máquina. En la Figura 7.86*a* se muestra la orientación del campo magnético (flujo) y de las f.m.m.s. en un motor asíncrono, que es una situación espacial más general que la estudiada en el epígrafe 4.16 del Capítulo 4. Debe destacarse que el ángulo que forma el fasor espacial de f.m.m. del estátor y del flujo en el entrehierro, y que se ha designado por δ_s en la Figura 7.86*a*, no es necesariamente de 90° como sucede en el motor de c.c. Con objeto de identificar las posiciones que van siguiendo los fasores espaciales de f.m.m. del motor asíncrono, se asigna en la Figura 7.86*a* un sistema de ***coordenadas estacionario*** (β, α), de tal modo que el eje β coincide con la horizontal mientras que el eje α se sitúa 90° retrasado respecto del anterior.

La producción de un par electromagnético en el motor asíncrono procede, como sabemos, del esfuerzo de alineación de las f.m.m.s. de la máquina, o de otro modo más visual, de la atracción y repulsión de los polos equivalentes que se forman, y que se muestran en la Figura 7.86*a*. Recuérdese, de acuerdo con la expresión (4.215) del Capítulo 4, que el par electromagnético producido por un motor asíncrono viene expresado por:

$$T = k_T \Phi_m \mathcal{F}_s \operatorname{sen} \delta_s \tag{7.171}$$

donde se ha denominado $\mathcal{F}_s$ al fasor espacial representativo de la f.m.m. del estátor y δ_s al ángulo que forma el fasor anterior con el de flujo magnético en el entrehierro. Como quiera que $\mathcal{F}_s$ es proporcional a la corriente del estátor I_s, la ecuación anterior se puede escribir de un modo equivalente:

$$T = K_T \Phi_m I_s \operatorname{sen} \delta_s \tag{7.172}$$

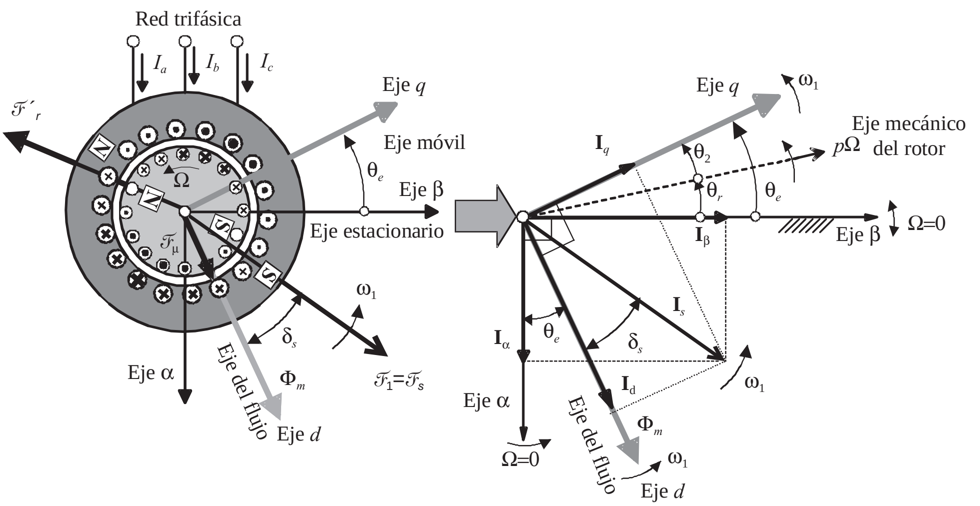


Figura 7.86. Fasores espaciales de f.m.m. en un motor asíncrono.

De acuerdo con la Figura 7.86*b*, el fasor I_s puede descomponerse en dos partes: $I_d = I_s \cos \delta_s$ paralelo al eje de campo o **eje directo *d***, que gira a la velocidad de sincronismo ω_1 del campo giratorio, e $I_q = I_s \operatorname{sen} \delta_s$ perpendicular al eje anterior y denominado **eje cuadratura** o **eje *q****. A estas corrientes se las conoce como ***componentes del campo orientado***. De este modo (7.172) se transforma en:

$$T = K_T \Phi_m I_q \tag{7.173}$$

En la Figura 7.86*b* se observa que la componente I_d está en fase con el flujo magnético, por lo que representa la componente de la corriente del estátor responsable de producir el flujo magnético y es análoga a la corriente de excitación I_e del motor de c.c. Por otro lado, la componente I_q de la corriente del estátor está en cuadratura con el flujo, y si se comparan las ecuaciones (7.170) y (7.173), la corriente I_q es análoga a la corriente de inducido I_i del motor de c.c. que se utiliza para controlar el par del motor. Pese a esta analogía aparente, hay diferencias sustanciales entre el motor de c.c. y el motor asíncrono que conviene destacar: *en el motor de c.c. el eje de flujo es fijo (eje directo) y la f.m.m. del inducido tiene lugar a 90º respecto del flujo magnético (eje en cuadratura), en tanto que en el motor asíncrono el flujo magnético es giratorio, por lo que los ejes directo y cuadratura de la Figura 7.86b se están moviendo a la velocidad de sincronismo y el ángulo* δ_s *que forman la f.m.m. resultante del estátor* $\mathscr{F}_s$ *y el flujo máximo del entrehierro* Φ_m *no es constante ni igual a 90°, sino que depende del par que produce la máquina; por otro lado, en el motor de c.c. las corrientes del inductor y del inducido circulan por devanados distintos y accesibles desde el exterior, aspecto que no es posible conseguir en el motor de inducción, ya que no se puede actuar separadamente sobre las corrientes generadoras del par* I_q *y de flujo* I_d.

En el diagrama de fasores espaciales de la Figura 7.86*b* se han señalado los ejes estacionarios β y α, los ejes móviles q y d que giran a la velocidad de sincronismo ω_1, la posición del eje mecánico del rotor que gira a una velocidad angular eléctrica $p\Omega$, el fasor $\mathbf{I}_s$ equivalente del estátor y sus componentes (I_β, I_α) en el sistema de referencia (β, α) e (I_q, I_d) en el sistema de referencia móvil (q, d). También se indica la posición espacial del flujo de entrehierro Φ_m que define el *eje d* móvil (eje directo). Se han destacado en la Figura 7.86*b* los siguientes ángulos eléctricos: 1) **ángulo de deslizamiento** θ_2, que forma el *eje síncrono q* con el eje del rotor; 2) **ángulo del rotor** θ_r, que forma el eje del rotor con el eje estacionario β del estátor; 3) **ángulo del campo** θ_e, que es el formado por el *eje d del flujo* y el *eje estacionario* α. La relación entre estos ángulos es $\theta_e = \theta_2 + \theta_r$. Todos los ángulos anteriores dependen del tiempo. Se ha señalado también el ángulo de carga δ_s que forma $\mathbf{I}_s$ y Φ_m, que es un ángulo que no depende del tiempo, pero que depende del par que desarrolla el motor, tal como señala la expresión (7.172).

Como ya se ha indicado antes, la base del control vectorial es copiar el funcionamiento del motor de c.c., y para resolver el problema de control se deben mantener en cuadratura las componentes de imanación I_d y de par I_q de la corriente estatórica, desacoplando ambas componentes de forma que se puedan ajustar independientemente una de otra. En definitiva, en un sistema de control vectorial de motores asíncronos ***hay que controlar en tiempo real la magnitud y fase de las corrientes de alimentación del estátor***, en respuesta a cambios en las demandas de velocidad y de par requeridas por el accionamiento. Es por ello que en el estudio del motor asíncrono y de sus accionamientos se ha hecho necesario acudir a diversas transformaciones matemáticas que relacionen las corrientes eléctricas que se indican en la Figura 7.86. En los ejemplos de aplicación 7.16 y 7.17 se explican dos tipos de transformaciones: la primera de ellas se refiere a la matriz de transformación $\mathbf{T}_{\beta\alpha}$, que convierte un conjunto de devanados trifásico en otro bifásico, ambos estacionarios; en el segundo se explica la transformación definida por la matriz $\mathbf{T}_\theta$, que convierte un sistema bifásico estacionario en otro rotativo que se mueve respecto al primero a la velocidad correspondiente al campo magnético giratorio del estátor ω_1 en rad/s eléctricos. De acuerdo con el diagrama fasorial de la Figura 7.86*b*, es evidente que para determinar las componentes I_d e I_q debe conocerse con exactitud la posición del fasor de flujo magnético en el entrehierro, para lo que se necesita disponer de una

---

* Se advierte al lector que la denominación e incluso la situación relativa de los ejes estacionarios β y α y de los ejes móviles q y d son muy dispares en la bibliografía técnica y varían de unos textos a otros.

señal de realimentación de la amplitud y la posición instantánea del mismo flujo magnético, que puede realizarse de dos modos:

a) ***Control vectorial directo***, que incorpora dos transductores magnéticos en el entrehierro basados en el efecto Hall y situados a 90° eléctricos para averiguar la magnitud y posición del flujo magnetico.
b) ***Control vectorial indirecto***, en el cual se calcula la amplitud y orientación del flujo a partir de los parámetros del motor, y la posición relativa instantánea del rotor se mide mediante un encóder (transductor de posición) situado en el rotor.

El control vectorial directo, aunque teóricamente tiene sus ventajas técnicas, ya que incluye una medida directa del flujo y la situación de su fasor espacial en el motor, tiene problemas de implementación en un ambiente industrial, y es por ello que no suele utilizarse porque carece de la robustez necesaria (en definitiva, lo que sucede es que las ventajas del motor asíncrono frente al motor de c.c. pierden de este modo su eficacia). Es por ello que en la práctica se utiliza un método de control indirecto, midiendo la posición y velocidad del motor con un encóder y determinando a partir de los parámetros de la máquina la posición del fasor espacial del flujo; sin embargo, este método de *estimación del flujo* es bastante sensible a los parámetros del motor, en concreto a los valores de la resistencia e inductancia de los devanados del rotor, que deben medirse con gran precisión. Desgraciadamente, los parámetros del motor usados en los cálculos se miden en ensayos sin carga y no responden a los valores reales en el punto de funcionamiento de la máquina, ya que estos parámetros varían ampliamente con la saturación del circuito magnético, temperatura y frecuencia de las corrientes rotóricas. Es por ello que con este método se deben calcular los parámetros de la máquina y se deben estimar sus variaciones conforme el motor cambia o modifica su punto de trabajo, pero hay que tener en cuenta que para que el comportamiento dinámico del accionamiento sea el adecuado, estas medidas y cálculos deben realizarse en tiempo real y con extraordinaria rapidez para identificar sin errores la posición del fasor espacial del flujo, lo que se consigue incorporando en el sistema de control microprocesadores rápidos y potentes, que incluyen DSP (*digital signal processing),* es decir, procesadores digitales de señales. Las funciones del DSP del sistema de control vectorial son diversas, entre las que destacamos las siguientes: *a*) Procesar las señales obtenidas del encóder para determinar tanto la velocidad del rotor Ω como el ángulo del rotor θ_r; *b*) estimar el valor del flujo a partir de los datos de las tensiones, corrientes y velocidad del motor, incluyendo el modelo matemático de la máquina. *c*) Identificar las dos componentes en eje directo y cuadratura de la corriente a partir de la información de las corrientes trifásicas; *d*) implementar los lazos de control de velocidad y de corriente; *e*) producir las señales de disparo del inversor, que definen la tensión y frecuencia de alimentación del motor; *f*) realizar las operaciones matemáticas que requiere el modelo de la máquina y limitar las variables de control.

En la Figura 7.87 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de control vectorial indirecto que dispone de una etapa de potencia con inversor de corriente. El inversor de corriente dispone de una etapa intermedia de coriente continua que incluye una gran inductancia para mantener constante la corriente en el lado de c.c.; el sistema de potencia incluye lazos de comparación de la corriente para mantener a ésta en los valores requeridos, y es por ello que el inversor de corriente es má sencillo en su funcionamiento que el inversor de tensión.

Obsérvese en la Figura 7.86*b* que para realizar el control vectorial debe determinarse con bastante precisión el valor del ángulo θ_e que permite localizar el fasor de flujo magnético. Este ángulo se obtiene como suma del ángulo que forma el eje del rotor con una referencia fija del estátor θ_r y que se obtiene del encóder o transductor de posición y del ángulo de deslizamiento θ_2 que se obtiene del modelo de máquina que se incluye en la memoria del microprocesador del DSP. En la Figura 7.87 se tiene una entrada de velocidad de consigna Ω^*, que se compara con la velocidad angular del motor Ω para dar una señal de par de consigna T^* a través de un controlador proporcional-integral PI, cuya ganancia proporcional incluye el valor del número de pares de polos de la máquina para transformar la velocidad a radianes eléctricos por segundo. También, de acuerdo con la velocidad de giro real, se define el valor del flujo de entrehierro, de tal modo que por debajo de la velocidad base Ω_b se toma su valor nominal y por encima de ella la máquina trabaja por debilitamiento del campo. Del modelo de máquina se obtienen

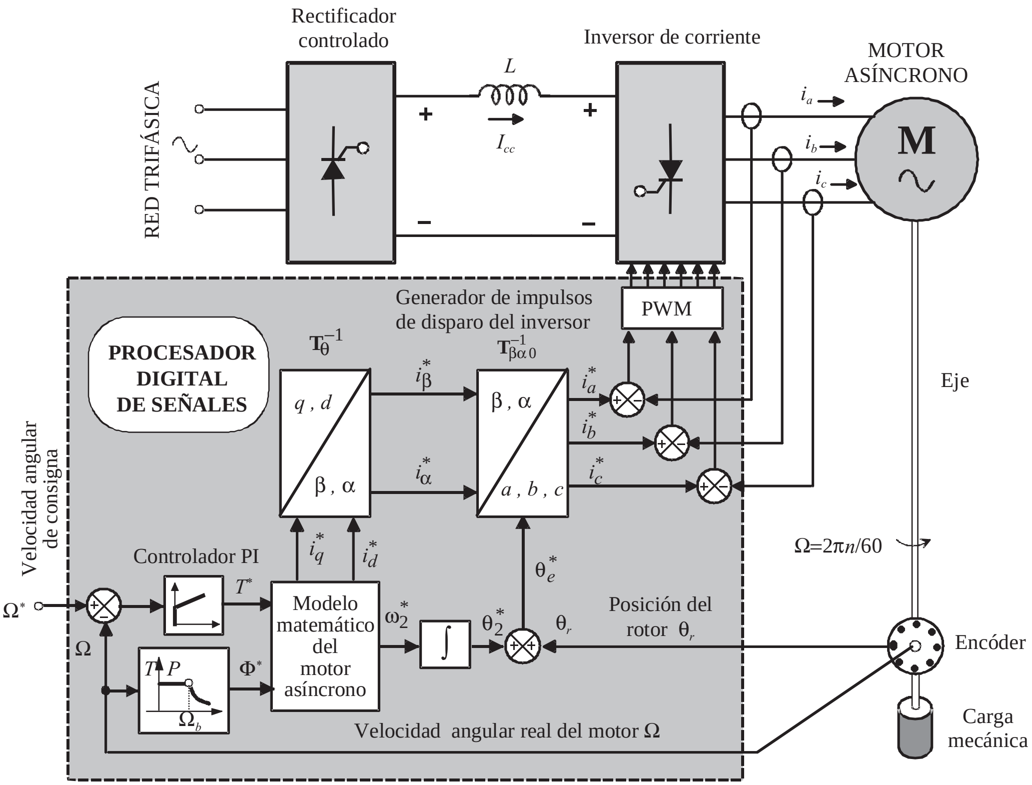


Figura 7.87. Control vectorial indirecto de la velocidad de un motor asíncrono.

las componentes de corriente de consigna en los ejes móviles cuadratura y directo: i_q^* e i_d^* y el valor de la velocidad angular eléctrica de deslizamiento ω_2^*, que al integrarla da lugar al ángulo de deslizamiento de consigna θ_2^*; al sumar este ángulo θ_2^* al ángulo eléctrico del rotor θ_r se obtiene el ángulo de consigna del flujo magnético θ_e^* (recuérdese, según señala la Figura 7.86*b*, que la relación entre estos ángulos es $\theta_e = \theta_2 + \theta_r$). Por otra parte, el DSP dispone de un bloque de transformación de ejes móviles a fijos que convierte las corrientes i_q^* e i_d^* en i_β^* e i_α^*, respectivamente, mediante la matriz de transformación T_θ^{-1} [véase ecuación (7.191) del ejemplo de aplicación 7.17] y posteriormente se incluye otra matriz de transformación $T_{\beta\alpha 0}^{-1}$ [véase ecuación (7.181) del ejemplo de aplicación n.º 7.16] que convierte las corrientes i_β^* e i_α^* en las corrientes trifásicas de consigna i_a^*, i_b^* e i_c^*. Estas corrientes se comparan con las reales i_a, i_b e i_c absorbidas por el motor para entrar en un bloque que genera los impulsos de disparo del inversor PWM que alimenta la máquina.

Todas las funciones señaladas en el recuadro sombreado de la Figura 7.87 se realizan con un procesador digital de señales DSP. Los primeros DSP, que aparecieron en el mercado en la década de 1980, facilitaron el desarrollo de accionamientos de control vectorial, y se ha producido desde entonces un gran desarrollo de los mismos. En la actualidad existen nuevos controladores DSP, como los modelos TMS320x24x de Texas Instruments, que proporcionan una gran capacidad de procesamiento y que incluyen periféricos específicos como generador de señales PWM, doble convertidor A/D (analógico-digital) y el QEP (*Quadrature Encoder Pulse*), que es el registro encargado de determinar la posición y la velocidad del motor a través del encóder. Las dificultades inherentes al desarrollo de aplicaciones en tiempo real con DSP, ha hecho aconsejable el empleo de programas de simulación de propósito general tipo MATLAB-SIMULINK, que se utilizan para comprobar el funcionamiento de los algoritmos de

cálculos empleados. Existen también paquetes de software específicos para aplicaciones de control digital de motores, como los desarrollados por la compañía Technosoft, con los que se consiguen resultados más rápidos y fiables.

Los últimos avances en control vectorial de motores asíncronos no incluyen ningún tipo de transductor (*sensorless*, sin sensores) para detectar la posición del fasor espacial de flujo, y se estima la velocidad del motor únicamente a partir de medidas de tensiones y corrientes de la máquina. Los procedimientos empleados para ello utilizan técnicas de la ingeniería de control moderna y del tratamiento de señales como: sistemas adaptativos, filtros de Kalman, observadores de velocidad tipo Luenberger, etc. Comprenderá el lector la complejidad que supone la implementación de estos métodos, que requieren del ingeniero una gran formación multidisciplinar. Para el lector interesado en este tema se le remite al texto publicado por el *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, IEEE (Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos), editado por K. Rajashekara y que se menciona en la bibliografía de este capítulo.

Ejemplo de aplicación 7.16. Transformación de Clarke

En la Figura 7.88 se muestra una máquina asíncrona trifásica con tres devanados en el estátor, a, b y c, desfasados en el espacio 120° eléctricos con N_s espiras por polo y fase y factor de devanado k_w que llevan, respectivamente, corrientes i_a, i_b e i_c. Se quiere sustituir el efecto de este devanado trifásico por otro bifásico formado por dos devanados α y β desfasados en el espacio 90° con el mismo factor de devanado K_w. El número de espiras del conjunto de ambos devanados es el mismo, lo que significa que el número de espiras por polo y fase del devanado bifásico es $3N_s/2$. El ***eje*** *β del devanado bifásico forma θ grados eléctricos respecto del* ***eje a*** *del sistema trifásico. Si los dos sistemas deben producir la misma f.m.m. en el entrehierro de la máquina, calcular: a) Los valores de las corrientes i_α e i_β en función de i_a, i_b e i_c; b) contestar a la pregunta anterior en el caso de que θ = 0° y determinar las expresiones de las corrientes i_α e i_β si las corrientes aplicadas al devanado trifásico son:*

$$i_a = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha) \quad ; \quad i_b = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha - 120°) \quad ; \quad i_c = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha + 120°)$$

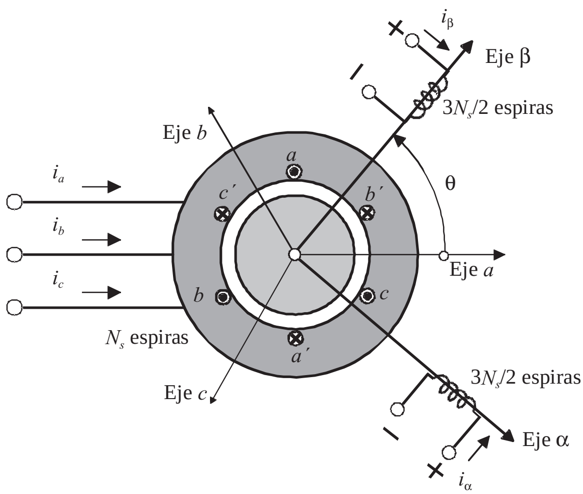


Figura 7.88. Transformación de Clarke.

Solución

a) En el esquema de la Figura 7.88 las f.m.m.s. producidas por el devanado trifásico proyectadas sobre los ejes α y β del sistema bifásico son:

$$\mathcal{F}_\beta = \frac{4}{\pi} N_s K_w [i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta - 120°) + i_c \cos(\theta + 120°)]$$

$$\mathcal{F}_\alpha = \frac{4}{\pi} N_s K_w [i_a \operatorname{sen}\theta + i_b \operatorname{sen}(\theta - 120°) + i_c \operatorname{sen}(\theta + 120°)] \quad (7.174)$$

Mientras que el devanado bifásico, que tiene $3N_s/2$ espiras por polo y fase, produce en estos mismos ejes unas f.m.m.s.:

$$\mathcal{F}_\beta = \frac{4}{\pi}\frac{3N_s K_w}{2} i_\beta \quad ; \quad \mathcal{F}_\alpha = \frac{4}{\pi}\frac{3N_s K_w}{2} i_\alpha \quad (7.175)$$

al igualar las f.m.m.s. del mismo eje de las ecuaciones (7.174) y (7.175) se obtiene:

$$i_\beta = \frac{2}{3}[i_a \cos\theta + i_b \cos(\theta - 120°) + i_c \cos(\theta + 120°)]$$

$$i_\alpha = \frac{2}{3}[i_a \operatorname{sen}\theta + i_b \operatorname{sen}(\theta - 120°) + i_c \operatorname{sen}(\theta + 120°)] \quad (7.176)$$

Estas ecuaciones representan los valores de las corrientes que deben circular por el devanado bifásico para que produzcan las mismas f.m.m.s. que el sistema trifásico. Ahora bien, para que la transformación sea biunívoca deben aparecer tres nuevas variables de corriente después de la conversión. Como quiera que las corrientes i_β e i_α calculadas del sistema bifásico producen la misma f.m.m. que el conjunto trifásico, habrá que introducir una tercera variable que no contribuya a la creación de f.m.m. en el entrehierro, y por este motivo es conveniente que esta tercera variable sea la **corriente homopolar** o de **secuencia cero** i_0 que se emplea en el estudio de las componentes simétricas y que viene expresada por:

$$i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c) \quad (7.177)$$

Téngase en cuenta que si la alimentación trifásica original es a tres hilos (en estrella o triángulo), siempre se cumplirá la igualdad: $i_a + i_b + i_c = 0$, por lo que entonces la corriente i_0 siempre valdrá cero.

De este modo, incluyendo (7.177) en (7.176) la ley de transformación trifásica a bifásica vendrá expresada en forma matricial por:

$$\begin{Bmatrix} i_\beta \\ i_\alpha \\ i_0 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120°) & \cos(\theta + 120°) \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}(\theta - 120°) & \operatorname{sen}(\theta + 120°) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{Bmatrix} \quad (7.178)$$

donde la matriz de transformación vale:

$$\mathbf{T}_{\beta\alpha 0} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120°) & \cos(\theta + 120°) \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}(\theta - 120°) & \operatorname{sen}(\theta + 120°) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (7.179)$$

que se denomina ***matriz de Clarke*** y que representa la transformación de las variables *a*, *b* y *c* del estátor en las variables β, α, 0. Esta matriz de transformación $\mathbf{T}_{\beta\alpha0}$ se aplica no solamente a las corrientes del estátor, sino también a los flujos y a las tensiones de estos devanados.

Por cálculo matricial se puede demostrar que la transformación inversa de Clarke viene expresada por:

$$\mathbf{T}_{\beta\alpha0}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 1 \\ \cos(\theta - 120°) & \operatorname{sen}(\theta - 120°) & 1 \\ \cos(\theta + 120°) & \operatorname{sen}(\theta + 120°) & 1 \end{bmatrix} \tag{7.180}$$

b) En el caso de que coincida el eje *a* del sistema trifásico con el eje β del bifásico, entonces se cumple $\theta = 0$, por lo que las matrices de transformación anteriores se convierten en:

$$\mathbf{T}_{\beta\alpha0} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{T}_{\beta\alpha0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3/2} & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3/2} & 1 \end{bmatrix} \tag{7.181}$$

Y si las corrientes trifásicas son:

$$i_a = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha) \quad ; \quad i_b = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha - 120°) \quad ; \quad i_c = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha + 120°)$$

al aplicar (7.178), y teniendo en cuenta (7.181), resulta:

$$\begin{Bmatrix} i_\beta \\ i_\alpha \\ i_0 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -\sqrt{3/2} & \sqrt{3/2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} I_m \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ I_m \cos(\omega_1 t + \alpha - 120°) \\ I_m \cos(\omega_1 t + \alpha + 120°) \end{Bmatrix} \tag{7.182}$$

que operando da lugar a:

$$i_\beta = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha) \quad ; \quad i_\alpha = -I_m \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha) \quad ; \quad i_0 = 0 \tag{7.183}$$

es decir, se obtienen, como era de esperar, dos corrientes bifásicas desafadas 90° en el tiempo.

Ejemplo de aplicación 7.17. Transformación de ejes fijos a ejes giratorios

En la Figura 7.89 se muestra un juego de dos ***devanados fijos*** *α y β, desfasados en el espacio 90° eléctricos que tienen cada uno N_s espiras y que llevan, respectivamente, corrientes i_α e i_β. Se quiere sustituir el efecto de estos dos devanados estáticos por otro conjunto de dos devanados d y q situados entre sí a 90° pero que se mueven a velocidad angular $\Omega = \omega_1$ rad/s respecto del primero. El número de espiras del conjunto de ambos devanados es el mismo. El* ***eje q*** *del devanado móvil forma θ grados eléctricos respecto del* ***eje β*** *del devanado fijo, siendo $\theta = \omega_1 t + \theta_0$ (donde θ_0 representa la posición inicial en $t = 0$). Si ambos conjuntos deben producir la misma f.m.m. en el entrehierro de la máquina, calcular los valores de las corrientes i_d e i_q en función de i_α e i_β y determinar los valores correspondientes si estas últimas son las obtenidas en (7.183), es decir: $i_\beta = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha)$; $i_\alpha = -I_m \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha)$.*

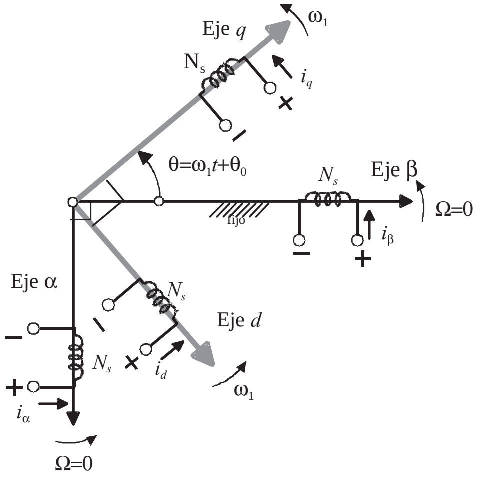


Figura 7.89. Transformación de ejes fijos a ejes giratorios.

Solución

Igualando las f.m.m.s. que producen ambos conjuntos de devanados sobre los ejes q y d resulta:

$$\mathcal{F}_q = N_s i_q = N_s(i_\beta \cos\theta - i_\alpha \operatorname{sen}\theta) \quad ; \quad \mathcal{F}_d = N_s i_d = N_s(i_\beta \operatorname{sen}\theta + i_\alpha \cos\theta) \qquad (7.184)$$

de donde se obtiene la relación de corrientes:

$$i_q = i_\beta \cos\theta - i_\alpha \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad i_d = i_\beta \operatorname{sen}\theta + i_\alpha \cos\theta \qquad (7.185)$$

que se escribe en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} i_q \\ i_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_\beta \\ i_\alpha \end{Bmatrix} \qquad (7.186)$$

es decir, la matriz de transformación vale:

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (7.187)$$

De la ecuación (7.186) se deduce que si las corrientes i_β *e* i_α valen:

$$i_\beta = I_m \cos(\omega_1 t + \alpha) \quad ; \quad i_\alpha = -I_m \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha) \qquad (7.188)$$

y teniendo en cuenta que $\theta = \omega_1 t + \theta_0$, los valores de las corrientes en el eje cuadratura y directo valen:

$$\begin{Bmatrix} i_q \\ i_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \theta_0) & -\operatorname{sen}(\omega_1 t + \theta_0) \\ \operatorname{sen}(\omega_1 t + \theta_0) & \cos(\omega_1 t + \theta_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_m \cos(\omega_1 t + \alpha) \\ -I_m \operatorname{sen}(\omega_1 t + \alpha) \end{Bmatrix} \qquad (7.189)$$

cuyo resultado es:

$$i_q = I_m \cos(\theta_0 - \alpha) \quad ; \quad i_d = I_m \operatorname{sen}(\theta_0 - \alpha) \qquad (7.190)$$

Es importante darse cuenta del significado físico que implica la transformación anterior. En definitiva, se ha sustituido un **sistema bifásico estático** de devanados por un **sistema bifásico móvil**. Las corrientes en el sistema bifásico fijo varían con respecto al tiempo según señala (7.188), mientras que en el sistema móvil y de acuerdo con (7.190) las corrientes son constantes, como si fueran de

corriente continua y solamente dependen de la fase inicial de la corriente α y del ángulo inicial de giro θ_0 (de hecho, si se cumple que $\alpha = \theta_0 = 0$, el resultado (7.190) se convierte en $i_q = I_m$; $i_d = 0$. De este modo la f.m.m. del estátor parece estacionaria vista desde los devanados *d* y *q* móviles.

Por otro lado, la matriz de transformación inversa de (7.187) vale:

$$\mathbf{T}_\theta^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{7.191}$$

es decir, las relaciones inversas a (7.185) son:

$$i_\beta = i_q \cos\theta + i_d\,\text{sen}\,\theta \quad ; \quad i_\alpha = -i_q\,\text{sen}\,\theta + i_d \cos\theta \tag{7.192}$$

y en todas las ecuaciones anteriores se cumple $\theta = \omega_1 t + \theta_0$.

Si se tienen en cuenta los resultados de este ejemplo de aplicación y el anterior, se puede conseguir una transformación conjunta que transforme un conjunto trifásico de devanados fijos *a*, *b* y *c* situados en el estátor por un sistema bifásico móvil *d*, *q*, 0 que se mueve a velocidad angular ω_1 respecto a un referencial fijo. El lector puede demostrar que entonces las relaciones entre las corrientes respectivas dan lugar a la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} i_q \\ i_d \\ i_0 \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120°) & \cos(\theta + 120°) \\ \text{sen}\,\theta & \text{sen}(\theta - 120°) & \text{sen}(\theta + 120°) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{Bmatrix} \tag{7.193}$$

en la que $\theta = \omega_1 t + \theta_0$. La transformación correspondiente se denomina ***transformación de Park*** y su expresión es:

$$\mathbf{T}_{qd0} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - 120°) & \cos(\theta + 120°) \\ \text{sen}\,\theta & \text{sen}(\theta - 120°) & \text{sen}(\theta + 120°) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{7.194}$$

Es importante darse cuenta del significado físico que implica la transformación de Park. En definitiva, se han sustituido los devanados reales de las fases *a*, *b* y *c* del estátor, con sus ejes magnéticos fijos e inmóviles, por dos arrollamientos ficticios *q* y *d* cuyos ejes magnéticos se mueven a la velocidad ω_1 del campo giratorio (es como si estuvieran en un rotor que se moviera a la velocidad de sincronismo). El arrollamiento de índice 0 por el que circula la corriente homopolar i_0 no interviene en el proceso.

Si suponemos que las corrientes de los devanados reales, *a*, *b* y *c*, es un sistema de corrientes trifásicas equilibradas, sabemos que al estar desfasados en el espacio 120° producen un campo magnético giratorio que es síncrono con la pulsación ω_1 de las corrientes. De este modo la f.m.m. del estátor parece estacionaria vista desde los devanados *d* y *q* móviles. Por otro lado, si se considera que las corrientes son trifásicas equilibradas de pulsación ω_1 y que vienen expresadas por:

$$i_a = I_m\,\text{sen}(\omega_1 t + \alpha) \quad ; \quad i_b = I_m\,\text{sen}(\omega_1 t + \alpha - 120°) \quad ;$$
$$i_c = I_m\,\text{sen}(\omega_1 t + \alpha + 120°) \tag{7.195}$$

al aplicar la transformación de Park a (7.195) se obtienen las siguientes corrientes:

$$i_q = I_m \cos(\theta_0 - \alpha) \quad ; \quad i_d = I_m\,\text{sen}(\theta_0 - \alpha) \quad ; \quad i_0 = 0 \tag{7.196}$$

que es el resultado previsto en (7.190). Es decir, la f.m.m. resultante que producen tres devanados desfasados en el espacio 120° eléctricos y alimentados por corrientes trifásicas es equivalente a la

producida por dos devanados en cuadratura que se mueven a la velocidad de sincronismo pero alimentados con corriente continua. Es un gran descubrimiento que hizo R.H. Park en 1929 y que lo aplicó al estudio de alternadores y que sería la base para un estudio generalizado de las máquinas eléctricas que realizaría más tarde Gabriel Kron. La ventaja de la transformación de Park es que las variables que dependen del tiempo en los modelos de máquinas eléctricas: tensiones, corrientes, flujos e incluso los coeficientes de autoinducción e inducción mutua entre devanados que dependen de la posición del rotor se transforman en parámetros constantes, y de ahí la gran simplificación que se obtiene en el estudio de los modelos respectivos de máquinas eléctricas. Este enfoque es muy útil cuando se quieren estudiar las máquinas eléctricas en régimen dinámico y es imprescindible su aplicación para un estudio riguroso de los accionamientos eléctricos.

7.13. ACCIONAMIENTOS ELÉCTRICOS CON MOTORES DE C.A. SÍNCRONOS

La velocidad de un motor síncrono se puede cambiar de una forma sencilla modificando la frecuencia de alimentación, ya que la velocidad de rotación coincide con la de sincronismo del campo magnético giratorio $n = 60\,f/p$ (en r.p.m.), donde f es la frecuencia de alimentación y p el número de pares de polos de la máquina. Para cada frecuencia, la velocidad del motor permanecerá constante a menos que la máquina pierda el sincronismo por haberse aplicado al eje un par resistente superior al máximo.

Considérese por sencillez un motor síncrono trifásico de polos lisos (rotor cilíndrico); la potencia mecánica que desarrolla el motor viene definida por la expresión (5.68) del Capítulo 5, que es la siguiente:

$$P = \frac{3E_0V}{X_s}\,\text{sen}\;\delta \qquad (7.197)$$

donde E_0 es la f.c.e.m. por fase, V la tensión aplicada al motor por fase, X_s es la reactancia síncrona y δ el ángulo de carga, que a su vez es el ángulo que forman los fasores E_0 y V. De acuerdo con la expresión anterior, el valor del par electromecánico producido por el motor síncrono si gira a la velocidad angular mecánica Ω es igual a:

$$T = \frac{P}{\Omega} = \frac{3E_0V}{\Omega X_s}\,\text{sen}\;\delta = \frac{3pE_0V}{\omega X_s}\,\text{sen}\;\delta \qquad (7.198)^*$$

donde se ha tenido en cuenta que la velocidad angular mecánica Ω es igual a ω/p, siendo p el número de pares de polos del motor y ω la pulsación eléctrica, que a su vez es igual a $2\pi f$, (f es la frecuencia de alimentación del estátor).

El valor de la f.c.e.m. del motor E_0 está calculada en la expresión (5.5) del Capítulo 5 y es igual a:

$$E_0 = 4\;K_f K_d K_a\, f N \Phi_m \qquad (7.199)$$

* Si el motor es de polos salientes, se puede demostrar que la expresión correcta del par es:

$$T = \frac{3p}{\omega}\left[\frac{E_0V}{X_d}\,\text{sen}\;\delta + \frac{V^2(X_d - X_q)}{2X_dX_q}\,\text{sen}\;2\delta\right]$$

donde X_d y X_q son, respectivamente, las reactancias síncronas de eje directo y cuadratura. El primer sumando es el par síncrono y el segundo el par de reluctancia. En máquinas con polos lisos se cumple: $X_d = X_q = X_s$.

De acuerdo con la expresión anterior, si se mantiene constante la corriente de excitación, el flujo magnético será constante y por consiguiente la f.c.e.m. del motor será directamente proporcional a la frecuencia de las corrientes del inducido, es decir:

$$E_0 = K_1 f \tag{7.200}$$

Por otro lado, si se denomina L_s a la inductancia síncrona, el valor de la reactancia síncrona a la frecuencia f es:

$$X_s = \omega L_s = 2\pi f L_s \tag{7.201}$$

y sustituyendo (7.200) y (7.201) en (7.199) se obtiene la expresión del par siguiente:

$$T = \frac{3pK_1 fV}{(2\pi f)^2 L_s} \text{ sen } \delta = K \frac{V}{f} \text{ sen } \delta \tag{7.202}$$

donde K es una constante que engloba todos los términos invariantes. La expresión anterior se puede escribir de este modo:

$$T = K \frac{V}{f} \text{ sen } \delta = T_{\text{máx}} \text{ sen } \delta \quad ; \quad \text{donde} \quad T_{\text{máx}} = K \frac{V}{f} \tag{7.203}$$

En la Figura 7.90 se muestra la curva par-ángulo de carga definida por la ecuación anterior. La zona derecha de la curva (para $\delta > 0°$) corresponde al funcionamiento como motor, mientras que la zona izquierda (para $\delta < 0°$) corresponde al trabajo como generador en régimen de frenado regenerativo. El par nominal T_n se obtiene para un punto como el A, donde el ángulo de carga δ_n es del orden de 25 a 30° eléctricos, por lo cual el cociente $T_{\text{máx}}/T_n$ suele estar comprendido entre 2 y 2,5. Aumentando la excitación del motor se eleva el valor de la f.c.e.m. E_0 y por consiguiente se aumenta el par máximo, que en algunos casos puede llegar a valer de 3,5 a 4 veces el par nominal.

Si se considera que el motor trabaja con un par resistente constante e igual al nominal, la máquina funciona en régimen permanente en el punto A. Si en esta situación aumenta el par resistente, se produce una ligera reducción de velocidad, lo que provoca a su vez un aumento

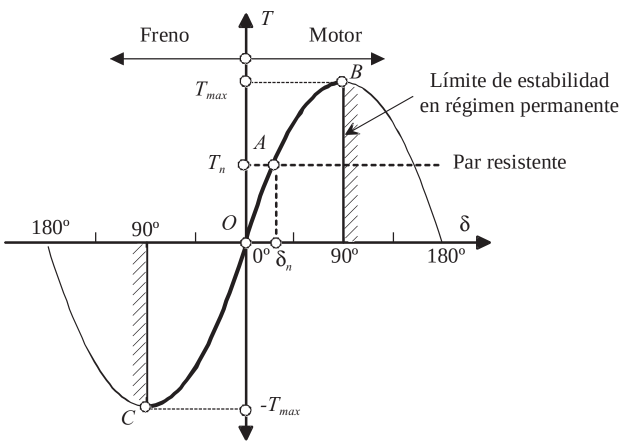


Figura 7.90. Curva de par del motor síncrono en función del ángulo de carga.

del ángulo de carga δ, elevándose de este modo el par del motor, y se alcanza una situación de equilibrio para un ángulo de carga mayor que el original cuando el par motor se igual a al resistente y se consigue un nuevo enclavamiento entre los polos del rotor y el campo giratorio del estátor, girando la máquina nuevamente a la velocidad de sincronismo. Si se aumenta el par resistente hasta llegar al valor del par máximo, el punto de equilibrio sería el *B* de la Figura 7.90; un posterior aumento del par resistente no se vería compensado con un aumento del par electromagnético, por lo que el motor se saldría del sincronismo. De este modo la zona *OB* de la curva par-velocidad es la *zona de trabajo estable* de la máquina, mientras que a la derecha de *B* se tiene un *funcionamiento inestable*. El punto *B*, para el cual $\delta = 90°$, representa el ángulo de carga máximo que define el límite de estabilidad del motor. De un modo análogo se puede analizar la zona correspondiente al funcionamiento de la máquina como generador o frenado regenerativo, en la que el punto *C* representa el límite de estabilidad como freno.

La regulación de la velocidad de un motor síncrono se realiza controlando la frecuencia de alimentación del inducido. Si se define una velocidad base n_b para la cual la máquina trabaja con los valores nominales de tensión y frecuencia, si se mantiene constante el cociente *V/f*, en todo el rango de velocidades desde cero hasta la velocidad base, el valor del par máximo, de acuerdo con (7.203), se mantendrá también constante en este rango. Por encima de la velocidad base, la regulación de velocidad se hace por debilitamiento del campo, manteniendo la tensión aplicada al motor en su valor nominal y siguiendo aumentando la frecuencia de alimentación, lo que se traduce en una reducción del par máximo en esta zona. En la Figura 7.91 se muestran las curvas par-velocidad correspondientes, que son rectas verticales de velocidad constante correspondientes a cada valor de la frecuencia aplicada. Si la carga tiene un par resistente constante igual al nominal, el motor irá aumentando su velocidad progresivamente desde cero hasta su valor máximo, pasando por los puntos de trabajo 1, 2, 3, 4, etc., mostrados en la Figura 7.91, conforme se eleva la frecuencia aplicada al inducido.

Existen dos tipos de accionamientos para motores síncronos, a saber: *a*) en lazo abierto, en el que se controla directamente tanto la tensión como la frecuencia aplicada al motor; *b*) en lazo cerrado, en el que se regula directamente la tensión aplicada al inducido, mientras que el valor de la frecuencia de alimentación va variando en función de la posición del rotor.

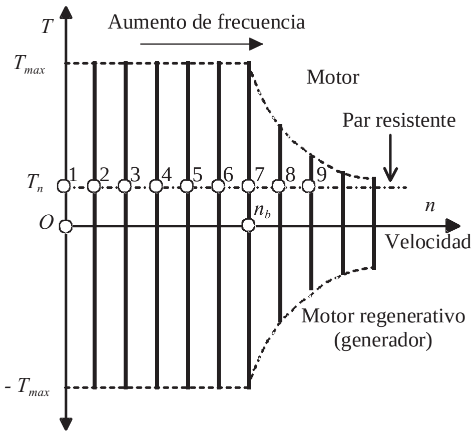


Figura 7.91. Curvas par-velocidad de un motor síncrono.

7.13.1. Regulación de velocidad de motores síncronos en lazo abierto

En la Figura 7.92 se muestra un esquema básico de control de velocidad de un motor síncrono en lazo abierto, que es un circuito similar al empleado en la regulación de motores asíncronos. Los bloques de electrónica de potencia consisten en un rectificador controlado situado a principio de línea que alimenta a un bus de c.c. y un inversor al final de línea que se aplica al inducido del motor síncrono. El inductor se alimenta a través de un rectificador controlado mono o trifásico (no señalado en la Fig. 7.92) para ajustar la corriente de excitación. Si se desea que el motor funcione en régimen de frenado regenerativo se debe sustituir el rectificador controlado de principio de línea por un sistema dual de dos rectificadores controlados conectados en antiparalelo, para que de este modo se pueda devolver energía eléctrica a la red. En las aplicaciones de gran potencia se utilizan cicloconvertidores que transforman directamente la c.a. de la red en c.c. de tensión y frecuencia variable sin pasar por la etapa intermedia de c.c.

El motor arranca suavemente desde el reposo hasta la velocidad de consigna, y para ello dispone de un limitador de la derivada de la velocidad para que la frecuencia cambie gradualmente desde cero hasta el valor correspondiente a la velocidad de consigna. De acuerdo con esta velocidad n^* se realiza el control de flujo, de tal modo que si $n^* < n_b$ la regulación se hace manteniendo el cociente V/f constante y para $n^* > n_b$ la tensión se fija en el valor nominal y se va subiendo la frecuencia. La señal de tensión V controla el ángulo α de disparo del rectificador controlado, mientras que la señal f define la frecuencia de la c.a. que produce el inversor. En este circuito, si se producen variaciones lentas de par, aparecen oscilaciones en el rotor (penduleo) pero al cabo de un cierto tiempo se estabiliza. En el caso de que las variaciones del par sean muy fuertes, el ángulo de carga del rotor puede superar el valor límite de 90°, provocando la inestabilidad del motor, que se saldrá del sincronismo.

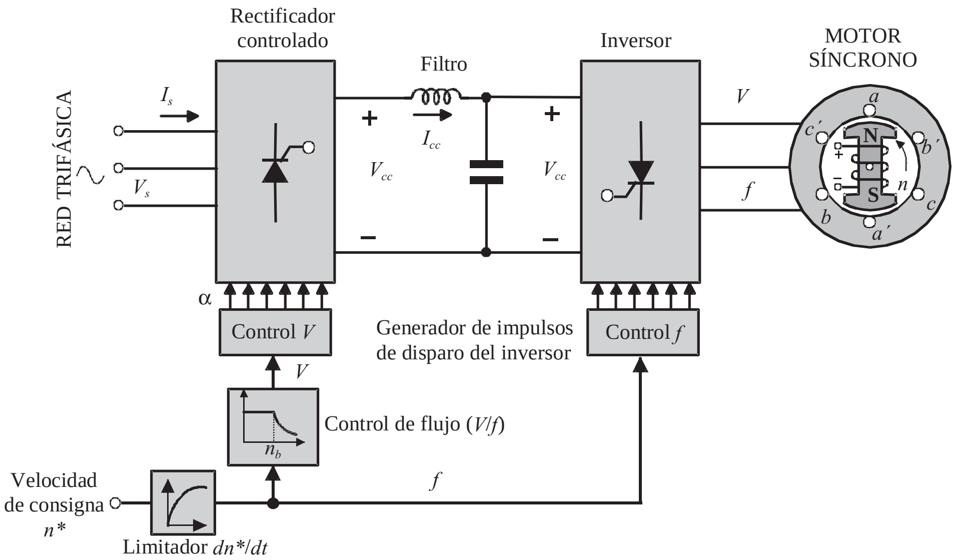


Figura 7.92. Regulación de velocidad de un motor síncrono en lazo abierto.

7.13.2. Regulación de velocidad de motores síncronos en lazo cerrado. Motor síncrono autopilotado

Para evitar el inconveniente de pérdida de sincronismo del motor síncrono cuando está sometido a variaciones bruscas de par, se debe utilizar una regulación en lazo cerrado o con realimentación. La idea de este procedimiento es hacer que las variaciones de la velocidad del rotor modifiquen automáticamente la frecuencia del inversor; para ello se debe medir el movimiento del rotor con un transductor de posición (encóder), y esta información se utiliza para corregir la frecuencia aplicada al estátor haciendo que el motor conserve el sincronismo con la nueva frecuencia aplicada. De este modo, la velocidad del rotor corrige automáticamente la frecuencia del estátor, y de ahí que este accionamiento se denomine *autocontrolado* o *autopilotado* (*self-controlled* en inglés o *autopilotage* en francés).

En la Figura 7.93 se muestra el esquema de control de un motor síncrono autopilotado. Se dispone de dos convertidores, uno al principio de línea, que al igual que en el caso anterior es un rectificador controlado que alimenta a un bus intermedio de c.c. y al final del mismo se sitúa el inversor u ondulador que convierte la c.c. en c.a. trifásica de tensión y frecuencia variable. El encóder, que se coloca en el eje del motor, da una señal indicativa de la posición del rotor que se procesa en la lógica de control y se utiliza para generar los impulsos de disparo de los tiristores del inversor. De este modo, cualquier variación en la velocidad del rotor debida a un cambio en la carga, modificará inmediatamente la frecuencia de encendido de los tiristores y ajustará la frecuencia de alimentación del estátor al valor correcto para evitar la pérdida de sincronismo del motor. En definitiva, de este modo se evitan las oscilaciones pendulares del motor y las inestabilidades asociadas con un cambio en el par o en la frecuencia.

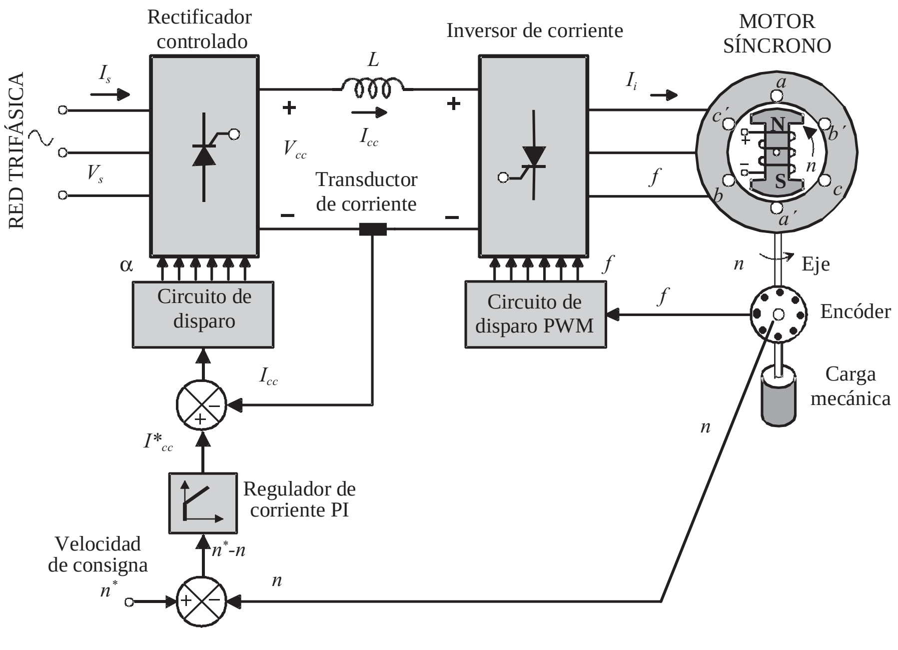


Figura 7.93. Motor síncrono autopilotado.

El esquema de la Figura 7.93 incluye también un lazo de corriente que actúa sobre los ángulos de encendido de los tiristores del rectificador controlado para mantener la corriente de la máquina en el valor de consigna estipulado. Para ello se toma como señal de referencia la corriente del lazo intermedio de c.c. I_{cc}, que es proporcional a la corriente del inducido del motor I_i. La corriente I_{cc} se compara con la de referencia para dar una señal de error que sirve para ajustar el ángulo de encendido α de los tiristores del rectificador controlado.

COMENTARIOS PRÁCTICOS

Motor síncrono autopilotado en la tracción eléctrica española. AVE Serie 100

Los trenes AVE Serie 100 (Alta Velocidad Española de la línea Madrid-Sevilla, inaugurada en 1992) fueron construidos por GEC-Alsthom, grupo ferroviario que integró a las sociedades ATIENZA, MTM y MEINFESA. Diferentes industrias ferroviarias españolas participaron también de forma importante en la construcción de los trenes: CAF, en sus talleres de Zaragoza y Beasaín; SEPSA y STONE IBÉRICA, en sus factoría cercanas a Madrid. Los trenes AVE son trenes de alta velocidad derivados del TGV Atlantique y son explotados en líneas RENFE, con la denominación EUROMED.

Tienen una composición M-8R-M, que significa dos coches motrices M extremos e idénticos y un conjunto articulado de 8 remolques R. El tren dispone de un total de 13 bogies, cuatro motores y nueve portadores. La longitud del tren es 200,150 m para un ancho de vía internacional de 1.435 mm. El tren tiene una masa con carga normal de 421,50 toneladas con 329 plazas y desarrolla un esfuerzo de tracción en llanta de 10.560 daN a la velocidad máxima de 300 km/h. La captación de corriente se efectúa desde la catenaria alimentada a una tensión de 25 kV/50 Hz o a una tensión de 3 kVcc. En condiciones de explotación normal el tren circula:

- *Bajo catenaria de 25 kV de corriente alterna monofásica con el pantógrafo de alterna de la cabeza tractora trasera levantado y alimentando la cabeza tractora delantera por medio de una línea de techo. Con esta disposición se evitan oscilaciones en el hilo de contacto, que se producirían al circular a gran velocidad con los dos pantógrafos levantados (Fig. 7.94).*
- *Bajo catenaria de 3 kV de corriente continua, con los pantógrafos de continua de cada cabeza tractora levantados. Una línea equipotencial que enlaza los dos pantógrafos permite evitar los efectos perniciosos de los despegues (Fig. 7.95).*

*La tracción se realiza mediante **8 motores trifásicos síncronos autopilotados** SM 44-39-B con una potencia en régimen continuo de 1.100 kW, con una tensión compuesta de línea de alimentación de 1.246 V y una velocidad máxima de 4.000 r.p.m. Cada coche motor tiene una potencia de tracción de 4 × 1.100 = 4.400 kW, lo que representa una potencia total del tren de 8.800 kW. La alimentación de sus estátores se realiza: a) en corriente alterna, a partir de un arrollamiento secundario del transformador principal por medio de puentes rectificadores mixtos y onduladores trifásicos; b) en corriente continua, mediante un chopper con tiristores GTO y onduladores trifásicos.*

El ajuste del esfuerzo de tracción se logra variando en cada motor las intensidades tanto del estátor como del rotor, ajustando los tiempos de desbloqueo de los elementos electrónicos de control. El rotor se alimenta de una línea de corriente continua de 500 V y su intensidad se controla mediante un chopper de excitación, siendo la corriente proporcional a la que recorre el estátor, lo cual permite obtener características cercanas a las de un motor serie de c.c.

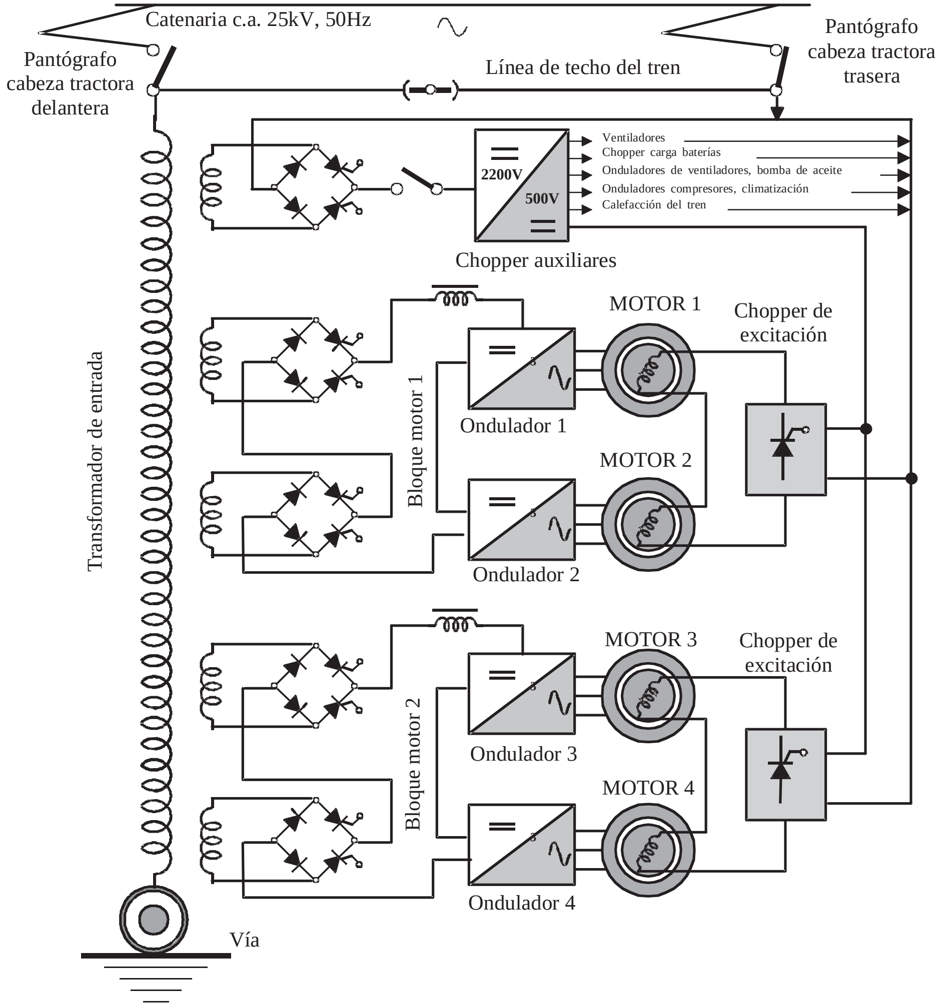


Figura 7.94. Alimentación de los motores de tracción del tren AVE serie 100 con c.a. 25 kV, 50 Hz.

En el frenado reostático los motores de tracción funcionan como alternadores y, los onduladores como rectificadores. Los conjuntos motor y ondulador alimentan un reóstato: una parte de éste se conecta en paralelo con el chopper principal con objeto de variar la resistencia aparente de frenado. El esfuerzo de tracción se regula también variando, al mismo tiempo, la excitación de los motores síncronos. Cuando desaparece la alimentación de alta tensión (falta de tensión en línea, apertura de disyuntores, etc.) la corriente de excitación de los rotores es suministrada por la batería correspondiente y el esfuerzo de frenado es inferior en un 20 por 100 aproximadamente.

La alimentación de los equipos eléctricos auxiliares se realiza a partir de un arrollamiento secundario auxiliar del transformador principal y de un puente rectificador (alimentación a 25 kV) o a partir directamente de la catenaria (alimentación a 3.000 V), y por medio de choppers auxiliares reductores que suministran tensión continua de 500 V.

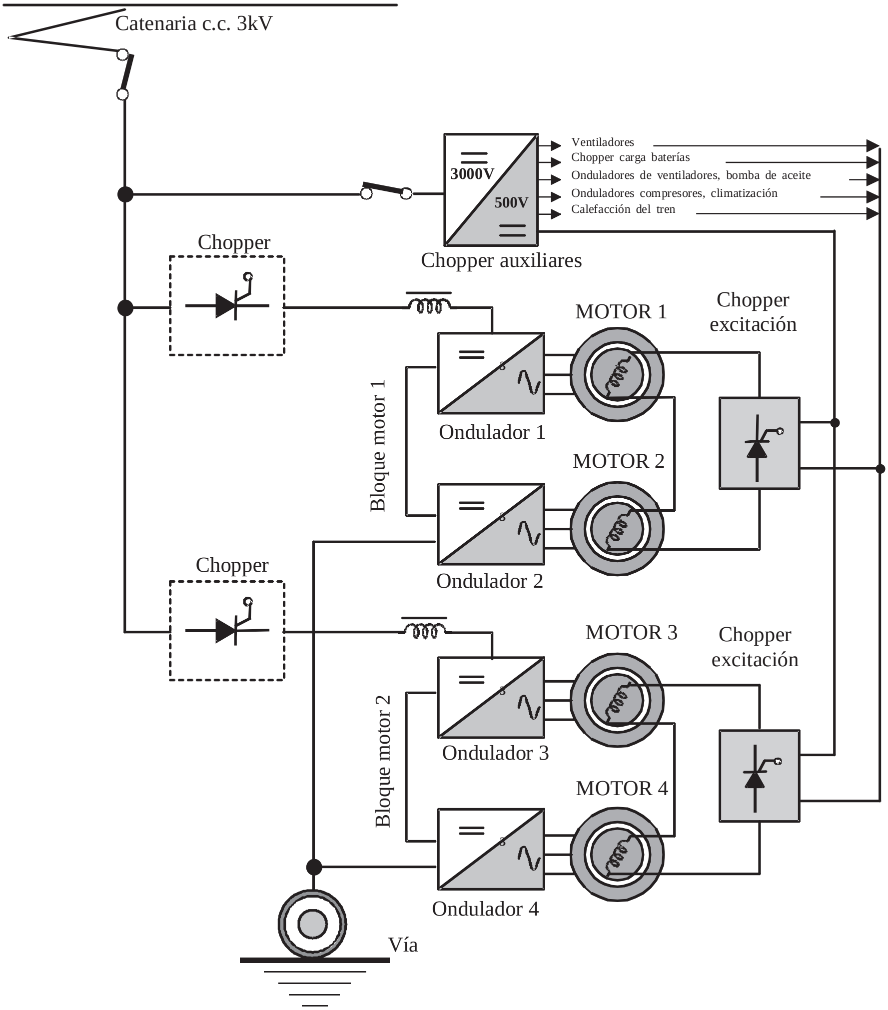


Figura 7.95. Alimentación de los motores de tracción del tren AVE serie 100 con 3.000 Vcc.

PROBLEMAS

7.1. Se dispone de una red monofásica con una tensión eficaz de 220 V, 50 Hz, que alimenta una carga que tiene una resistencia de 10 ohmios y una inductancia de 0,0318 henrios, a través de un diodo rectificador de potencia (rectificación media onda). Calcular: *a*) expresión de la corriente instantánea en la carga; *b*) tiempo de apagado del diodo, es decir, el tiempo correspondiente a la anulación de la corriente de la carga (en el primer ciclo); *c*) tensión y corriente media en la carga.

[Resp.: *a*) $i(t) = 22[\text{sen}\,(\omega t - \pi/4) + 0{,}707 \cdot e^{-314{,}47t}]$; $\omega = 100\,\pi$. *b*) 0,0125 segundos. *c*) 84,05 V; 8,405 A.]

7.2. En el problema anterior se dispone de un diodo volante en paralelo con la carga. *a*) Calcular la expresión de la corriente instantánea que circula por la misma; *b*) contestar a la pregunta anterior si el nuevo valor de la inductancia de la carga es de 0,5 henrios. *c*) ¿Cuál es entonces el valor de la potencia disipada en la resistencia de 10 ohmios?

[Resp.: *a*) $i(t) = 9{,}9 + 11\,\text{sen}\,(314{,}16t - 45°) - 2{,}95\,\text{sen}\,(628{,}32t - 63{,}43°) - 0{,}32\,\text{sen}\,(1.256{,}64t - 75{,}96°)$. *b*) $i(t) = 9{,}9 + 0{,}988\,\text{sen}\,(314{,}16t - 86{,}36°) - 0{,}21\,\text{sen}\,(628{,}32t - 88{,}18°) - 0{,}021\,\text{sen}\,(1.256{,}64t - 89{,}1°)$]. *c*) La corriente eficaz en la carga es de 9,926 A, por lo que la potencia disipada es de 985,2 W.]

7.3. Un rectificador monofásico en puente de Graetz (rectificación doble onda) alimenta una carga que tiene una resistencia de 20 Ω y una inductancia de 20 mH. La tensión de la red es de 220 V eficaces y 50 Hz: *a*) Calcular la expresión de la corriente instantánea que circulará por la carga; *b*) potencia disipada en la resistencia de 20 Ω; *c*) contestar a la pregunta anterior si se considera la inductancia infinita.

[Resp.: *a*) $i(t) = 9{,}9 - 5{,}59\cos\,(\omega t - 32{,}14°) - 0{,}822\cos\,(4\omega t - 51{,}49°) - 0{,}265\cos\,(6\omega t - 62{,}05°)$; $\omega = 100\,\pi$. *b*) 2.280 W. *c*) 1.960,2 W.]

7.4. Una red trifásica de 380 V de línea (valor eficaz) y 50 Hz alimenta una resistencia de 50 ohmios a través de un puente rectificador trifásico en puente (doble onda). Calcular: *a*) tensión y corriente media en la resistencia de la carga; *b*) corriente media en cada diodo rectificador; *c*) tensión inversa de pico de cada diodo; *d*) potencia disipada en la resistencia de carga de 50 ohmios.

[Resp.: *a*) 513,18 V; 10,26 A. *b*) 3,42 A. *c*) 537,40 V; 5.276,1 W.]

7.5. Un convertidor monofásico en puente completo (rectificador controlado a tiristores) alimenta una carga resistiva pura de R ohmios. Si la tensión máxima de la red es V_m y el ángulo de encendido de los tiristores es α, calcular: *a*) tensión y corriente media en la carga; *b*) corriente eficaz en la carga.

[Resp.: *a*) $V_{cc} = \dfrac{V_m}{\pi}(1 + \cos\alpha)$. *b*) $I_{cc} = \dfrac{V_m}{\pi R}(1 + \cos\alpha)$.

c) $I_{ef} = \dfrac{V_m}{R\sqrt{2}}\sqrt{1 - \dfrac{\alpha}{\pi} + \dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2\pi}}$]

7.6. Un convertidor trifásico en puente completo (rectificador controlado a tiristores) se conecta a una red trifásica de 380 V de línea y alimenta una carga de inductancia elevada y resistencia $R = 50\ \Omega$. Si el ángulo de encendido de los tiristores es igual a 45°, calcular: *a*) tensión y corriente media en la resistencia; *b*) potencia disipada en la resistencia; *c*) corriente eficaz en la red; *d*) potencia aparente que suministra la red y f.d.p. de la instalación.

[Resp.: *a*) 362,87 V; 7,257 A. *b*) 2.633,5 W. *c*) 5,926 A; *d*) 3.900,37 VA; f.d.p. = 0,675.]

7.7. Se dispone de un regulador de c.a. monofásico con dos tiristores en antiparalelo. La red tiene una tensión eficaz de 220 V, 50 Hz y la carga es una resistencia de 20 ohmios. Se desea que la potencia disipada en la carga varíe entre 500 W y 2 kW. Calcular: *a*) el ángulo necesario de encendido α de los tiristores para cada una de las potencias señaladas; *b*) factor de potencia cuando la carga absorbe 500 W.

[Resp.: *a*) P = 500 W; $\alpha \approx 119°$; P = 2.000 W; $\alpha \approx 57°$. *b*) 0,452.]

7.8. Un chopper reductor que emplea GTO alimenta una carga formada por una resistencia de 2 ohmios en serie con una inductancia de 12 mH. El tiempo de encendido del GTO es de 2 ms y la frecuencia del chopper es de 200 Hz. Si la tensión de c.c. de alimentación del chopper es de 600 V, calcular: *a*) tensión y corriente media en la carga; *b*) potencia desarrollada en la carga; *c*) valores máximo y mínimo de la corriente en la carga.

[Resp.: *a*) 240 V; 120 A. *b*) 28,8 kW. *c*) $I_{máx}$ = 150,41 A; $I_{mín}$ = 91,23 A.]

7.9. Un convertidor trifásico en puente completo (rectificador controlado a tiristores) se alimenta por una red de 380 V de tensión compuesta (valor eficaz), 50 Hz y alimenta un motor de c.c. con excitación independiente. El motor tiene una resistencia de inducido de 0,02 ohmios y una gran inductancia en serie. El flujo magnético del inductor es constante y se sitúa en la zona lineal de imanación, de tal modo que el producto $k_T\Phi$ del motor vale $k_T\Phi = 2{,}4$ V/rad · s^{-1}. Calcular el ángulo de encendido α para que el motor gire a la velocidad de 1.500 r.p.m. si en estas condiciones la corriente del inducido es de 400 A.
Nota: Recuérdese que la f.c.e.m. de un motor de c.c. viene expresada por $E = k_T\Phi\omega$, (Φ en Weber y ω en rad/s) y el par viene definido por $T = k_T\Phi I_i$, donde I_i es la corriente de inducido.

[Resp.: α = 41,4°.]

7.10. Un motor de c.c. con excitación independiente y constante tiene grabados los siguientes datos en su placa de características: 200 V, 1.000 r.p.m., 10,5 A. La resistencia del inducido es de 1,5 ohmios. Este motor está alimentado por un rectificador monofásico controlado doble onda conectado a una red monofásica de 220 V de línea (eficaces), 50 Hz. La inductancia del inducido es muy elevada: *a*) Calcular el ángulo de encendido α para que el motor mueva un par resistente igual al nominal pero a una velocidad de 750 r.p.m; *b*) contestar a la pregunta anterior si el par de frenado es igual al nominal pero la velocidad es de −1.000 r.p.m; *c*) calcular la velocidad del motor para un par resistente mitad que el nominal y con un ángulo de encendido α = +150° cuando funciona como freno regenerativo invirtiendo la excitación.

[Resp.: *a*) α = 39°. *b*) α = 148,3°; 973,7 r.p.m.]

7.11. Se dispone de un motor de c.c. con excitación independiente y constante con una resistencia del inducido de 0,5 ohmios y de inductancia elevada. Este motor está alimentado por un rectificador monofásico controlado doble onda conectado a una red monofásica de 220 V de línea (eficaces), 50 Hz. Se sabe que cuando el motor gira en vacío y con un ángulo de encendido de 0°, la corriente absorbida por la máquina es de 2 A y la velocidad es de 1.000 r.p.m. Calcular el ángulo de encendido α de los tiristores para que la máquina gire a 500 r.p.m. con una corriente de plena carga

de 20 A. ¿Cuál es el par útil del motor si el par de rozamiento y ventilación es directamente proporcional a la velocidad?

[Resp.: $\alpha = 56{,}77°$; $T = 35{,}75$ N.m.]

7.12. Un motor de c.c. con excitación independiente y constante tiene grabados los siguientes datos en su placa de características: 300 V, 840 r.p.m., 150 A. La resistencia del inducido es de 0,1 ohmios. Este motor está alimentado por un rectificador trifásico controlado doble onda conectado al secundario de un transformador ideal cuya tensión secundaria en vacío es tal que el rectificador controlado suministra la tensión asignada del motor para un ángulo de encendido de 0°. La inductancia del inducido es muy elevada. Calcular las velocidades del motor en las situaciones siguientes: *a*) tensión secundaria de línea del transformador; *b*) ángulo de encendido $\alpha = 60°$, par resistente $T = 400$ N.m; *c*) ángulo de encendido $\alpha = 145°$, par resistente $T = 500$ N.m; *d*) ángulo de encendido $\alpha = 120°$, par resistente $T = -300$ N.m (obtenidos por inversión de la excitación).

[Resp.: *a*) 222,14 V. *b*) 405,7 r.p.m. *c*) −769,8 r.p.m. *d*) 414,8 r.p.m.]

7.13. Se dispone de un chopper directo para regular la velocidad de un motor de c.c. con excitación independiente. La resistencia del inducido del motor es de 0,5 ohmios y la inductancia de 2 mH. El flujo magnético del inductor es constante y se sitúa en la zona lineal de imanación, de tal modo que el producto $k_T\Phi$ del motor vale $k_T\Phi = 2$ V/rad · s^{-1}. El chopper recibe alimentación de c.c. a través de un rectificador trifásico de doble onda que se conecta a una red trifásica de 380 V de línea (valor eficaz), 50 Hz. La frecuencia del chopper es de 1 kHz. Si el motor gira a una velocidad de 600 r.p.m. con un ciclo de trabajo del chopper igual a 0,45, calcular: *a*) los valores de las corrientes máxima y mínima que circulan por el inducido del motor de c.c; *b*) determinar el par electromagnético y la potencia mecánica producida por el motor.
Nota: Recuérdese que la f.c.e.m. de un motor de c.c. viene expresada por $E = k_T\Phi\omega$ (Φ en Weber y ω en rad/s) y el par viene definido por $T = k_T\Phi I_i$, donde I_i es la corriente de inducido.

[Resp.: *a*) $I_{máx} = 242{,}21$ A; $I_{mín} = 178{,}81$ A. *b*) 420,76 N.m; 26,44 kW.]

7.14. Se dispone de un chopper directo para regular la velocidad de un motor de c.c. con excitación independiente. La resistencia del inducido del motor es de 0,1 ohmios y la inductancia de 4 mH. El flujo magnético del inductor es constante y se sitúa en la zona lineal de imanación, de tal modo que el producto $k_T\Phi$ del motor vale $k_T\Phi = 4{,}9$ V/rad · s^{-1}. El chopper recibe alimentación de c.c. a través de una línea de c.c. de 600 V. La frecuencia del chopper es de 1 kHz. El motor gira a una velocidad de 400 r.p.m. con un ciclo de trabajo del chopper igual a 0,40: *a*) Calcular la corriente media absorbida por el inducido del motor; *b*) valores de las corrientes máxima y mínima que circulan por el inducido del motor; *c*) determinar el par electromagnético y la potencia mecánica desarrollada por el motor; *d*) potencia eléctrica absorbida de la red si se desprecian las pérdidas del chopper. *e*) Rendimiento del motor.

[Resp.: *a*) 347,9 A. *b*) $I_{máx} = 366$ A; $I_{mín} = 330$ A. *c*) 1.704,7 N.m; 71,4 kW. *d*) 83,5 kW. *e*) 85,5 %.]

7.15. Se dispone de un chopper directo para regular la velocidad de un motor de c.c. con excitación independiente. La resistencia del inducido del motor es de 0,2 ohmios y la inductancia de 10 mH. El flujo magnético del inductor es constante y se sitúa en la zona lineal de imanación, de tal modo que el producto $k_T\Phi$ del motor vale $k_T\Phi = 4$ V/rad · s^{-1}. El chopper recibe alimentación de c.c. a través de una línea de c.c. de 600 V. La frecuencia del chopper es de 1 kHz. La corriente de plena carga que absorbe el motor es de 40 A: *a*) Calcular el tiempo t_{ON} del chopper para que el motor gire a 1.000 r.p.m. a plena carga; *b*) si se reduce el par resistente, ¿para qué valor del par la corriente del inducido se hace discontinua?; *c*) determinar la velocidad que adquirirá el motor en el caso anterior.

[Resp.: *a*) $k = 0{,}711$; $t_{ON} = 0{,}711$ ms. *b*) 24,7 N.m. *c*) $n = 1.015{,}5$ r.p.m.]

7.16. En el problema anterior, calcular la velocidad que adquirirá el motor en vacío, si se mantiene el t_{ON} del chopper y se supone que el par resistente debido a rozamiento y ventilación es de 4 N.m.

[Resp.: El lector debe demostrar que la conducción es discontinua. La corriente de inducido va aumentando desde $I_i = 0$ para $t = 0$ hasta alcanzar un máximo de $I_i \approx 2{,}64$ A para $t_{ON} = 0{,}711$ ms, pero se anula en $t = 0{,}758$ ms, es decir, 0,047 ms después, dando lugar a un valor de la f.c.e.m. del motor $E \approx 562{,}63$ V y que corresponde a una velocidad de $n \approx 1.343$ r.p.m.]

7.17. Un motor asíncrono trifásico de rotor en jaula de ardilla de 4 polos, 220/380 V, 50 Hz, 1.470 r.p.m. está conectado en estrella. Los parámetros del motor por fase son:

$$R_1 = 0{,}2\ \Omega \quad ; \quad R_2' = 0{,}1\ \Omega \quad ; \quad X_{cc} = X_1 + X_2' = 1{,}4\ \Omega$$

Se consideran despreciables tanto la corriente de vacío del motor como las pérdidas mecánicas.

Se desea regular la velocidad del motor mediante un convertidor electrónico formado por un grupo rectificador controlado e inversor trifásico. El rectificador controlado en puente completo se conecta a la red trifásica de 380 V de línea (valor eficaz), 50 Hz y la salida de c.c. obtenida se aplica a un inversor trifásico en puente que posteriormente se aplica al motor trifásico.

a) A partir de los datos del motor, calcular el par de plena carga (es decir, si se conectara directamente a una red trifásica de 380 V de línea, 50 Hz y girase a la velocidad señalada de 1.470 r.p.m.); *b*) tensión necesaria en el bus de corriente continua para que la componente fundamental de la tensión de salida del inversor sea la asignada de la máquina; *c*) ángulo de encendido que debe aplicarse al rectificador controlado para proporcionar la c.c. calculada en el apartado anterior; *d*) si se aplica un par resistente constante igual al de plena carga y se ajusta el grupo rectificador controlado-inversor para producir 190 V de línea a 25 Hz, calcular la velocidad a la que girará el motor; *e*) calcular el ángulo de encendido de los tiristores del rectificador controlado para el caso anterior, supuesto que el inversor es ajustable solamente en frecuencia pero no en tensión.

[Resp.: *a*) 158,5 N.m. *b*) $V_{cc} = 487{,}37$ V. *c*) $\alpha = 18{,}25°$. *d*) $n = 717$ r.p.m. *e*) $\alpha = 61{,}65°$.]

7.18. En el problema anterior se realiza un control de velocidad manteniendo el cociente *V/f* constante. Si el motor mueve un par resistente de 80 N.m a 600 r.p.m., calcular: *a*) tensión y frecuencia que debe producir el inversor; *b*) ángulo de disparo requerido por el rectificador controlado.

[Resp.: *a*) V_1 (línea) $\approx$ 155,8 voltios; $f_1 \approx$ 20,5 Hz. *b*) $\alpha \approx$ 67,1°.]

7.19. Un motor asíncrono trifásico de rotor devanado de 6 polos se conecta en estrella a una red de 380 V de línea (valor eficaz), 50 Hz. Los parámetros del motor por fase son:

$$R_1 = 0{,}6\ \Omega \quad ; \quad R_2' = 0{,}4\ \Omega \quad ; \quad X_1 = X_2' = 1{,}5\ \Omega$$

relación de transformación estátor/rotor: $m_v = m_i = 2$

a) Se sabe que cuando el motor funciona con los anillos deslizantes en cortocircuito y moviendo un par resistente igual al de plena carga, la velocidad que adquiere el rotor es de 980 r.p.m. ¿Cuál es el valor del par de plena carga?; *b*) se desea regular la velocidad de este motor mediante un chopper que actúa sobre una resistencia externa R_{ex}. Para ello la tensión que se obtiene entre los anillos deslizantes pasa por un rectificador trifásico en puente completo y cuya salida se aplica a la resistencia externa que está en paralelo con el chopper. Si se considera que el chopper está abierto (es decir, su ciclo de trabajo es igual a cero y por consiguiente la tensión del rectificador se aplica directamente a la resistencia externa), ¿cuál debe ser el valor de esta R_{ex} para que el motor produzca el par máximo en el arranque? *c*) Determinar el ciclo de trabajo del chopper para que el motor desarrolle el par de plena carga para una velocidad de 900 r.p.m. *d*) Si el ciclo de trabajo del chopper es igual a 0,7 y el par resistente es 1,2 veces el de plena carga, ¿a qué velocidad girará el motor?
Nota: Se suponen despreciables las pérdidas mecánicas, la corriente de vacío absorbida por el motor y las pérdidas en el rectificador. El rotor está conectado también en estrella.
Sugerencia: El lector debe demostrar primeramente que la R_{ex} que actúa como carga del rectificador es equivalente a una resistencia adicional por fase en el rotor $R_{a2} = R_{ex}/2$.

[Resp.: *a*) 63,64 N.m. *b*) R_{ex} = 1,33 Ω. *c*) $k \approx$ 0,4. *d*) n = 926,3 r.p.m.]

7.20. Un motor asíncrono trifásico de 50 kW, 380 V, 50 Hz, 4 polos de rotor con anillos deslizantes se utiliza para mover una bomba centrífuga a velocidad variable con un sistema de accionamiento Kramer estático. Tanto el estátor como el rotor del motor están conectados en estrella. Cuando el motor está parado (abriendo el circuito que se une a los anillos deslizantes) y se aplica al estátor la tensión asignada de 380 V de línea, 50 Hz, se mide entre dos anillos del rotor una tensión de 475 V. El inversor se conecta directamente a la red (sin emplear un transformador de adaptación) para devolver a la misma la potencia de deslizamiento del motor. Se sabe que el par resistente T_r de la bomba sigue la siguiente ley cuadrática: $T_r = (k_r n^2 + 30)$ N.m, donde k_r es una constante y n la velocidad de giro del motor expresada en r.p.m. (el valor 30 representa de este modo la magnitud del par resistente de la bomba en el arranque, es decir, para $n = 0$). El motor acciona la bomba centrífuga desarrollando su potencia mecánica asignada de 50 kW a una velocidad de 1.410 r.p.m. Calcular: *a*) ángulo de encendido α del puente inversor en estas condiciones; *b*) corriente I_{cc} de la etapa de c.c.; *c*) si la velocidad del grupo se reduce a 900 r.p.m., calcular el par

resistente que ofrece la bomba y la potencia mecánica que desarrolla el motor; *d*) en el caso anterior, determinar el ángulo de encendido α del puente inversor y la corriente I_{cc} de la etapa de c.c.; *e*) ¿hasta qué velocidad se puede regular el grupo motobomba, si por motivos de seguridad el ángulo de encendido del puente inversor no puede ser superior a 160°? Calcular en este caso la potencia mecánica desarrollada por el motor. *Nota:* Suponer que el motor es ideal y sin pérdidas.

[Resp.: *a*) α = 94,3°. *b*) I_{cc} = 82,92 A. *c*) $T_r \approx$ 155,7 N.m; $P_{mec} \approx$ 14.676 W. *d*) α = 120°; I_{cc} = 38,13 A. *e*) $n \approx$ 372,4 r.p.m.; $P_{mec} \approx$ 2.009 W.]

Biografías

BARDEEN, John (1908-1991). Físico americano. Nació el 23 de mayo de 1908 en Madison, Wisconsin. Murió el 30 de enero de 1991 en Boston, Mass. Se graduó en esta Universidad en 1919 y realizó su doctorado con el físico húngaro-americano Wigner en la Universidad de Princeton en 1936. Enseñó en la Universidad de Minnesota, Minneapolis, entre los años 1938 y 1941. Durante la Segunda Guerra Mundial trabajó como físico en la Armada americana y luego en 1945 ingresó en los Laboratorios Bell, investigando las propiedades de conducción de los semiconductores. Entre 1951 y 1978 fue catedrático de Ingeniería Eléctrica y de Física por la Universidad de Illinois, Urbana. En diciembre de 1947 descubrió el transistor con sus compañeros William B. Shockley y Walter H. Brattain, por lo que los tres científicos recibieron el Premio Nobel de Física en 1956. (El transistor sustituyó rápidamente a la válvula electrónica y está incorporado como componente activo en los circuitos integrados actuales). Durante el desempeño de su cátedra de Física en la Universidad de Illinois, Urbana, trabajó en este centro en temas de superconductividad. Coautor en 1957 de la teoría BCS (John Bardeen - Leon N. Cooper - John R. Schrieffer) de la superconductividad, por lo que recibió un segundo premio Nobel de Física en 1972. Ha sido hasta ahora el único científico que ha recibido dos premios Nobel en Física (Madame Curie recibió un Premio Nobel en Química y el otro en Física). Medalla Nacional de Ciencias de Estados Unidos en 1965. Medalla de Honor del IEEE en 1971. Premio Lomonosov de la Academia de Ciencias Soviética.

BOSE, Bimal K. (1932-). Ingeniero eléctrico hindú-americano. Nació en 1932 en Calcuta. Se graduó como ingeniero en la Universidad de Calcuta en 1956. Obtuvo el grado de Master en Ingeniería Eléctrica por la Universidad de Wisconsin en 1960 y el Doctorado en la Universidad de Calcuta en 1966. Desde 1960 a 1971 fue profesor en la Escuela Bengalí de Ingeniería en Calcuta. Su área inicial de investigación fue el estudio de las reactancias saturables y de los amplificadores magnéticos y posteriormente de los convertidores electrónicos. En 1971 se trasladó a Estados Unidos al ser contratado como profesor asociado de Ingeniería Eléctrica en el Instituto Politécnico de Rensselaer, Troy, NY, donde organizó un programa de investigación y doctorado en electrónica de potencia y en sistemas de accionamientos de motores eléctricos mediante tiristores, triacs y transistores. En 1976 ingresó en el Centro de Investigación y Desarrollo de la General Electric en Schenectady, donde permaneció durante once años, trabajando en el diseño de los sistemas de control por microprocesador de accionamientos eléctricos de c.c. y c.a., métodos de regulación de motores de inducción por técnicas de ancho de impulso (PWM) y desarrollo de sistemas de control para accionamientos de vehículos híbridos. En 1987 fue contratado como catedrático de Electrónica de Potencia por la Universidad de Tennessee, habiendo investigado en temas como conversión de potencia por sistemas resonantes, análisis de faltas en convertidores, control sin sensores de accionamientos de c.a. y aplicación de redes en sistemas electrónicos de potencia. Recibió en 1996 la medalla Lamme del IEEE.

BRATTAIN, Walter Houser (1902-1987). Físico americano. Aunque nació el 10 de febrero de 1902 en Amoy (China), creció en el estado de Washington. Murió el 13 de octubre de 1987 en Seattle, Wash. Se graduó en 1924 en la Universidad de Whitman, en Walla Walla, Washington. Se doctoró

en la Universidad de Minnesota en 1929. En este mismo año ingresó en los Laboratorios Bell. Su campo principal de investigación fue analizar las propiedades superficiales de los sólidos, en particular la estructura atómica de un material en su superficie, que generalmente difiere de su estructura interior. En diciembre de 1947 descubrió el transistor con sus compañeros John Bardeen y William B. Shockley, por lo que los tres científicos recibieron el Premio Nobel de Física en 1956. (El transistor sustituyó rápidamente a la válvula electrónica y se encuentra incorporado como componente activo en los circuitos integrados actuales). Fue profesor adjunto en la Universidad de Whitman entre 1967 y 1972. Se le atribuyen gran número de patentes en el campo de la electrónica y escribió multitud de artículos sobre física del estado sólido.

De Forest, Lee (1873-1961). Ingeniero americano. Nació el 26 de agosto de 1873 en Council Bluffs, Iowa. Murió el 30 de junio de 1961 en Hollywood, California. Se graduó en la Universidad de Yale en 1896, recibiendo el grado de Doctor en 1896 por su tesis *Reflexiones de oscilaciones hertzianas en los extremos de hilos paralelos.* De Forest trabajó en el Laboratorio de Telefonía de la Compañía Western Electric de Chicago los años 1899 y 1900, percibiendo una remuneración de ocho dólares por semana. Los años 1900-1901 trabajó en el Instituto Armour de Chicago realizando investigaciones sobre receptores de radio (telegrafía sin hilos). Patentó un sistema denominado *responder* que era un método de transmisión por radio y que fue premiado con la medalla de oro en la feria de San Luis. En 1902 fundó su propia empresa: *De Forest Radio Telephone Company*, con un capital de dos millones de dólares. Su mayor invento fue la válvula triodo, que él denominó audión; en 1906 colocó un hilo de platino en forma quebrada entre el filamento y la placa de un diodo (el diodo se basaba en el efecto Edison, aunque lo había desarrollado el inglés J. A. Fleming y se habían comprobado sus propiedades rectificadoras en 1904) y llamó a este tercer elemento rejilla y a la válvula obtenida audión o triodo. Controlando la tensión de la rejilla se regulaba la cantidad de electrones que pasaban del filamento (cátodo) al ánodo (placa), por lo que la válvula se podía utilizar como elemento amplificador. En 1910 De Forest se hizo con el sistema de transmisión de Fessenden y usó triodos para radiar la voz del gran tenor italiano Enrico Caruso. El triodo fue desarrollado posteriormente por las compañías americanas *RCA*, *General Electric* y *Westinghouse* y revolucionó el mundo de la telecomunicación. En 1923 De Forest demostró la posibilidad de producir películas de cine sonoras y al cabo de cinco años comenzó el cine sonoro. Por el descubrimiento del triodo y el desarrollo de la radio recibió la medalla Edison del AIEE en 1946. Presidente del IRE en 1930.

Graetz, Leo (1856-1941). Físico alemán. Nació el 26 de septiembre en Breslau. Murió el 12 de noviembre de 1941 en Munich. Estudió en las Universidades de Breslau, Berlín y Estrasburgo, titulándose como Físico en 1880. En el período 1880-82 fue profesor ayudante en la Universidad de Estrasburgo. En 1883 fue contratado como catedrático de Física en la Universidad de Munich, habiendo presentado un trabajo de investigación sobre la conductividad térmica de los gases. En 1908 trabajó como ayudante de Wilhelm Roëntgen, descubridor de los Rayos X, dedicándose al estudio de los mismos y también de los rayos catódicos. Investigó en ondas electromagnéticas. Inventó un rectificador electrolítico que lleva su nombre (célula de Graetz) y un rectificador de doble onda en forma de puente que lleva su nombre. En 1883 publicó un Manual de Electricidad. En el período 1918-28 escribió una excelente enciclopedia de electricidad y magnetismo en cinco tomos.

Hoff, Marcian (1937-). Físico americano. Nació el 28 de octubre de 1937 en Rochester, NY. Estudió en la Universidad de Ressenlear (1958). En 1959 se graduó como ingeniero eléctrico por la Universidad de Stanford y se doctoró más tarde, en 1962, en la misma Universidad. En 1962 ingresó en la Compañía INTEL como profesor de la División de Ingeniería, trabajo que compatibilizaba con el de profesor en la Universidad de Santa Clara en Stanford. Se especializó en temas de investigación sobre circuitos integrados de tecnología MOS. En 1969, una compañía japonesa de calculadoras solicitó a la empresa Intel el diseño y construcción de un nuevo tipo de chip (circuito integrado). Hoff fue asignado a este trabajo y desarrolló una arquitectura específica en la que integraba 2.000 transistores, que era una unidad central de proceso (CPU) que permitía una programación para

caracterizar las diversas operaciones y funciones de la calculadora. Este circuito integrado fue mejorado más tarde con la ayuda de Stanley Mazor y Federico Faggin, dando lugar a la CPU 4004 en noviembre de 1971. Ésta es la fecha del nacimiento del microprocesador 4004 de 4 bits más tarde aparecería la 2.ª y 3.ª generación de CPU con el 8008 y el 8080. El μP (microprocesador) ha hecho posible el desarrollo de los ordenadores personales a un precio asequible y de ahí su extensión al público. El ordenador personal IBM (PC) con el μP8088 apareció en el mercado el 12 de agosto de 1982; posteriormente saldría en 1983 el IBM PC/XT con una versión mejorada del μP8088; en 1984 el IBM PC/AT con el μP80286; en 1989 Intel desarrolla el μP80486 y más tarde en 1995 el Pentium I y posteriormente Pentium II y III.

Hull, Albert Wallace (1880-1966). Físico americano. Nació el 19 de abril de 1889 en Southington, Connecticut. Murió el 22 de enero de 1966 en Schenectady, NY. Estudió Letras Clásicas (en particular griego) en la Universidad de Yale y después de su graduación dio clases de francés y alemán en la Academia Albany (donde enseñó Joseph Henry casi setenta años antes). Al comprobar que se sentía atraído por la Física volvió a Yale, doctorándose en Ciencias Físicas en 1909. Más tarde enseñó Física en el Instituto Politécnico Worcester en Massachusetts, cuyo trabajo llamó la atención de Irving Langmuir, de la General Electric. En 1914 ingresó en los Laboratorios de Investigación de la General Electric en Schenectady. Su primer trabajo lo dedicó a los tubos electrónicos (válvulas), cristalografía de rayos X y piezoelectricidad (durante la Primera Guerra Mundial). Su contribución más importante se refiere a un artículo ya clásico sobre el efecto de un campo magnético uniforme sobre el movimiento de los electrones dentro de dos cilindros coaxiales. Versado en griego, acuñó para esta configuración el vocablo magnetrón, elemento que sería más tarde el componente básico del radar. Hull trabajó en la década de 1920 en la medida del ruido de diodos y triodos y en la eliminación de las realimentaciones anómalas en triodos a través de una rejilla (que dio lugar a la válvula tetrodo y que fue desarrollada independientemente por Walter Schottky, que es el inventor reconocido). Inventó más tarde el tiratrón, una válvula rellena de gas y de alta duración, cuya aplicación fundamental era la conversión de la c.a. a c.c. regulada y que fue muy utilizada en el control electrónico de máquinas eléctricas (y que más tarde sería sustituida por el tiristor). El tiratrón daría comienzo a una nueva rama de la ciencia eléctrica, denominada *electrónica industrial*. Hull recibió en 1930 el premio Liebmann del IRE (Instituto de Radio Americano). Medalla de Honor del IRE en 1958. Presidió la *American Physical Society* en 1942. Fue también miembro de la Academia de Ciencias de los Estados Unidos.

Kilby, Jack St. Clair (1923-2005). Ingeniero americano. Nació el 8 de noviembre de 1923 en Jefferson City, Mo. Ingresó en 1941 en la Universidad de Illinois para estudiar ingeniería electrónica, pero tuvo que interrumpir su carrera en 1943, en plena Segunda Guerra Mundial, para hacer el servicio militar en Burma, China. Después de la guerra volvió a Illinois, completando su BSEE y consiguiendo en 1950 su título de ingeniero electrónico en la Universidad de Wisconsin. Estando en el ejército se dio cuenta de que la tecnología electrónica debía cambiar; por ejemplo, el equipo electrónico asociado al cazabombardero B-29 requería 1.000 válvulas. El descubrimiento del transistor a finales de 1947 fue provervial para Kilby, ya que ingresó en este mismo año en la empresa *Centralab Division of Globe Union* de Milwaukee, donde trabajó en el diseño y desarrollo de circuitos híbridos de capa delgada y transistores; once años más tarde, estando trabajando en la tecnología de transistores de difusión, se cambió a la *Compañía Texas Instrument*, que le facilitaba una mayor ayuda económica para sus investigaciones. En agosto de 1958 había construido un circuito utilizando solamente elementos semiconductores. Su invento estaba aún en un estado primitivo, pero en septiembre de 1958 construyó el oscilador más pequeño del mundo (un circuito integrado), de una frecuencia de 1,33 MHz; una semana más tarde construyó un biestable o flip-flop; antes de final de año había construido por difusión resistencias y condensadores. La Compañía Texas Instrument anunció el 6 de febrero de 1959 el descubrimiento del circuito sólido, hoy circuito integrado. El 30 de julio de 1959 otro ingeniero, Robert N. Noyce, de la *Fairchild Semiconductor*, patentó una idea similar; por ello se considera que Kilby y Noyce han sido los inventores del circuito integrado. En 1964 el Director de la Texas Instrument, Patric Haggerty, propuso a Kilby

que trabajara en el diseño de una caculadora electrónica de bolsillo. El proyecto se completó en tres años, pero no se sacó al mercado hasta 1971. La patente tenía el número 3.819.921 y llevaba el nombre de Kilby. En 1970 Kilby dejó la Texas Ins. y se estableció por su cuenta como consultor privado, y también daba clases en la Universidad de Texas. Tenía en su poder cerca de 50 patentes y también multitud de premios y medallas. Premio Nobel de Física del año 2000.

NOYCE, Robert (1927-1990). Ingeniero eléctrico americano. Nació el 12 de diciembre de 1927 en Burlington, Iowa. Murió el 3 de junio de 1990 en Austin, Texas. Recibió su B. A. del Grinnell College de Iowa en 1949. Se doctoró en 1953 en el *Massachusetts Institute of Technology*. Al finalizar sus estudios ingresó en el laboratorio de Investigación de la Compañía Philco, donde trabajó en el desarrollo de transistores de germanio de altas prestaciones. En 1956 se traslada a Palo Alto para trabajar en dispositivos de silicio difundido en los Laboratorios de Semiconductores Shockley. En 1959, Noyce y siete ingenieros de la empresa anterior se independizan y fundan la Compañía *Fairchild Semiconductor*; como director de investigación de esta Compañía fue el responsable de la construcción de transistores de silicio con tecnología planar. Durante este período desarrolló con Jean Hoerni la idea de circuito integrado; Jack Kilby, de la Texas Instrument, en Dallas, tuvo una idea similar unos meses antes, y las patentes de ambos ingenieros se hicieron en el mismo año con una diferencia de seis meses. Después de varios juicios se consideró que ambos científicos eran los inventores del circuito integrado. En realidad, Noyce ganó, pero su patente fue cambiada por TI (*transistor integrated*) en vez de IC (*integrated circuit*). En 1968 R. Noyce y Gordon Moore, otro ingeniero fundador de la Fairchild, fundaron la *Intel Corporation*; Noyce fue presidente de esta empresa hasta 1975 y más tarde continuó en el Consejo de Administración de la misma. Noyce estaba en posesión de 16 patentes sobre tecnologías específicas de semiconductores, circuitos integrados, etc. Pertenecía a la Academia Nacional de Ingeniería (1969). Premiado con la medalla de Honor del IEEE en 1978 por sus contribuciones a la construcción del circuito integrado de silicio.

SHOCKLEY, William Bradford (1910-1989). Físico americano. Nació el 13 de febrero de 1910 en Londres, Inglaterra. Murió el 12 de agosto de 1989. Su infancia la pasó en Palo Alto, California. Se graduó en 1932 en el Instituto de Tecnología de California en Pasadena y se doctoró en Física en el MIT en 1936. En este mismo año ingresó en los Laboratorios Bell en Murray Hill, NJ. Allí dirigiría después de la Segunda Guerra Mundial un grupo investigador para desarrollar componentes de estado sólido. En abril de 1947, Shockley sugirió que lo que hoy día se conoce como transistor de efecto de campo podía actuar como amplificador; se hicieron los montajes adecuados, pero el dispositivo fallaba; entonces, en noviembre de 1945 pasó a este grupo otro físico, John Bardeen, que se encargó de verificar los cálculos y de montar con W. H. Brattain un nuevo prototipo que se construyó en el mes de diciembre; un poco antes de la Navidad se comprobó que el dispositivo funcionaba. Bautizaron a este elemento con el nombre de transistor. Realmente no habían construido un transistor de efecto de campo sino un transistor bipolar; más tarde, en enero de 1948, desarrollarían el transistor de unión (bipolar). Por este descubrimiento, Shockley, Bardeen y Brattain recibieron en 1956 el Premio Nobel de Física. En 1956 dejó la Compañía Bell y fundó la Shockley *Semiconductor Laboratory* en Palo Alto, California, hasta que fue absorbida en 1960 por la Clevite Co. y ésta a su vez por la ITT (*International Telephone and Telegraph*) en 1965, cuando él volvió a la Bell. De la empresa original que fundó Shockley, ocho ingenieros abandonaron la misma para formar la Fairchild Semiconductor, y más tarde dos de ellos (Robert Noyce y Gordon Moore) fundarían la Intel. Desde 1963 Shockley compartió su trabajo empresarial con el docente, ya que fue nombrado catedrático en Stanford. En 1965, después de su jubilación en la Bell, siguió en la Universidad de California como profesor emérito.

Referencias

BARTON, Thomas H.: *Rectifiers, Cycloconverters and AC Controllers.* Clarendon Press, Oxford, 1994.

BIRD, B. M.; KING, K. G.: *An Introduction to Power Electronics.* John Wiley & Sons, New York, 1983.

BLASCHKE, Felix: *The Principle of Field Orientation as Applied to the New Transvektor Closed-Loop Control System for Rotating-Field Machines.* Siemens Review XXXIX (1972), N.º 5, pág. 217-220.

BONAL, J.; SÉGUIER, Guy: *Variable Speed Electric Drives.* Prométhée, Schneider Electric, Volume 1, 2. Editions Tec-Doc, París, 2000.

BOSE, B. K.: *Power Electronics AC Drives.* John Wiley & Sons, New York, 1986.

BOSE, B. K.: *Power Electronics-An Emerging Technology*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 36, N.º 3, December 1989, págs. 403-412.

BUHLER, H.: *Electrónica Industrial. Electrónica de Potencia*. Colección Ciencia Electrónica, Ed. G. Gili, Barcelona, 1981.

CHAPMAN, S. J.: *Máquinas Eléctricas.* McGraw-Hill Book, Santafé de Bogotá, Colombia, 1993

CHILIKIN, M.: *Accionamientos Eléctricos.* Edit. Mir, Moscú, 1972.

CROWDER, Richard M.: *Electric Drives and their Controls.* Clarendon Press, Oxford, 1995.

CSAKI, F.; GANSZKY, K.; IPSITS, I.; MARTI, S.: *Power Electronics.* Academiai Kiado, Budapest, 1971.

DATTA, S.: *Power Electronics and Control.* Prentice Hall-Reston, Englewoods Cliffs, NJ., 1985.

DEWAN, S. B.; SLEMON, G. R.; STRAUGHEM, A.: *Power Semiconductor Drives.* John Wiley Interscience, New York, 1984.

DEWAN, S. B.; STRAUGHEM, A.: *Power Semiconductor Circuits.* John Wiley & Sons, New York, 1975.

DRURY, Bill: *The Control Techniques Drives and Controls Handbook.* The Institution of Electrical Engineers, London, 2001.

DUBEY, Gopal K.: *Power Semiconductor Controlled Drives.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

EL-HAWARY, Mohamed E.: *Principles of Electric Machines with Power Electronic Applications.* Reston Book, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, N. J., 1986.

FAURE, R.: *Máquinas y Accionamientos Eléctricos.* Fondo Editorial de Ingeniería Naval, Colegio Oficial de Ingenieros Navales, Madrid, 2000.

FISHER, M. J.: *Power Electronics.* PWS-Kent Publishing Co., Boston, 1996.

FITZGERALD, A. E.; KINGSLEY, C.; UMANS, S. E.: *Máquinas Eléctricas.* Ed. McGraw-Hill, México, 1992.

GRAY, C. B.: *Máquinas Eléctricas y Sistemas Accionadores.* Ed. Alfaomega, México, 1993.

IGLESIAS, J. I.; JIMÉNEZ, J. A.: *Sistemas de tracción en los trenes españoles de alta velocidad.* Ingeniería Civil, N.º 118, Mayo-Junio de 2000, págs. 55 a 62.

JONES, B. L.; BROWN, J. E.: *Electrical Variable-Speed Drives*. IEE Proceedings, Vol. 131, Pt. A, N.º 7, September, 1984, págs. 516-603.

KRAMER, C.: *Speed regulation of asynchronous motors*, ETZ, 1908, Vol. 29, págs. 734-737.

KUSKO, A.: *Solid State DC Motor Drive.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1969.

LANDER, C. W.: *Power Electronics.* McGraw-Hill Book Co. (UK), London, 1981.

LEONHARD, W.: *Control of Electric Drives.* Springer-Verlag, Berlín, 1985.

MAZDA, F. F.: *Thyristor Control.* Newnes-Butterworths, 1973.

MCMURRAY: *The Theory and Design of Cycloconverters.* MIT Press, Cambridge, Massach., 1972.

MOHAN, Ned; UNDELAND, Tore M.; ROBBINS, William: *Power Electronics: Converters. Applications and Design.* John Wiley & Sons, New York, 1989.

MURPHY, J. M. D.: *Thyristor Control of AC Motors.* Pergamon Press, Oxford, 1973.

NAGRATH, L. J.; KOTHARI, D. P.: *Electric Machines.* Tata McGraw-Hill Publishing Co. New Delhi, 1985.

NOVOTNY, D. W.; LIPO, T. A.: *Vector Control and Dynamics of AC Drives.* Clarendon Press, Oxford, 1996.

PEARMAN, Richard A.: *Power Electronics Solid State Motor Control.* Reston Pub. Co. Inc., Reston, Virginia, 1980.

PELLY, B. R.: *Thyristor Phase Controlled Converters and Cycloconverters.* John Wiley & Sons, New York, 1971.

PILLAI, S. K.: *A First Course on Electrical Drives.* Wiley-Eastern, New Delhi, 1971.

RAJASHEKARA, K.; KAWAMURA, A.; MATSUSE, K.: *Sensorless Control of AC Motor Drives: Speed and Position Sensorless Operation.* IEEE Press, New York, 1996.

RAMAMOORTHY, M.: *An Introduction to Thyristors and their Applications.* Affiliated East-West Ltd., New Delhi, 1977.

RAMSHAW, R. S.: *Power Electronics: Thyristor Controlled Power for Electric Motors*. Chapman Hall, 1973.

RASHID, M. H.: *Power Electronics.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1988.

ROSENBERGER, Alex: *Vector Control: The Future for Drives.* Electrical Review, Vol. 221, N.º 22, págs. 26-27.

SCHERBIUS, A.: *New machine for the Phase compensation of single o polyphase induction motors*, ETZ, 1912, Vol. 33, págs. 1079-1083.

SCHRAGE, H. K.: *New Polyphase conmutator motor*. ETZ, 1914, Vol. 35, págs. 89-93.

SEN, P. C.: *Power Electronics.* Tata McGraw-Hill Book, New Delhi, 1987.

SEN, P. C.: *Thyristor DC Drives.* John Wiley & Sons, New York, 1981.

SEN, P. C.: *Electric Motor Drives and Control: Past, Present, and Future.* IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 37, N.º 6, December 1990, págs. 562-575.

SHEPHERD, W.; HULLEY, L. N.; LIANG, D. T. W.: *Power Electronics and Motor Control*, 2.ª ed. Cambridge University Press, New York, 1995.

SLEMON, Gordon: *Electric Machines and Drives.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1995.

STEVEN, R. E.: *Electrical Machines and Power Electronics.* Van Nostrand Reinhold, 1983.

VAN WYK, J. D.; SKUNDELNY, Ch.; MLLER-HELMAN, A.: *Power Electronics, Control of the Electromechanical Energy Conversion Process and some Applications.* IEE Proceedings, Vol. 133, Pt. B, N.º 6, November 1986, págs. 369-399.

VAS, Peter: *Vector Control of AC Machines.* Clarendon Press, Oxford, 1992.

WILDI, Th.: *Electrical Machines, Drives, and Power Systems*, 3.ª ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.

www.vialibre-ffe.com; www.todotrenes.com: Direcciones de Internet en las que se encuentra información sobre la tracción eléctrica española.

APÉNDICE 1

Máquinas eléctricas: aspectos históricos

1. LOS ORÍGENES

Las máquinas eléctricas, cuyo estudio se presenta en este libro, son el resultado de una aplicación inteligente de los principios básicos del electromagnetismo, que se empezaron a desarrollar en el siglo XIX con los experimentos de Oersted, Faraday, Henry, Lenz, Barlow y la sintetización que hizo Maxwell en 1879. Dentro de los trabajos que realizaron los científicos anteriores, se puede considerar como punto de partida para el estudio de las máquinas eléctricas el principio de inducción electromagnética, descubierto por Michael Faraday en 1831. Los experimentos posteriores de este gran investigador demuestran de un modo fehaciente el principio de conversión de la energía eléctrica en mecánica y viceversa (principio dinamoeléctrico). La ley de inducción de Faraday fue el detonador para que muchos científicos e ingenieros buscaran una máquina eléctrica que generase electricidad de un modo diferente al que se conocía en aquellos tiempos, como era la pila de Volta. La ingeniería eléctrica se puede decir que nace en aquel momento. En estos casi ciento ochenta años de historia se han producido grandes transformaciones, y la ingeniería eléctrica, que originalmente comprendía la conversión de energía: máquinas eléctricas, el alumbrado, la telegrafía y la telefonía, se ha desarrollado tan espectacularmente que hoy día ha dado lugar a nuevas áreas, que incluyen aspectos tan diversos como la electrónica y las telecomunicaciones, los ordenadores, el control automático de máquinas y procesos, los sistemas de navegación como el radar y los equipos como el sonar, loran y shoran, las medidas mediante rayos láser y también la ciencia de la información como base para comprender los procesos de la comunicación.

Durante la primera época de desarrollo de esta rama de la técnica, las máquinas eléctricas desempeñaron un papel rector, que determinaba el movimiento de toda la Ingeniería Eléctrica, merced a su aplicación en los campos de la generación, transformación y utilización de la energía eléctrica. Los perfeccionamientos en el diseño de máquinas eléctricas contribuían a nuevas posibilidades de su empleo práctico y estimulaban el progreso ulterior y las más diversas aplicaciones de la energía eléctrica, lo que explica el hecho de que los científicos e ingenieros le prestasen especial atención, y de que ésta adquiriese rápidamente la perfección técnica de sus formas constructivas que poseen actualmente.

Las máquinas eléctricas se acuñaron por primera vez con el nombre de **máquinas dinamoeléctricas**, este término se debe a Charles Brooke; que lo incluyó en la página 409, volumen XV, del «**Proceedings de la Royal Society**» de 1867, en un artículo sobre conversión de energía. La expresión anterior, en su sentido general, incluye todos los tipos de máquinas eléctricas en los que el funcionamiento depende del principio de inducción de Faraday. En

base a la denominación anterior, las máquinas eléctricas se definían como convertidores de energía mecánica a energía eléctrica: **generadores**; o a la inversa, como convertidores de energía eléctrica a mecánica: **motores**. Más tarde, con la aparición del transformador, se hizo una definición más amplia para incluir esta nueva máquina, y así se puede decir que desde un punto de vista energético, una máquina eléctrica es un convertidor de energía de una forma a otra, una de las cuales al menos es eléctrica, y de acuerdo con ello se clasifican en:

a) **GENERADORES**: que transforman la energía mecánica en eléctrica. La acción se desarrolla por el movimiento de una bobina en un campo magnético, resultando una f.e.m. inducida que se aprovecha en el exterior.

b) **MOTORES**: que transforman la energía eléctrica en mecánica. La acción se desarrolla introduciendo una corriente en la máquina por medio de una fuente de alimentación exterior. La corriente anterior interacciona con un campo magnético inductor, resultando un par que produce el movimiento de la máquina.

c) **TRANSFORMADORES**: que transforman una energía eléctrica de entrada (de c.a.), con determinada tensión y corriente, en otra energía eléctrica de salida (de c.a.), de magnitudes de tensión y corriente diferentes.

2. GENERADORES

2.1. Generadores de c.c. o dinamos

Los primeros generadores de energía eléctrica fueron las pilas químicas de Volta, que producían una f.e.m. de amplitud constante denominada corriente continua; por esta razón, los físicos e ingenieros de la primera mitad del siglo XIX que trabajaban con estos elementos galvánicos, pretendían conseguir también una máquina eléctrica rotativa que suministrara corriente continua. El período fundamental de desarrollo del generador eléctrico, en el curso del cual éste obtuvo todos los rasgos de la máquina moderna, abarca el tiempo comprendido entre los años 1831 y 1886, en los que se producen las cuatro etapas de desarrollo siguientes:

1. Máquina magnetoeléctrica con imanes permanentes.
2. Empleo de electroimanes con excitación independiente en las máquinas.
3. Máquinas eléctricas con autoexcitación e inducidos elementales.
4. Máquinas eléctricas autoexcitadas con inducidos perfeccionados y sistema magnético multipolar.

La primera fase abarca los años comprendidos entre 1831 y 1851. En este período de tiempo la máquina eléctrica, que inicialmente representaba una experiencia de laboratorio, se va transformando hasta conseguir un modelo semi-industrial con aplicaciones en electroquímica y alumbrado. Faraday, tras descubrir el principio de inducción magnética en el otoño de 1831, realizó experiencias con bobinas y solenoides. En noviembre de 1831 construyó una nueva máquina eléctrica. Era un disco de cobre de doce pulgadas de diámetro (1 pulgada = 25,4 mm) y 1/5 de pulgada de espesor que giraba sobre un eje horizontal, dentro del campo magnético de un potente electroimán. Al colocar una banda conductora rozando la periferia del disco y otra sobre el eje, comprobó con un galvanómetro unido a estas bandas que se obtenía una desviación del mismo. De este modo Faraday demostraba la producción de electricidad mediante imanes permanentes. A los pocos meses, en julio de 1832, Dal Negro de Padua, en Italia (*Phil. Mag.*, third series, vol. 1, pág. 45), construyó una máquina de tipo oscilante que era poco práctica pero demostraba un efecto motor. En ese mismo año, Hip-

polyte Pixii, de París, construyó la primera máquina magnetoeléctrica generadora que producía corriente alterna (había nacido el alternador). Sin embargo, a esta señal alterna no se le veían aplicaciones prácticas porque tenía una forma de onda diferente a la que se conocía de las pilas de Volta. Pixii mejoró más tarde esta máquina asesorado por Ampère e ideó un conmutador primitivo para rectificar la onda resultante y convertirla en una onda unidireccional.

En 1833 el inglés Ritchie construyó una máquina magnetoeléctrica con colector invertido, que también daba lugar a una señal pulsatoria unidireccional. En ese mismo año aparece la máquina de Saxton, que constaba de un imán en herradura colocado en posición vertical y dentro de sus polos giraba un inducido con cuatro bobinas, de donde se obtenía corriente alterna. Clarke, en 1835, construyó una máquina similar pero dotada de un conmutador especial para obtener corriente continua. Von Ettingshausen en 1837 y Poggendorf en 1838 idearon también diferentes tipos de mecanismos para la rectificación de la corriente. Experiencias similares fueron realizadas por Sturgeon, Stöhrer y Wheatstone. En 1841, Woolrich construyó una máquina multipolar para electroquímica que tenía el doble de bobinas que de polos, siendo la ventaja de utilizar más bobinas el que la tensión de salida del conmutador era menos pulsatoria e intermitente y se parecía por ello más a la corriente continua. Nollet, en 1849, diseñó una máquina de corriente alterna, que fue perfeccionada por Holmes y construida por la firma «L'Alliance» (compañía belga que se dedicaba a instalaciones de alumbrado de faros). Con la aprobación de Faraday, Holmes construyó una máquina perfeccionada de corriente continua, que se mostró al público en la Exposición Internacional de 1862. Era una máquina multipolar dotada con un gran conmutador, tenía 160 bobinas y 60 imanes en herradura dispuestos en tres círculos, presentando cada uno radialmente cuarenta polos. Esta máquina se exportó a diversos países, empleándose en alumbrado de faros y edificios. (*Una máquina de La Alianza se utilizó en el primer alumbrado de la Puerta del Sol de Madrid el 24 de enero de 1878*.)

Un rasgo de la segunda fase de desarrollo de los generadores eléctricos, que se refiere al período comprendido entre 1851 y 1867, es el paso a la excitación con electroimanes. Wheatstone en 1845, Watt en 1852 y Valenn en 1862 patentaron el uso de electroimanes en vez de imanes permanentes para excitar las nuevas máquinas eléctricas. Los electroimanes se alimentaban exteriormente por medio de pilas de Volta. En 1851, Sinsteden hizo una importante aportación: teniendo en cuenta que la tensión producida por una máquina magnetoeléctrica era capaz de excitar un electroimán consiguiendo una fuerza dos veces superior a la obtenida con un imán permanente, él destacó que con este procedimiento en cascada se podría aumentar la corriente hasta un valor enorme. De hecho, Sinsteden hizo algunas experiencias con la máquina de Woolrich y logró con una combinación de tres máquinas excitar un electroimán que podía sostener un peso de casi 500 kg. Con este método se evitaba el uso de baterías eléctricas. H. Wilde desarrolló las ideas de Sinsteden construyendo entre 1861 y 1867 diferentes modelos de generadores de corriente continua o dinamos (*en la patente inglesa n.º 3.006, 1863, Wilde describe el uso de una pequeña dinamo que empleaba para excitar otra de mayor potencia; en abril de 1866 desarrolla este tema en la Royal Society).* A esta segunda fase corresponden también la invención por parte de Werner Von Siemens del inducido de doble T o lanzadera (**shuttle wound**, *patente n.º 2.107 de 1856*), precursor del inducido cilíndrico dentado, y la invención, debida a Antonio Pacinotti, de Florencia, del inducido en anillo (1860) (*Revista Nuovo Cimento,* 19, pág. 378, 1865), que él denominó electroimán transversal.

La tercera fase del desarrollo se caracteriza por el descubrimiento del principio de autoexcitación y abarca el intervalo entre 1867 y 1870. El principio de autoexcitación fue descubierto y claramente formulado en el año 1851 por Soren Hjörth, quien más tarde, en el año 1855,

construyó y patentó una dinamo con autoexcitación. La idea de la autoexcitación era aprovechar parte de la corriente de la propia máquina para reforzar el campo magnético de los polos; inicialmente la máquina produce una pequeña tensión debido al magnetismo remanente de los polos, y para **cebar** el generador es preciso que la tensión generada alimente las bobinas de los polos (electroimanes) de tal modo que el flujo quede reforzado. En 1866, S. A. Varley patentó también máquinas autoexcitadas (*patente n.º 3394 de 1866*). El 17 de enero de 1867 Werner Von Siemens presentó a la Academia de Ciencias de Berlín una máquina autoexcitada, a la que dio el nombre de «**dynamo-electrische Machine**», máquina dinamo-eléctrica (*Pogg. Ann.*, feb. 1867). Sus resultados fueron comunicados a la Royal Society (14-2-1867) por su hermano Sir William Siemens en un artículo titulado: **On the conversion of Dynamical into Electrical Force without the Aid of Permanent Magnetism** (*Sobre la conversión de la fuerza dinámica en electricidad sin la ayuda de imanes permanentes*). El mismo día, Wheatstone presentaba en la Royal Society una idea análoga desarrollando el trabajo: **On the Augmentation of the Power of a Magnet by the Reaction thereon of Current induced by the Magnet itself** (*Aumento de la potencia de un imán por la reacción de la corriente inducida por el propio imán)*. La diferencia entre ambos modelos era que Siemens proponía un esquema con bobinas de excitación en serie con el inducido, mientras que Wheatstone era partidario de una conexión en paralelo (**shunt**). Debido a la gran iniciativa de Siemens, en su propia fábrica impulsó y desarrolló su dinamo, contribuyendo al impetuoso desarrollo de la máquina eléctrica, y por ello se le considera como inventor de la autoexcitación.

La cuarta fase, que fue la etapa de elaboración de las partes fundamentales de la dinamo, abarca 16 años, desde 1870 a 1886. Durante este período de tiempo, la máquina de corriente continua adquirió los rasgos fundamentales de la forma moderna. El inventor belga Zénobe Théophile Gramme, sin conocer los trabajos de Pacinotti, propuso un modelo de máquina autoexcitada en 1870 con un inducido en anillo, dando lugar a la primera dinamo comercial, y por ello a Gramme se le considera como el inventor de esta máquina (*patente británica n.º 1.668 de 1870)*. En 1873, el ingeniero de la casa Siemens Von Hefner-Alteneck modificó el inducido en anillo y propuso el devanado en tambor, que mejoraba el rendimiento y construcción del inducido.

En Estados Unidos, Charles Brush patentó también en 1878 diversas dinamos, algunas específicas para equipos de soldadura. Weston, en 1882, obtuvo la patente del devanado de doble capa. En 1880, Edison, con su ayudante Upton, propusieron la utilización de chapas de acero en la construcción de inducidos. Elihu Thomson y E. J. Houston obtuvieron también patentes de dinamos con devanados abiertos. En 1881, en la Exposición de Electricidad de París, se presentaron un gran número de máquinas eléctricas de los principales fabricantes del mundo, habiéndose conseguido en aquel momento casi la perfección constructiva actual. En esta última fase de desarrollo de la máquina de corriente continua se lleva a cabo la elaboración de la teoría de la dinamo y el estudio riguroso de su diseño. Los hermanos J. y E. Hopkinson desarrollan en 1886 una metodología para el cálculo del circuito magnético y donde incluyen las definiciones de fuerza magnetomotriz (f.m.m.) y reluctancia (**Dynamo-Electric Machinery**, *maquinaria dinamo-eléctrica, Phil. Trans.*, may 6, 1886. Este artículo fue ampliado posteriormente con otro: **Dynamo-Electric Machinery**, *Proc. Roy. Soc.*, feb. 15, 1892). A estos ingenieros se les debe el método de representar por una curva la relación entre la corriente de excitación de los polos y la f.e.m. producida por la máquina; tales gráficas, conocidas con el nombre de **curvas características**, fueron la base de las investigaciones teóricas posteriores del francés Marcel Deprez. Con los trabajos de los hermanos Hopkinson el diseño de la dinamo, que había sido bastante empírico hasta entonces y basado en experiencias prácticas, comienza a tener una base científica que necesitaba un

estudio riguroso del circuito magnético. A partir de entonces el inventor tradicional tendrá que dejar paso a los ingenieros, dotados de una mayor formación científica para poder desarrollar nuevas máquinas y mejorar los diseños existentes. En 1880 el alemán Fröelich desarrolló una fórmula matemática para expresar la curva de imanación de las dinamos, lo que facilitaba los análisis teóricos.

Los trabajos de Deprez en Francia y J. Perry en Inglaterra sugirieron en 1881 el empleo de la llamada excitación compuesta (**compound**) para obtener una autorregulación de una dinamo. La denominación «compound» se debe a Crompton y Kapp (1883). Hay que destacar aquí que fueron varios científicos los que reclamaron las diversas patentes de autoexcitación. Los sistemas de serie y paralelo (shunt) se sabe con certeza que fueron ampliamente utilizados por Brush, pero fue S. A. Varley el que los había patentado en 1876 (*patente n.º 4.905 de 1876*). También el devanado compound había sido descrito por Sinsteden en 1871, pero la patente fue de Crompton y Kapp, como ya se ha señalado (*patente n.º 4.810 de 1882*). Otras contribuciones a la teoría de las dinamos fueron hechas por Lord Kelvin (1881) sobre tipos de devanados para asegurar un mejor rendimiento y por G. Kapp (1887) en la predeterminación de la curva característica; Swinburne estudió la reacción del inducido (1890); Esson presentó varios artículos sobre diseño de dinamos en 1890 (**Some Points in Dynamo and Motor Design**, *Algunos aspectos sobre el diseño de dinamos y motores*, *Journal Inst. Elec. Eng.*, vol. XIX, feb. 13, 1890; **Notes on the Design of Multipolar Dynamos**, *Notas sobre el diseño de dinamos multipolares*, *J.I.E.E.*, vol. XX, pág. 265). J. Fischer-Hinnen publicó varios artículos en la revista alemana *E.T.Z.*, en los que analiza el fenómeno de la conmutación y chispeo en el colector (n.º 5 de 1893 y n.ºs 51 y 52 de 1898). Arnold (1899) escribió numerosos trabajos sobre los diferentes tipos de inducidos. En particular, Arnold fue el primero en establecer las reglas generales de diseño y fórmulas para el estudio de los devanados; desarrolló asimismo en 1891 el devanado serie-paralelo que lleva su nombre; investigó los problemas de conmutación y el comportamiento del contacto delga-escobilla. Entre los años 1890 y 1900 se escribieron muchos textos sobre máquinas eléctricas en los que se explicaban la teoría, diseño y construcción de las mismas. Deben destacarse fundamentalmente los libros de G. Kapp (**Dynamos, alternators and transformers**, *Dinamos, alternadores y transformadores*, London, 1893), Silvanus P. Thompson (**Dynamo-electric Machinery**, *Maquinaria dinamo-eléctrica*, London, 1896), E. Arnold (**Die Ankerwicklungen und Ankerkonstructionen der Gleichstrom-Dynamo Maschinen**, *Los devanados de inducidos y la construcción de inducidos en las máquinas de corriente continua*, Berlín, 1899) y H. M. Hobart (**Electric Generators**, *Generadores eléctricos*, London, 1900).

2.2. Generadores de c.a. (alternadores)

El análisis desarrollado hasta aquí se refiere fundamentalmente a la historia del generador de corriente continua o dinamo. Debe destacarse que la máquina de corriente continua, después de adquirir un fuerte grado de desarrollo entre los años 1870 y 1890, reveló también una serie de dificultades técnicas relacionadas con la obtención de grandes potencias unitarias y altas tensiones entre sus terminales. Aunque se hicieron grandes esfuerzos de investigación para conseguir un transporte de energía eficiente en corriente continua, fundamentalmente por el francés Marcel Deprez, se vio enseguida la ineficacia de la dinamo.

Con el descubrimiento del transformador en el año 1885 se planteará el diseño de generadores de corriente alterna o alternadores, que se habían dejado abandonados por la búsqueda de una máquina que diera una señal análoga a la de las pilas de Volta. La introducción de la corriente alterna estuvo llena de grandes disputas, en las que se reflejaban motivos tanto

técnicos como económicos. En Europa estaban a favor de la corriente continua: Lord Kelvin, Crompton, A. W. Kennedy y J. Hopkinson, y a favor de la corriente alterna: Ferranti, Gordon, W. M. Mordey y Silvanus Thompson. En Estados Unidos defendía la corriente continua Edison y la corriente alterna Westinghouse, Tesla, Sprague y Steinmetz. El que el proyecto de la central a instalar en las cataratas del Niágara fuera adjudicado a la Compañía Westinghouse en 1893 fue el declive de la corriente continua a favor del auge de la corriente alterna (esta central tenía una potencia de 50.000 CV con un salto neto de 54 m; disponía de 10 turbinas tipo Fourneyron, que movían alternadores **bifásicos** de 3.500 kVA con eje vertical y que generaban una tensión de 2.300 V/fase; la velocidad de giro era de 250 r.p.m.; el inducido de cada alternador era **interior y fijo**, mientras que el inductor estaba situado en el **exterior y era móvil** con los polos radiales mirando hacia dentro de la estructura; componían un total de 12 polos, de tal modo que la velocidad tangencial en los mismos alcanzaba los 40 m/s y se obtenía una frecuencia de 25 Hz).

No dejará de reconocer el lector la injusticia histórica con el generador de corriente continua: después de dedicar multitud de esfuerzos los científicos e ingenieros para conseguir una dinamo eficiente, dotada de un rectificador mecánico ingenioso y práctico como es el colector de delgas, en plena adolescencia deberá dar paso a ese gran neófito que es la corriente alterna y que se irá imponiendo paulatinamente en todas las instalaciones eléctricas debido a su mayor sencillez en la generación, transporte y distribución de la energía eléctrica. Hoy día la generación de la energía eléctrica en las centrales se realiza en corriente alterna, se eleva la tensión con ayuda de transformadores, el transporte se realiza en corriente alterna y también la distribución y la mayor parte de la utilización.

Justo es destacar que a partir de 1954 se proyectaron y realizaron redes de transporte en corriente continua en alta tensión (vuelta a los orígenes), que son más eficientes en líneas largas superiores a 1.000 km de longitud y en líneas submarinas de cualquier longitud. Por otro lado, la corriente continua es necesaria en procesos electroquímicos: electrólisis, galvanoplastia, etc., y también se emplea en muchos países en tracción eléctrica por la mayor facilidad de regulación de la velocidad de los motores de corriente continua frente a los de corriente alterna (en España la tracción eléctrica se realiza en c.c. a 3.000 V, los trenes metropolitanos funcionan con 600 V de c.c., el tren de alta velocidad español AVE trabaja con c.a. monofásica a 25.000 V). Los avances de la electrónica de potencia hacen prever que en un futuro próximo desaparezca el motor de corriente continua frente al motor de corriente alterna, ya que éste es más barato y robusto en su construcción que aquél, debido a la necesidad del conmutador (colector de delgas) en los motores de corriente continua.

Volviendo a la historia, al descubrirse el transformador alrededor de 1885, la experiencia acumulada por los ingenieros en el desarrollo de la máquina de corriente continua hace que el progreso en el diseño de generadores de corriente alterna, o alternadores, se efectúe con gran rapidez. Ya se ha indicado que Nollet, en 1849, proyectó una máquina de corriente alterna pero que en aquel momento se abandonó en pro de la dinamo; el alternador necesita unos polos encargados de la excitación y un inducido donde se obtiene la c.a. de salida. Afortunadamente ya existía la dinamo y la excitación se hace con esta máquina, que alimenta las bobinas de los polos del alternador (de ahí la denominación de **dinamo excitatriz**). Al principio, los alternadores eran monofásicos, después fueron bifásicos (desarrollados por Tesla en los Estados Unidos) y finalmente trifásicos (Dolivo-Dobrowolsky, de la AEG en Europa), que es la concepción actual y adoptada a partir del último decenio del siglo XIX.

Los progresos en el diseño y construcción de alternadores se deben a los hermanos J. y E. Hopkinson, W. M. Mordey, Gisbert Kapp, Ferranti y C. E. L. Brown. A este último, fundador de la empresa Brown-Boveri, se le debe la adopción de colocar los polos en el rotor

del alternador, lo que enseguida demostró ser una excelente idea constructiva. Este tipo de montaje fue utilizado en la construcción de los alternadores para el **primer transporte de energía eléctrica trifásica** que se hizo en el mundo (año 1891) entre las ciudades alemanas de Lauffen y Frankfurt, en cuya realización intervino también Dolivo-Dobrowolsky, de la compañía **Allgemeine Elektricitäts-Gesellschaft** (AEG). (Esta instalación llevaba un alternador de 300 CV [210 kVA] conectado en estrella que generaba una tensión de 50 V/fase; la máquina tenía 32 polos y giraba a 150 r.p.m., por lo que se obtenía una frecuencia de 40 Hz; la tensión anterior se elevaba con ayuda de un transformador estrella-estrella a una tensión de 8.500 V/fase; la longitud de la línea era de 175 km, lo que requirió el uso de 3.000 postes de madera de 8 m de altura; al final de la línea la tensión se reducía con un transformador estrella-estrella a 65 V/fase. Esta instalación demostró no solamente la utilidad de las altas tensiones en el transporte de energía eléctrica, sino el empleo eficaz de las corrientes trifásicas.) También se debe a Brown la idea de adoptar un eje turbina-alternador con disposición vertical en las centrales hidroeléctricas y la estructura del rotor de polos lisos en los turbogeneradores de las centrales térmicas, que se conserva en la actualidad.

Las frecuencias de los alternadores variaban en principio entre los 25 Hz y los 135 Hz; finalmente se procedió a una normalización y se eligieron los valores de 50 Hz (Europa) y 60 Hz (Estados Unidos), que se utilizan actualmente en el mundo. Tesla diseñó alternadores de alta frecuencia y en 1892 construyó un generador con 384 polos que generaba un tensión a una frecuencia de 10.000 Hz. La teoría sobre el comportamiento de los alternadores se debe fundamentalmente a A. Potier, de la École de Mines de París, y al profesor Blondel, de la École de Ponts y Chaussées de París. Joubert y Blondel fueron los primeros en determinar experimentalmente la forma de onda de la tensión de salida de un alternador. G. Kapp determinó la ecuación de la f.e.m. inducida; Behn-Esschenburg, de los talleres suizos Oerlikon desarrolló el concepto de regulación en las máquinas síncronas no saturadas de polos lisos (que dio lugar más tarde al concepto de impedancia síncrona). J. Hopkinson fue el primero que estudió con rigor la estabilidad estática del acoplamiento en paralelo y las condiciones que deberían cumplir. En Estados Unidos fueron importantes los trabajos de Elihu Thomson, de la Thomson-Houston (empresa que al unirse más tarde con la compañía de Edison daría lugar a la General Electric), y de B. G. Lamme y el profesor Forbes (consultor), de la compañía Westinghouse.

3. MOTORES

3.1. Motores de c.c.

Paralelamente a la construcción de generadores eléctricos se llevaba a cabo la construcción de motores eléctricos. Hasta los años 1860-1870 los desarrollos de motores y generadores eran independientes unos de otros. El principio de la transformación de energía eléctrica en mecánica (rotación electromagnética), formulado en 1821 por Faraday, sirvió de base para la construcción del motor eléctrico.

En el período 1822 y 1850 se construyeron diversos modelos físicos que confirmaban la posibilidad, en principio, de la transformación de energía eléctrica en mecánica. Barlow construyó en 1823 un motor con un disco giratorio. En 1831, Henry escribió un artículo: **On a Reciprocating Motion Produced by Magnetic Attraction and Repulsion** (*Sobre el movimiento recíproco producido por atracción y repulsión magnética,* publicado en el *Silliman's Journal*, vol. 20, págs. 340-343), en el que se exponía el principio de funcionamiento de uno

de los primeros motores construidos. Dal Negro, en 1833, construyó un prototipo de motor giratorio, en el que un imán sufría una oscilación continua por la acción del campo magnético de una bobina.

Thomas Davenport construyó también en 1831 un motor eléctrico que mejoró más tarde y lo patentaría en 1840. Charles Page ideó un motor muy ingenioso en 1838 que simulaba el funcionamiento de una máquina de vapor con movimiento alternativo; el cilindro era un solenoide y el pistón una barra de hierro. Su modelo fue mejorado más tarde por Bourbouze (1840). Jacobi, en 1834, construyó un motor eléctrico multipolar con movimiento giratorio y que disponía de un primitivo conmutador. Un motor semejante fue instalado por él mismo en 1838 para desplazar una barca en el río Neva, lo que representó la primera realización conocida de propulsión eléctrica de buques. Otros muchos motores fueron construidos en esa época y debidos a Davidson en Escocia, Wheatstone en Inglaterra, Froment en Francia y Pacinotti en Italia.

El principio de reciprocidad de la máquina eléctrica fue formulado por Lenz en 1838, y demuestra que la máquina eléctrica es reversible y que puede funcionar como generador o como motor. La comprobación práctica de este principio se debe a Fontaine y Gramme, que demostraron en la Exposición Internacional de Viena de 1873 el principio del transporte de energía desde una dinamo a un motor de c.c.: una dinamo Gramme actuaba como generador y otra como motor la reconvertía nuevamente en potencia mecánica. A partir de este momento, los fabricantes comenzaron la construcción de motores eléctricos destinados a la tracción eléctrica. En 1882, Ayrton y Perry patentaron reguladores o controladores automáticos para motores. Más tarde, en 1887, Frank Julian Sprague construyó un tranvía en Richmond, Virginia, habiendo resuelto los problemas de control de velocidad, suspensión y transmisión de fuerza mediante cajas de engranajes, y también dio una forma apropiada a la toma de corriente del **trolley (***trole***)**. Con el sistema Sprague se puede decir que comenzó la tracción eléctrica. Más tarde H. Ward-Leonard, en 1896, idearía un procedimiento de regulación de velocidad mucho más preciso y con mejores prestaciones. Su famoso artículo **volts versus ohms-the speed regulation of electric motor** (*voltios versus ohmios: la regulación de velocidad del motor eléctrico*), publicado en noviembre de 1896 en la revista del *American Institute of Electrical Engineers* (Instituto Americano de Ingenieros Eléctricos), representó un cambio profundo en la teoría y aplicación del control de la velocidad de los motores de c.c., ya que permitía conseguir una buena regulación sin tener que variar la resistencia del circuito del estátor o del rotor, sino modificando la f.e.m. del inducido de la máquina, lo que se traducía en un mejor rendimiento del sistema sin pérdida de estabilidad del motor.

La teoría del motor de c.c. se desarrolló simultáneamente con la teoría de la dinamo. Son de destacar los famosos textos de Eric Gerard, del Instituto electrotécnico belga de Montefiore (en este centro se formaron los profesores españoles Morillo y Farfán, catedrático en la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, y el padre Pérez del Pulgar, fundador del ICAI). Otros textos importantes de la época son los debidos a P. Janet, de la Escuela Superior de Electricidad de París; los de S. Thompson, del City and Guilds Technical College de Londres, y de E. Arnold, de la Universidad de Karlsruhe.

3.2. Motores asíncronos o de inducción

En cuanto a los motores de c.a. de tipo asíncrono o de inducción, en 1879 Walter Baily demostró ante la Physical Society de Londres la posibilidad de producir una rotación mediante las corrientes inducidas en un disco de cobre. Ferraris, en 1885, descubrió el campo magnético giratorio, utilizando dos corrientes alternas independientes de igual frecuencia pero dife-

rente fase. El mismo descubrimiento fue hecho casi a la vez por Nikola Tesla, que fue el primero que construyó y patentó este tipo de motores en octubre de 1887, y por lo que se le considera como el inventor de los mismos. Tesla publicó en la Revista AIEE Transactions de mayo de 1888 un artículo en el que describía tres tipos de motores inventados por él *(ha sido lamentable para la ingeniería eléctrica que un ingeniero de la talla de Tesla no publicara prácticamente nada sobre sus descubrimientos; este artículo probablemente sea uno de los pocos que dio a conocer al mundo científico);* todos ellos disponían de un estátor en forma de anillo; el primer tipo tenía un rotor con cuatro polos salientes, dando lugar a un motor de reluctancia que no poseía cualidades de autoarranque, pero que giraba a la velocidad de sincronismo; el segundo motor era un verdadero motor asíncrono: tenía el rotor devanado, que podía arrancar pero que giraba a una velocidad por debajo de la correspondiente al sincronismo, y el tercero era motor síncrono, que funcionaba suministrando corriente continua al devanado del rotor. Debe destacarse que los primeros motores asíncronos eran bifásicos y con polos salientes en el estátor, alimentados con dos corrientes desfasadas 90° en el tiempo y utilizando dos devanados desfasados 90° en el espacio. George Westinghouse compró las patentes de Tesla y utilizó a este ingeniero como consultor de su empresa; con la ayuda de C. F. Scott y B. G. Lamme, la empresa Westinghouse desarrolló un motor bifásico con devanados distribuidos tanto en el estátor como en el rotor, lográndose un motor práctico alrededor de 1892. En la Feria Mundial de Chicago de 1893, la fábrica de Westinghouse presentó un motor bifásico de 300 CV, 12 polos a 220 V, que era una gran hazaña para esa época; la alimentación de este motor se lograba mediante dos alternadores monofásicos de 500 CV, 60 Hz, acoplados mecánicamente en el mismo eje, pero que estaban desplazados 90° eléctricos en el espacio para poder generar una tensión bifásica.

En 1891 la compañía americana Thomson-Houston comenzó la construcción de motores de inducción trifásicos bajo la dirección de H. G. Reist y W. J. Foster. Por otra parte, en Europa, Dolivo-Dobrowolsky, ingeniero de la empresa alemana AEG, sugirió la utilización de circuitos trifásicos pero no independientes entre sí, sino mutuamente conectados; la expresión alemana **Verkettung der Phasen** (*encadenamiento de fases*) traduce esta dependencia mutua de las tres corrientes que constituyen un sistema trifásico. Este sistema lo bautizó con el nombre **Drehstrom** (que significa *corriente giratoria*) alrededor de 1890. Para el año 1893 Dolivo-Dobrowolsky había construido motores asíncronos de doble jaula de ardilla que mejoraban las cualidades de arranque de estos motores; también sugirió la construcción del motor de inducción con rotor devanado o con anillos deslizantes, para regular la velocidad del mismo, para lo cual es preciso conectar a los anillos un reostato de arranque y regulación de un modo equivalente al de los motores de c.c.

En Estados Unidos se unieron las compañías Westinghouse y la Thomson-Houston para fabricar motores asíncronos trifásicos; para ello resultó de gran utilidad en aquel momento el invento del ingeniero C. F. Scott, de la empresa Westingouse, para transformar un sistema bifásico en trifásico y poder alimentar estas máquinas. El rotor de jaula de ardilla, construido mediante barras de aluminio, fue patentado en 1916 por H. G. Reist y H. Maxwell, de la compañía General Electric.

En cuanto a los motores asíncronos monofásicos, en 1890 Maurice Leblanc demostró teóricamente que se podía alimentar con una tensión monofásica un motor trifásico mediante un dispositivo especial de arranque. La demostración de la descomposición de un campo alternativo en dos giratorios se debe a él mismo y a los trabajos de Blondel; este último, en 1894, hizo un estudio completo de la teoría correspondiente. El motor de fase partida fue inventado por Tesla, empleando dos devanados con resistencias muy diferentes para poder lograr un alto par de arranque. La idea de utilizar condensadores especiales para el arranque

de motores monofásicos se debe a Elihu Thomson en 1892 y también a Steinmetz; sin embargo, hubo que esperar hasta el año 1925 para que este motor se introdujera en el mercado, debido a la dificultad tecnológica en conseguir condensadores de alta capacidad. Latour patentó en 1904 sistemas específicos de arranque.

La teoría básica de los motores de inducción se desarrolló fundamentalmente en la etapa comprendida entre 1888 y 1930, destacando los trabajos e investigaciones de Silvanus Thompson, Charles Proteus Steinmetz, B. G. Lamme, Heyland, Behrend y P. L. Alger. En particular Behrend, Ossanna y Heyland desarrollaron alrededor de 1896 el diagrama del círculo, como método gráfico para analizar el funcionamiento de un motor asíncrono trifásico. En 1906 Bethenod hizo un estudio riguroso de los diagramas de funcionamiento de los motores asíncronos monofásicos. En 1911 Guilbert estableció el diagrama del círculo para este tipo de motores.

El motor asíncrono o de inducción es el motor que se utiliza con más frecuencia en el accionamiento industrial. Para comprender la evolución tecnológica de estas máquinas, sirva el dato comparativo de que un motor de 100 CV diseñado en el año 2003 ocupaba el mismo volumen que otro de 7,5 CV construido en 1897.

3.3. Motores síncronos

Los motores de c.a. de tipo síncrono siguieron una evolución similar a la de los alternadores. Hopkinson ya había demostrado en 1883 que un generador de c.a. trabajando en paralelo con otro podía hacer que éste continuara funcionando como motor si se desconectaba la entrada de su potencia mecánica. El motor síncrono se conoce, por consiguiente, desde esta fecha (aunque algunos textos señalan que fue descubierto por el ingeniero sueco Ernst Danielson, de la compañía ASEA, hoy ABB), pero no se encontró ningún procedimiento eléctrico para accionar su rotor desde el reposo hasta alcanzar la velocidad de sincronismo.

Con el descubrimiento del motor asíncrono por Tesla se desarrollaron los procedimientos de arranque asíncrono de los motores síncronos. Es importante destacar por ello la invención de las jaulas amortiguadoras en los polos de estos motores por Maurice Leblanc (1895). Con esta jaula de arranque, ayudada por la conexión en cortocircuito del devanado inductor, se puede arrancar el motor de un modo asíncrono: cuando se ha conseguido un régimen permanente asíncrono, se abre el inductor y se le aplica excitación de c.c. al rotor; en otros casos el arranque de un motor síncrono se hace mediante otro motor de tipo asíncrono con igual o a veces menor número de polos acoplado mecánicamente al síncrono, y entonces se aplica c.c. al rotor. El motor síncrono gira a una velocidad dependiente del número de polos del rotor y de la frecuencia de la tensión de alimentación al estátor y tiene la ventaja de poder regular su f.d.p. actuando sobre la excitación de los polos; a este régimen de funcionamiento se le conoce con el nombre de **condensador síncrono**. Al final del siglo XIX los motores de c.a. habían adquirido también un alto grado de perfección constructiva, merced fundamentalmente a los ingenieros Dolivo-Dobrowolsky, de la AEG; C. E. L. Brown, de Talleres Oerlikon (y que fundaría más tarde, en octubre de 1891, la compañía suiza Brown-Boveri), y de Tesla en los Estados Unidos.

3.4. Motores especiales de c.a.

El motor eléctrico monofásico de repulsión fue inventado por Elihu Thomson en 1887. Langdon-Davies patentó el motor asíncrono monofásico en 1891. En ese mismo año Ernest Wilson, que sustituyó a J. Hopkinson en la Cátedra de Ingeniería Eléctrica en el King’s College

de Londres, inventó el motor de c.a. serie y H. Görges desarrolló el mismo motor con conexión en paralelo. Wilson ya había construido en 1888 el motor de c.a. polifásico con colector de delgas. Dahlander desarrolló en 1897 el esquema de conmutación del número de polos para duplicar o reducir a la mitad la velocidad de un motor asíncrono trifásico.

Aunque la mayoría de los motores de c.a. existentes en la actualidad son de los tipos mencionados anteriormente, han existido otras configuraciones que es necesario mencionar por su interés histórico. En 1902, M. Osnos publicó en la revista alemana ETZ **(Elektrotechnische Zeitschrift)** un artículo sobre la regulación de velocidad de los motores de inducción, en el que demostraba que se podía conseguir un control de la velocidad aplicando una tensión de valor variable en el circuito secundario (que aunque este devanado se considera que está normalmente en el rotor, puede no ser así). Esta idea fue llevada a la práctica por C. Kramer en 1904 con el sistema que lleva el nombre de este último y que es una especie de control Ward-Leonard en c.a.; A. Scherbius, en 1907, dio a conocer un sistema de control de velocidad de motores de inducción a base de la conexión en cascada de varias máquinas. En 1911 apareció el motor trifásico con colector en derivación y regulación de velocidad, que fue inventado por H. K. Schräge y cuyo modelo original se conserva en la actualidad en la Universidad Técnica de Estocolmo. El motor Schräge marca el final de las innovaciones de las máquinas eléctricas de c.a. con regulación de velocidad por procedimientos eléctricos, muchas de las cuales están hoy obsoletas.

3.5. Máquinas especiales de c.c. y otros motores

Conforme se fue imponiendo el uso de la c.a. en la generación, transporte y distribución de la energía eléctrica, hubo que idear procedimientos para cambiar la c.a. a c.c. y viceversa. Al principio se recurrió a una idea simple: utilizar un grupo rotativo motor de c.a.-dinamo, o a la inversa: motor de c.c.-alternador, y de este modo con estas dos máquinas acopladas mecánicamente se lograba convertir la energía de c.a. de entrada en energía mecánica y posteriormente el generador convertía la energía mecánica en eléctrica de c.c. (en el otro caso la conversión es de c.c. a c.a.). Una mejora de esta disposición fue la invención de la **conmutatriz o convertidor síncrono** por el ingeniero americano B. Lamme, de la compañía Westinghouse, con la que se obtenía un mayor rendimiento y representa la unión de las dos máquinas anteriores en una sola. Las conmutatrices se emplearon durante muchos años en la alimentación eléctrica de los tranvías. La teoría general de la conmutatriz fue establecida en 1900 por el profesor Blondel.

Entre los años 1904 y 1940 aparecieron nuevas máquinas eléctricas de c.c. con doble número de escobillas que las dinamos convencionales, destacando en casi todas la importancia del campo transversal y que se utilizaban como amplificadores rotativos. El inicio de todas ellas es la **dinamo Rosenberg**, inventada por el austríaco Emanuel Rosenberg (cuya patente alemana lleva fecha 28 de marzo de 1904) y que se aplicó por primera vez como un procedimiento eficaz en la iluminación de trenes en el Ferrocarril Real Bávaro entre Munich y Landshut, el 26 de agosto de 1904, y que más tarde se utilizaría en máquinas de soldadura. En 1928 Rosenberg publicó un pequeño libro: **Die Gleichstrom-Querfeldmaschine** (*La dinamo de c.c. de campo transversal*), en el que resume todas sus publicaciones sobre esta máquina aparecidas en revistas desde su invención en 1904. Más tarde, en 1930, el italiano Giuseppe Massimo Pestarini desarrolla una teoría general de las máquinas de campo transversal (**metadinas**), siendo la dinamo Rosenberg un caso especial de su teoría. En 1939 E. F. W. Alexanderson, de la compañía General Electric, desarrolla la **amplidina**, que es una variedad de la dinamo Rosenberg y que se anuncia como «*el cortocircuito que mueve montañas*»,

destacando con ello la conexión en cortocircuito entre los dos juegos de escobillas situados en el eje transversal y el gran poder amplificador que tenían estas máquinas; en 1947 la compañía Westinghouse inventa el **rototrol** y en 1950 la empresa escocesa J. C. MacFarlane inventa el **magnicón**. Todas estas máquinas han caído ya en desuso, merced a la introducción de la electrónica de potencia en el control de las máquinas eléctricas.

Existen otros tipos de máquinas eléctricas de pequeña potencia que se utilizan, por ejemplo, en control automático: servomotores de c.a. y c.c., selsyns o sincros, los motores de reluctancia variable y los motores paso a paso (*stepper motors*) que se emplean en las máquinas herramientas con control numérico, en robótica o simplemente en las impresoras de los ordenadores.

4. TRANSFORMADORES

La invención de los transformadores se puede considerar que se produce en las cuatro etapas siguientes:

1. Desarrollo de aparatos de inducción.
2. Primeras etapas de aplicación del transformador en alumbrado.
3. Transporte a pequeña distancia por medio de transformadores conectados en serie.
4. Transformadores a tensión constante.

La primera bobina de inducción fue empleada por Faraday en sus famosos experimentos de 1831, y estaba constituida por un anillo de hierro macizo sobre el que estaban dispuestos dos devanados situados en arcos opuestos del anillo. Masson y Breguet hicieron ligeras modificaciones a la bobina de Faraday y sustituyeron el anillo macizo por un haz de hilos de hierro (1842). Pohl, Wright, Callan, Henley y Dove estudiaron los diferentes tipos de hierro para construir el núcleo magnético. Stohrer, en 1839, construyó una bobina de inducción vertical; Ritchie, en 1857, sugirió la idea de subdividir el devanado secundario cuando se necesitaba un buen aislamiento. Ruhmkorff, en 1855, dio a la bobina sus proporciones y dimensiones clásicas.

En 1856 C. F. Varley inventó una bobina de inducción con núcleo laminado y cerrado para reducir las pérdidas por corrientes de Foucault y mejorar el rendimiento magnético (*patente inglesa n.º 3.059/1856*). Jablochkoff obtuvo una patente en 1877 (*n.º 1.996/1877*) en la que utilizaba bobinas de inducción para la distribución de corrientes en la iluminación eléctrica por arco y en la que por primera vez se alimentaban estas bobinas con c.a. El sistema consistía en intercalar en serie con el circuito principal los arrollamientos primarios de un cierto número de bobinas de inducción; el secundario de cada una de estas bobinas alimentaba una lámpara de arco o varias de ellas conectadas en serie.

El 13 de septiembre de 1882, Lucien Gaulard y John-Dixon Gibbs patentaron en Londres un sistema para resolver los problemas de distribución por corrientes alternas; como en el caso de Jablochkoff, los primarios de las bobinas de inducción se conectaban en serie y los secundarios alimentaban cada uno de ellos un cierto número de lámparas incandescentes conectadas en paralelo (*hay que destacar que la lámpara incandescente fue inventada por Edison en 1878*). La regulación de la tensión secundaria que se requería para el encendido o apagado de las lámparas (como consecuencia de la conexión serie de los devanados primarios, ya que representa un funcionamiento a corriente constante) se lograba introduciendo más o menos los núcleos de hierro de las bobinas de inducción; en definitiva, para pequeñas potencias se aumentaba artificialmente la corriente magnetizante para mantener la inducción

en su valor normal o nominal. Naturalmente, esta maniobra no era automática, lo que causaba unas variaciones considerables en la intensidad luminosa de las lámparas. Con este procedimiento se alumbraron cuatro estaciones del Metro de Londres; la red primaria tenía 23 km y se alimentaba por una tensión de 1.500 V, de tal modo que el primario de cada bobina de inducción absorbía 300 V. La relación de transformación era 3:1, y como la corriente primaria era de 10 A, se conseguía una potencia total de 15 kVA.

En 1884 obtuvieron una segunda patente de lo que ellos denominaron **generador secundario**, que consistía en un circuito magnético abierto que incorporaba dos devanados, uno que se conectaba en serie con la red y el otro que alimentaba la carga. Este generador secundario fue presentado a la Sociedad Internacional de Electricistas en febrero de 1884 y ganó un premio de 10.000 francos en la Exposición de Turín como **procedimiento práctico para transportar la energía eléctrica como fuerza y como luz**. Se hicieron experimentos de transporte entre Turín y Lanzio; la red primaria era de 40 km, con una potencia de 20 kW y una tensión de 2.000 V. Había tres «estaciones secundarias» conectadas en serie; para regular la tensión, en lugar de mover el núcleo de hierro, lo que se hacía era variar la posición de un cilindro de cobre alrededor del núcleo. Los resultados de esta experiencia fueron comunicados por el profesor Tresca a la Academia de Ciencias italiana. Afortunadamente, en la Exposición de Turín se encontraban tres ingenieros de la Fábrica Ganz de Budapest, a saber: Max Deri, Otto Bláthy y Karl Zipernowsky, que se dieron cuenta de los defectos constructivos del sistema de Gaulard y Gibbs: circuito magnético abierto y conexión serie del primario. Es interesante reseñar que cuando Bláthy preguntó a Gaulard por qué no utilizaba un núcleo magnético cerrado, él contestó que esto sería peligroso y antieconómico.

Cuando los tres ingenieros volvieron a Budapest comenzaron a realizar experiencias, a partir de las cuales registraron diversas patentes en Austria. El 16 de septiembre de 1884 se fabricó en la Casa Ganz el primer «generador secundario», al que bautizaron con el nombre de **transformador**. Era de tipo acorazado monofásico, con una potencia nominal de 1.400 VA, 40 Hz, 120/72 V, 11,6/19,4 A y relación de espiras 1,67/1; el **circuito magnético estaba cerrado y el primario se conectaba en paralelo**, lo que representaba una modificación sustancial respecto a los generadores secundarios de Gaulard y Gibbs. En mayo de 1885, con motivo de la Exposición Nacional húngara, se mostraron al público diversos tipos de transformadores, en julio lo harían en Londres y más tarde en Amberes. En julio de 1885 el profesor Ferraris reconoció en una conferencia dictada en la Academia de Ciencias de Turín la ventaja de los transformadores Zipernowsky frente a los de Gaulard. Ferranti, en Inglaterra, siguió un modelo análogo al de Gaulard y Gibbs pero utilizó un núcleo con bandas de hierro que empleó en la central de la Grossvernor-Gallery de Londres. Esta central estaba formada por dos generadores de c.a. de 400 kW que funcionaban a 2.400 V; cada abonado poseía un transformador que daba una tensión secundaria de 100 V; las canalizaciones de alta tensión eran subterráneas. Finalmente Mordey, en 1891, realizó un diseño que es básicamente el que se sigue actualmente, con un núcleo de chapas magnéticas de hierro.

En Estados Unidos la compañia Westinghouse había comprado en 1885 los derechos de las patentes de Gaulard y Gibbs y más tarde las de Deri, Bláthy y Zipernowsky. Gracias a los esfuerzos de William Stanley, en el año 1886, se diseñó un transformador del tipo acorazado y se desarrolló un sistema de distribución de corriente alterna a potencial constante. Westinghouse y Stanley demostraron asimismo la aplicabilidad de su sistema en Great Barrington, Massachusetts, realizando una línea de transporte de 1.200 metros en la que se incorporaban dos transformadores, uno a principio de línea y otro al final; la tensión de transporte era de 3.000 V, que se reducía al final a un valor de 500 V, y de este modo se demostró la ventaja de la distribución en alta tensión mediante transformadores situados a ambos lados de la red

de transporte. En los Estados Unidos se crearon fuertes disputas entre el sistema de distribución de c.a. de Westinghouse y el sistema de c.c. Edison. La compañía Westinghouse inició rápidamente la construcción de transformadores que se vendían en cinco modelos distintos, capaces de alimentar 5, 10, 20, 30 y 40 lámparas. Cuando en una instalación se iban a emplear más de 40 lámparas, era necesario utilizar varios transformadores con sus secundarios separados. La relación de transformación era siempre de 1.000/50 V. Los ensayos efectuados por el profesor Forbes en un modelo capaz de alimentar 30 lámparas (aproximadamente 1,5 kW) daban como resultado un rendimiento cercano al 95 por 100.

Los estudios teóricos sobre transformadores se iniciaron en 1882, a partir del sistema Gaulard y Gibbs. Ya en esa época se conocían los trabajos de Hopkinson sobre el cálculo de los circuitos magnéticos en c.c.; se ignoraba, sin embargo, que los aparatos alimentados por c.a. daban lugar a un flujo magnético (número de líneas de fuerza en aquella época) que era independiente de la reluctancia magnética y que sólo dependía del valor de la tensión, frecuencia y número de espiras del primario. Los trabajos de Gisbert Kapp, en abril de 1887, sentarían las bases científicas en el diseño de máquinas alimentadas con c.a.; este profesor introdujo el diagrama «vectorial» clásico empleado en el estudio de los transformadores y determinó la expresión que relacionaba la tensión con el flujo. Estableció una tabla que mostraba la dependencia de las pérdidas en vacío con la inducción. No advirtió, sin embargo, la dispersión magnética y la caída de tensión inductiva que se producía en estas máquinas.

5. DESARROLLOS TECNOLÓGICOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Los desarrollos de las máquinas eléctricas en el siglo XX se refieren a la mejora en los materiales constructivos, fundamentalmente las chapas magnéticas y los aislamientos. Las primeras máquinas eléctricas se construían con hierro macizo y más tarde se emplearon chapas de hierro sueco de alta calidad. En 1900, Hadfield y su equipo de la Universidad de Dublín publican un trabajo sobre la tecnología de las chapas magnéticas laminadas en caliente, en el que demuestran que al añadir una pequeña cantidad de silicio al hierro se consigue reducir las pérdidas un 75 por 100. Este tipo de chapa representó un enorme avance en la construcción de las máquinas durante más de treinta años, lográndose aumentar ostensiblemente el rendimiento de las mismas. Al desarrollarse la teoría de los dominios magnéticos que explicaba el ferromagnetismo, N. P. Goss, en 1934, descubre la técnica del laminado en frío, que es esencialmente la base del proceso de fabricación de las chapas de grano orientado que se emplean en la actualidad. Las investigaciones modernas más avanzadas intentan sustituir las chapas magnéticas por aleaciones amorfas (78 por 100 de hierro, 13 por 100 de boro y 9 por 100 de silicio), que tienen una resistividad muy elevada y una excelente resistencia mecánica.

En lo que se refiere a los aislamientos, éstos también han sufrido grandes cambios; desde el hilo de cobre recubierto de algodón, pasando por los barnices, hasta las modernas resinas sintéticas, que soportan mayores tensiones dieléctricas. Otros avances se refieren a la refrigeración, que inicialmente era por aire y que aún se usan en máquinas de potencia media y pequeña, pasando por la refrigeración con hidrógeno que utilizan los grandes turboalternadores (y que se introdujo en la década de 1930) hasta los prototipos de máquinas eléctricas superconductoras que se llevan realizando desde la década de 1960, que utilizan hilos de niobio-titanio en una atmósfera de helio líquido a una temperatura de 4,2 K, y con los que se ha conseguido obtener densidades de corriente de 30 A/mm^2, frente a los 2 a 3 A/mm^2 de los

diseños clásicos, lo que se traduce en una mejora de los rendimientos de las máquinas y menores tamaños físicos de las mismas.

6. LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS Y LA ELECTRÓNICA DE POTENCIA

6.1. Desarrollo de componentes electrónicos

La electrónica de potencia, que trata sobre la conversión y el control de la energía eléctrica, ha permitido lograr grandes avances en la regulación de las máquinas eléctricas, tanto en lo que se refiere a generadores como a motores. Se puede decir que la electrónica de potencia comienza en 1903 cuando Cooper-Hewitt, trabajando con lámparas de vapor de mercurio, descubre el efecto rectificador de las mismas, y que se utilizarán para transformar la c.a. en c.c.; más tarde, en 1908, el alemán Schäefer construye **rectificadores de vapor de mercurio** con envoltura metálica, que permitirá rectificar potencias más elevadas. Aunque durante los dos decenios siguientes se desarrollaron diferentes tipos de rectificadores metálicos y mecánicos (en 1923 Presser inventa el rectificador de selenio y en 1925 Grondahl descubre el rectificador de óxido de cobre), solamente se utilizaban éstos en pequeñas potencias y no podían por ello competir con los rectificadores de vapor de mercurio en la conversión de grandes potencias. La rectificación o conversión de la c.a. a c.c. era y es necesaria para aquellas aplicaciones en las que el proceso productivo requiere c.c.; tal es el caso, como ya se ha indicado antes, en los procesos electroquímicos y en la tracción eléctrica fundamentalmente.

En 1928 A. W. Hull, de la compañía General Electric, inventa el **tiratrón y el rectificador de vapor de mercurio controlado (ignitrón)**, que permitía regular la c.c. que producía el rectificador, haciendo posible la sustitución de los grupos Ward-Leonard rotativos por convertidores estáticos. En la década de 1930-1940 se establecieron claramente los principios de funcionamiento de los **inversores** (convertidores estáticos c.c.-c.a.) por Prince, Fitzgerald, Henderson y Sabbah y los **cicloconvertidores** (convertidores de c.a. a c.a. de diferente frecuencia sin efectuar el paso intermedio de la c.c.) por el ruso Rissik y que se utilizaron en algunos ferrocarriles europeos en tracción eléctrica monofásica con motores de c.a. de colector a una frecuencia de $16\,^2\!/_3$ Hz.

El 23 de diciembre de 1947 los científicos John Bardeen y Walter H. Brattain, de los Laboratorios de la Bell Telephone de Estados Unidos, descubren el **transistor de unión**, cuya teoría de funcionamiento es desarrollada por William Shockley, asentando la base de la electrónica de semiconductores que se irá desarrollando más adelante. En la década de 1950 se empezaron a construir rectificadores de estado sólido a base de silicio, que fueron sustituyendo progresivamente a los rectificadores de vapor de mercurio para potencias pequeñas y medias.

La verdadera revolución en la electrónica de potencia comienza con el descubrimiento en 1956 del **tiristor** o **SCR (semiconductor controlled rectifier)** por J. L. Moll, de los Laboratorios Bell, y que comercializa la compañía General Electric a comienzos de 1958. A partir del tiristor, que permite la rectificación controlada en forma de regulador de fase, se desarrollan otros dispositivos tales como el **triac** (*bidirectional triode thyristor*), el **LASCR** o SCR activado por luz (*light activated silicon controlled rectifier*), el **diac** (*bidirectional diode thyristor*), y otros como el **transistor uniunión UJT** (*unijunction transistor*), el **PUT** (*programmable unijunction transistor*), etc. A partir de 1960 las potencias de estos dispositivos

controlados de silicio van aumentando, por lo que poco a poco se van imponiendo en la regulación de todo tipo de máquinas eléctricas.

Los componentes modernos más importantes que se utilizan en la regulación de máquinas eléctricas son: los **GTO** (*gate turn-off thyristor, es decir, tiristores de apagado por puerta),* los **IGBT** (*insulated gate bipolar transistor, o transistor bipolar de puerta aislada*), que son transistores que combinan las ventajas de los tipo bipolar, y los de tecnología MOSFET (*metal-óxido semicondutor y de efecto de campo*). En 1988 la General Electric anunció un dispositivo denominado **MCT** (*MOS controlled thyristor o tiristor controlado MOS*), al que los técnicos auguran un gran futuro en las aplicaciones para el control de velocidad de máquinas eléctricas.

Aparte de los desarrollos de componentes electrónicos de alta potencia indicados en los párrafos anteriores, conviene destacar otros dispositivos y técnicas electrónicas que intervienen en los lazos de regulación de máquinas y cuya génesis descansa en el descubrimiento del circuito integrado. Debe destacarse que la patente del **primer circuito integrado** la registró Jack Kilby, de la empresa Texas Instruments, en febrero de 1958 (*su circuito integrado era de hecho dos circuitos construidos en una pieza de germanio*). En octubre de 1958 la compañía mencionada construyó un circuito integrado en el cual, por diversos procesos de difusión, se lograba obtener diversos componentes activos: diodos rectificadores y transistores y también elementos pasivos como resistencias y condensadores; el problema de este primer circuito integrado era que los diversos componentes del mismo tenían que interconectarse exacta y laboriosamente a mano. Poco después, Robert Noyce, de la Fairchild, fabricó en 1960 un circuito integrado completo que incluía las interconexiones sobre la misma pastilla utilizando un proceso denominado tecnología planar. Esta tendencia a la miniaturización se fue acelerando en los años siguientes, dando lugar a la creación de nuevos microcircuitos y a una nueva rama técnica conocida hoy día como microelectrónica (desde 1960, el número de componentes que se podían integrar en los chips individuales se ha duplicado aproximadamente cada año, para aumentar desde las cifras bajas de 1960 a casi 100.000 en 1980; esta duplicación anual se ha denominado ley de Moore).

En 1969 se dirigió a la empresa americana Intel una firma japonesa de calculadoras, la Busicom, con la intención de que la Intel le fabricara una gama de chips de calculadora. La Busicom aportó un diseño de contorno y una colaboración de diseño. La Intel, y más exactamente Ted Hoff, utilizando su preparación en diseño de circuitos LSI (*Large Integration Scale o integración a gran escala*), estudió el diseño del chip y pensó que se podía construir uno mejor. Hoff pronto se convenció de que un chip programable único podría ejecutar todas y aún más funciones que las que la Busicom exigía a sus varios modelos de calculadora. Después de nueve meses de trabajo, el 15 de noviembre de 1971 la Intel construye el primer **microprocesador** del mundo (el 4004), que se llamó entonces «ordenador microprogramable en un chip» y que más tarde, en 1972, se le dará el nombre definitivo de microprocesador.

El 4004 era capaz de procesar «palabras» de 4 bits de longitud (4 dígitos binarios) y contenía, en el lenguaje peculiar de los ordenadores, una completa CPU integrada (*Central Processing Unit, o unidad central de procesado de la información*) con un sumador paralelo de 4 bits, 16 registros, un acumulador y un registro de estado, todo en un chip. Esta CPU 4004 se unió con chips de memorias, ROM (Read Only Memory, es decir, *memorias de sólo lectura*), RAM (Random Access Memory, es decir, *memorias de acceso aleatorio,* o de otro modo: *memorias de lectura y escritura, ya que la información puede escribirse y borrarse a voluntad*) y de registros de desplazamiento para constituir el sistema microordenador MCS-4.

El microprocesador provoca una revolución en la industria de la electrónica y los ordenadores. El microprocesador es más que un simple componente, y su potencia de cálculo, pe-

queño tamaño y bajo coste ha cambiado completamente el concepto de diseño de todo tipo de máquinas utilizadas en el trabajo y en el juego, en el hogar y en la oficina, en la fábrica y en el laboratorio. En particular, el microprocesador (μP) ha cambiado la filosofía del diseño electrónico: en vez de crear un circuito muy elaborado de componentes para resolver un problema de tratamiento o procesado de datos, se ha tomado un cerebro producido en grandes series, barato y con una memoria flexible y al cual se le dan instrucciones de cómo resolver un determinado problema, lo que va a permitir abordar con este componente nuevos métodos de control de máquinas que antes eran imposibles de configurar, y de ahí que en la actualidad y en un futuro cercano se unan cada vez más las técnicas de la electrotecnia y la electrónica en un objetivo común, cual es la regulación y el control de las máquinas eléctricas.

La electrónica de potencia requiere una formación multidisciplinar en áreas tan diversas como dispositivos semiconductores, circuitos convertidores, máquinas eléctricas, electrónica analógica y digital, teoría del control, diseño asistido por ordenador y microprocesadores. Cada una de estas disciplinas se está modificando con gran velocidad, y es por ello que un experto en máquinas eléctricas necesita cada vez una formación más amplia si no quiere que sus conocimientos queden obsoletos en un plazo breve, e indudablemente esto es un reto para las nuevas generaciones, que deberán estar mejor preparadas y con una formación más generalista para adaptarse mejor a los fuertes cambios tecnológicos que les esperan en su vida profesional.

6.2. Control electrónico de máquinas eléctricas

Inicialmente, y hasta hace pocos años, los sistemas de mando de máquinas eléctricas se realizaban con automatismos a base de relés y contactores. Con la llegada del microprocesador el control industrial está cambiando a gran velocidad y se están sustituyendo los relés por **autómatas programables** (*programmable controllers* o controladores programables). El programa de los automatismos con relés se realizaba con un cableado que unía las conexiones de las bobinas con los contactos de trabajo y reposo de los relés. Los autómatas programables hacen posible la sustitución de este cableado por un teclado que permite una programación muy simple por parte del usuario y que se une a transductores y motores por medio de interfaces adecuados. Este cambio de tecnología hace posible una modificación rápida del funcionamiento de un circuito, utilizando una secuencia de instrucciones (programa o software). Los autómatas programables permiten el control de las máquinas eléctricas (por ejemplo, maniobras de arranque y parada), pero no su regulación (es decir, no permiten un control y una regulación precisa de la velocidad en el caso de motores, o una regulación de tensión en generadores). Para realizar estas operaciones se deben utilizar los componentes electrónicos tipo: tiristores, GTO, triac, IGBT, MCT, etc.

6.2.1. Regulación de velocidad de motores de c.c.

Tradicionalmente el motor de c.c. ha sido el motor por excelencia para accionamientos que requerían y requieren una velocidad regulable. Inicialmente, y como ya se ha mencionado anteriormente, la regulación se conseguía con ayuda de reostatos y combinadores (controllers) que modificaban la resistencia de excitación (control del flujo) y del inducido. Un paso adelante representó la regulación Ward-Leonard, en la que el flujo del campo se mantenía constante (excitación independiente) y se aplicaba una tensión continua variable al inducido por medio de una combinación: motor de c.a.-dinamo. Con la llegada de los tiratrones e ignitrones en la década de 1930, en las máquinas pequeñas se sustituyeron los grupos Ward-

Leonard rotativos por sistemas estáticos que regulaban la tensión continua que se aplicaba a los inducidos de los motores.

Al llegar el tiristor y conseguir un aumento en sus prestaciones (soportar mayores tensiones y corrientes) se ha conseguido realizar regulaciones de velocidad de motores de c.c. que llegan a potencias de hasta 10.000 kW. Fundamentalmente, el control de velocidad se realiza en la parte de potencia, por medio de **convertidores a tiristores controlados por fase** (cuando la alimentación procede de c.a.) y también por medio de **troceadores** o **«choppers»** (cuando la alimentación procede de c.c.). La regulación puede realizarse a par constante o a potencia constante y se emplea, en el caso de que se utilice el control de fase, convertidores de cuatro cuadrantes o duales (formados por dos puentes trifásicos completos que transforman la tensión trifásica de entrada en una tensión continua variable en magnitud y signo), que permiten la operación en sentido directo e inverso, aumentando la capacidad de frenado por recuperación de energía, lo que es importante en aplicaciones como trenes de laminación en acerías y papeleras y también en tracción eléctrica. En casos más simples, donde no se requiere inversión de velocidad, se emplean convertidores de uno o dos cuadrantes, y tales son las aplicaciones de regulación de velocidad de ventiladores, bombas centrífugas, cintas transportadoras, máquinas herramientas, etc.

Cuando se emplean troceadores, que son convertidores c.c. a c.c., la tensión constante de alimentación se conmuta rápidamente por medio de tiristores, consiguiendo una señal de salida que se compone de trozos de la señal de entrada, lo que da lugar a una regulación del valor medio de la tensión de alimentación al motor. Cuando los tiempos de conducción y no conducción son variables, pero manteniendo constante el período total conducción-no condución, se dice que la regulación se realiza por modulación de la anchura de impulsos (PWM: *Pulse Width Modulation*). Cuando el tiempo de conducción es constante y el de no conducción es variable, se dice que la regulación se efectúa por modulación de la frecuencia. Este tipo de control de velocidad de motores de c.c. se realiza en los ferrocarriles metropolitanos, coches eléctricos, trolebuses, carretillas elevadoras alimentadas por acumuladores, etc. Con este sistema de regulación se ha logrado controlar máquinas de hasta 2.500 kW.

El control de los impulsos de disparo de los tiristores es muy diverso; desde los casos más simples, que han utilizado UJT, hasta el control digital moderno por microprocesador, pasando por osciladores tipo PLL (*phase-locked loop*, es decir, con *lazo de amarre de fase*). La ventaja de la regulación de velocidad en los motores de c.c. procede de que las fuerzas magnetomotrices del inductor y del inducido están a 90° (en la terminología habitual de estas máquinas se denomina al eje de los polos eje directo d, mientras que al eje de escobillas que se sitúa en la línea neutra a 90° eléctricos del anterior se le denomina eje en cuadratura q), es decir, están prácticamente desacopladas y no interaccionan entre sí, lo que permite un control independiente de ambas variables. Como quiera que el par de un motor de c.c. es proporcional al producto del flujo inductor por la corriente del inducido, al mantener el flujo inductor constante y modificar la corriente del inducido no se tendrán cambios en el campo y las variaciones en el par serán copia exacta de los cambios en la corriente del inducido. La desventaja de estos motores es que son más caros que los de c.a. y menos robustos que éstos en virtud de la existencia del colector de delgas, lo que se traduce en un mayor coste de mantenimiento.

6.2.2. Regulación de velocidad de los motores de c.a.

Como se acaba de señalar, el motor de c.a. de inducción o asíncrono es más barato en su construcción que el motor de c.c. y no requiere apenas mantenimiento. Es por ello que los ingenieros han intentado, a lo largo de la historia, buscar procedimientos de regulación de

velocidad fiables y seguros para este tipo de motores. Los convertidores más empleados son: *a*) los **grupos rectificador-inversor**, que transforman primeramente la c.a. de la red en c.c. (módulo rectificador) y que luego cambian la c.c. en una c.a. de amplitud y frecuencia variables (módulo inversor); *b*) los **grupos cicloconvertidores**, que son cambiadores directos de frecuencia y que transforman una potencia de c.a. en otra de frecuencia diferente, sin el paso intermedio por c.c. El motor de inducción, al funcionar con c.a., presenta unas f.m.m.s. de estátor y rotor muy acopladas, lo que ha hecho muy difícil la regulación de su velocidad hasta épocas muy recientes. La forma de regular la velocidad consistió inicialmente (en los motores en jaula de ardilla) en variar la tensión de alimentación al estátor mediante triacs; este método se caracterizaba por una pobre respuesta tanto estática como dinámica, y se empleaba en el accionamiento de ventiladores y bombas centrífugas que ofrecen un pequeño par resistente en el arranque. Un método mejor era regular la frecuencia de alimentación, ya que la velocidad de giro es cercana a la de sincronismo, pero tampoco se lograba una respuesta satisfactoria y los equipos eran caros. El mejor método era regular el flujo de la máquina, lo que se conseguía con un control simultáneo de la tensión y la frecuencia de alimentación, era la regulación del cociente tensión/frecuencia, que requería el uso de sistemas de encendido de los tiristores bastante complicado.

La técnica más avanzada en la aplicación de la electrónica de potencia a los motores de inducción la constituye el **control vectorial**. Este sistema, introducido a comienzos de la década de 1970 por F. Blaschke, ingeniero de la Casa Siemens, fue desarrollado en sus bases teóricas por el profesor alemán Leonhard e «implementado» más tarde con microprocesadores. La idea se basa en el funcionamiento de una máquina de c.c.; en el motor de inducción (de jaula de ardilla), a diferencia con el motor de c.c., solamente existe un devanado accesible: el del estátor, y tanto el campo magnético como la f.m.m. del entrehierro son móviles y no permanecen fijas en el espacio sino que giran a la velocidad de sincronismo; para complicar más el asunto, el ángulo espacial entre el campo y la f.m.m. no es necesariamente 90° eléctricos como en los motores de c.c.; por analogía con estas máquinas, se puede descomponer la corriente del estátor I_s en dos componentes: una paralela al eje del campo I_d (eje *d*) y la otra perpendicular al mismo I_q (eje *q*). La componente en el eje *d* es responsable de la generación de flujo, mientras que la componente en el eje *q* es la que produce la f.m.m. y, por tanto, el par. La componente I_d es equivalente a la corriente de excitación de los polos en los motores de c.c., mientras que la componente I_q es equivalente a la corriente del inducido. Desgraciadamente, las componentes anteriores no se encuentran en los terminales del motor de inducción; sin embargo, la corriente del estátor I_s se puede descomponer en dos componentes I_a e I_b respecto a las coordenadas móviles del flujo giratorio del estátor (que forma un ángulo δ con el del campo resultante en el entrehierro). En definitiva, es posible calcular I_d e I_q si se conocen I_a, I_b y el ángulo δ, y este cálculo debe hacerse constantemente en tiempo real, por lo que es necesario el uso de un microprocesador (y de ahí el retraso en aparecer este sistema de control en la ingeniería). Se requiere por ello un bloque funcional que al tomar como parámetros de entrada las corrientes I_a e I_b nos dé lugar a las salidas I_d e I_q (campo magnético y par). Este bloque funcional representará la transformación de las coordenadas del estátor a las coordenadas del campo orientado que tiene lugar en el interior de la máquina. Cualquier cambio en las componentes I_a e I_b dará lugar a un cambio en las salidas I_d e I_q, determinadas por la realimentación del ángulo δ que se incluyen en el lazo de control mediante otro bloque funcional, que se obtiene mediante un codificador o detector de posición situado en el eje de la máquina. Para conseguir el control vectorial se necesita también compensar la transformación anterior en el interior de la máquina. Esta descripción simplificada del control vectorial dará una idea al lector de la complejidad cada vez mayor que toman los

accionamientos de las máquinas eléctricas, haciendo bien patentes las tecnologías interdisciplinares que se incluyen en ella. En la actualidad se graban programas en memorias tipo PROM (*Programmable read only memory* o memorias programables de sólo lectura) o EPROM (*Erasable programmable read only memory*, es decir, memorias de sólo lectura grabadas por el usuario y que pueden borrarse), que incluyen no solamente la definición de las ecuaciones de los bloques funcionales, sino que permiten realizar los arranques de un motor asíncrono controlando la rampa de aceleración y la corriente de arranque. Conforme se reduzcan los precios de estos componentes, irán desapareciendo los arranques tradicionales de los motores asíncronos: estrella-triángulo, resistencias en el rotor, etc., porque ya no tendrán ningún sentido práctico.

El futuro en la técnica de los accionamientos eléctricos se dirigirá a obtener circuitos integrados que incorporen tanto componentes de potencia como de electrónica de control y con funciones adicionales para la vigilancia de la temperatura de los devanados del motor y con protecciones contra sobretensiones y sobrecorrientes. Los microprocesadores incluirán estimaciones de los parámetros de los motores en tiempo real para adaptarse mejor a las condiciones reales de funcionamiento; también se aplicarán las técnicas de la inteligencia artificial y los sistemas expertos para la vigilancia de la dinámica de las máquinas, con el consiguiente autoajuste de los parámetros de control, permitiendo asimismo la diagnosis y la corrección de faltas. En el caso de equipos inversores y cicloconvertidores, para la regulación de motores de c.a., se seguirán utilizando sistemas PWM, es decir, con modulación de la anchura de impulsos, pero más sofisticados que los actuales, donde se consiga una mejor forma de la onda de tensión de alimentación a los motores, reduciéndose de este modo el número de armónicos y evitar así la «contaminación» que actualmente introducen estos equipos en la red.

Referencias

ALGER, Philip, L.: *Induction machines.* Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1970.

ALGER, P. L.; ARNOLD, R. E.: *The history of induction motors in America.* Proceedings of the IEEE, Vol. 64, n.º. 9, September 1976.

BERGMAN, S. R.: *A new type of single-phase motor.* AIEE Transac., Vol. 43, 1924, págs. 1.039-1.043.

BOSE, B. K.: *Power Electronics-An Emerging Technology.* IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 36, n.º 3, págs. 403-412, August 1989.

BOWERS, B.: *A History of Electric Light and Power.* Institution of Electrical Engineers, London, 1982.

BRAUN, E.; MACDONALD, S.: *Revolución en miniatura. La historia y el impacto de la electrónica del semiconductor.* Fundesco-Ed. Tecnos, Madrid, 1984.

BUSSON, André: *Une innovation dont la portée fut considérable: l'avènement du courant alternatif.* Revue Générale d'électricité, Septembre 1985.

DUNSHEATH, Percy: *A History of Electrical Engineering.* Faber Editions, London, 1962.

ENCYCLOPAEDIA BRITANNICA (Macropaedia): Vol. 6, 15.ª ed., 1982. Helen Hemingway Benton Pub., Chicago.

FLEMING, J. A.: *The alternate current transformer.* The Electrician, London, 1900.

GANZ: *L'Histoire de Quarante Ans du Transformateur. 1885-1925.* Budapest, 1925, págs. 3-41.

GARCÍA DE LA INFANTA, J. M.: *Primeros pasos de la luz eléctrica en Madrid,* 3.ª edición. Unión Fenosa, *150 años de luz,* Madrid, 2002.

GENERAL ELECTRIC: *SCR Manual.* Sixth Edition, Semiconductor Products Department. West Genesee Street Auburn NY, General Electric Co., 1979.

HALACSY, A. A.; FUCHS, G. H.: *Transformer invented 75 years ago.* Electrical Engineering, June 1961, págs. 404-407.

HOBART, H. M.: *Electric Motors. Their Theory and Construction.* Third Edition, Vol. II, Polyphase Current. Pitman Ltd., London, 1923.

HOPKINSON, John: *Dynamo Electric Machines.* Proc. Royal Society, Vol. 40, pág. 326, 1886.

JONES, B. L.; BROWN, J. E.: *Electrical variable-speed drives.* IEE Proceedings, Vol. 131, Pt. A, n.º 7, September 1984, págs. 516-558.

KOSTENKO, M. P.; PIOTROVSKI, L. M.: *Máquinas eléctricas.* Ed. Mir, Moscú, 1975.

KRAMER, C.: *Speed Regulation of Asynchronous Motors.* ETZ 1908, Vol. 29, págs. 734-737.

LAMME, B. G.: *The Story of the induction motor.* AIEE Journal, Vol. 40, 1921, págs. 203-223.

LEONHARD, W.: *Control of Electric Drives.* Springer-Verlag, New York, 1984.

MOSES, A. J.: *Electrical steels: past, present and future developments.* IEE Proceedings, Vol. 137, Pt. A, n.º 5, September 1990.

OSNOS, M.: *Induction Motor Speed Regulation.* ETZ, 1902, Vol. 23, págs. 1.075-1.080.

PEARMAN, R.: *Solid State Industrial Electronics.* Reston Publishing Co., Reston, Virginia, 1984.

PESTARINI, G. M.: *Metadyne Statics.* Chapman Hall, 1952.

RODET, J.: *Distribution de l'energie par courants polyphasés.* Gauthier-Villars, París, 1903.

ROSENBERG, E.: *The 50 Anniversary of the Cross-Field Dynamo.* Electrical Engineering, Vol. 73, n.º 3, March 1954, págs. 203-208.

ROSENBERGER, A.: *Vector Control-The Future for Drives.* Electrical Review, Vol. 221, n.º 22, págs. 26-27, November 1988.

ROTERS, H. C.: *The Hysteresis motor.* AIEE Transac., Vol. 66, 1947, págs. 1.419-1.430.

RYDER, J. D. & FINK, D. G.: *Engineers & Electrons.* IEEE Press, New York, 1984.

SCHERBIUS, A.: *New Machine for the Phase Compensation of Single or Polyphase Induction Motors.* ETZ 1912, Vol. 33, págs. 1.079-1.083.

SEN, P. C.: *Electric Motor Drives and Control-Past. Present and Future.* IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 37, n.º 6, págs. 562-575, December 1990.

STANLEY, W.: *Alternating Current Machinery-induction motor.* AIEE Transc., Vol. 24, 1905, págs. 851-872.

STEINMETZ, C. P.: *The Alternating Current Induction Motor.* AIEE Trans., Vol. 14, 1897, págs. 185-217.

TAYLOR, E. O.: *The performance and design of AC Conmutator motors.* Pitman, 1958.

TESLA, N.: *A new system of alternate current motors and transformers.* AIEE Transact., Vol. 5, págs. 308-324, May 1888.

THOMPSON, Silvanus: *Machines Dynamo-électriques.* Baudry & Cie. Editeurs, París, 1894.

THOMPSON, S.: *Polyphase electric currents and alternate-current motors.* E & F. N. Spon Ltd., London, 1900.

TUSTIN, A.: *D. C. Machines for Control Systems.* Spon, 1952.

VAN WYK, J. D.; SKUDELNY, Ch.; MULLER-HELLMANN, A.: *Power Electronics. Control of the Electromechanical Conversion Process and Some Applications.* IEE Proceedings, Vol. 133, Pt. B, n.º 6, November 1986.

WARD-LEONARD, H.: *Volts versus Ohms-The Speed Regulation of Electric Motors.* AIEE Transc., Vol. 13, 1896, págs. 375-384.

APÉNDICE 2

Repaso de series de Fourier

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo en serie de Fourier constituye un método extraordinariamente eficaz que se utiliza para descomponer una forma de **onda periódica** en una serie infinita de funciones sinusoidales. Estas series fueron utilizadas por primera vez por el gran matemático francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830) en la resolución de la ecuación de propagación del calor, que incluía en su libro *Théorie analityque de la chaleur* (Teoría analítica del calor) (1822).

Las series de Fourier tienen una gran aplicación en diversos campos de la técnica. En particular, en el caso de la ingeniería eléctrica se utiliza para analizar la respuesta de un circuito cuando es excitado por una señal periódica no senoidal. El procedimiento consiste en determinar la respuesta de la red a cada una de las frecuencias de las diversas ondas sinusoidales en las que se descompone la señal original. El principio de superposición permite más tarde sumar todas estas respuestas para obtener la solución del circuito a la entrada periódica.

En el caso de las máquinas eléctricas, las series de Fourier se utilizan para determinar las componentes armónicas de la forma del campo magnético existente en el entrehierro y también para analizar la respuesta de las máquinas cuando se alimentan con fuentes no senoidales, lo que sucede en la práctica cuando se emplean convertidores electrónicos para la regulación y control de motores eléctricos.

2. FUNCIÓN PERIÓDICA

Una función periódica $f(t)$ es aquella que se repite cada T segundos, es decir, se cumple la condición:

$$f(t) = f(t + T) \tag{1}$$

El **período** de la función $f(t)$ es T y un ciclo de $f(t)$ es la porción de la onda $f(t)$ correspondiente a un período. La frecuencia f de la función $f(t)$ es el número de ciclos por segundo y se mide en hertz (en castellano, herzios). En la Figura A2.1 se muestran diversas ondas periódicas en las que se señalan con trazo grueso los ciclos de repetición correspondientes.

Se denomina **pulsación fundamental** o frecuencia angular fundamental ω_0 a:

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ rad/s} \tag{2}$$

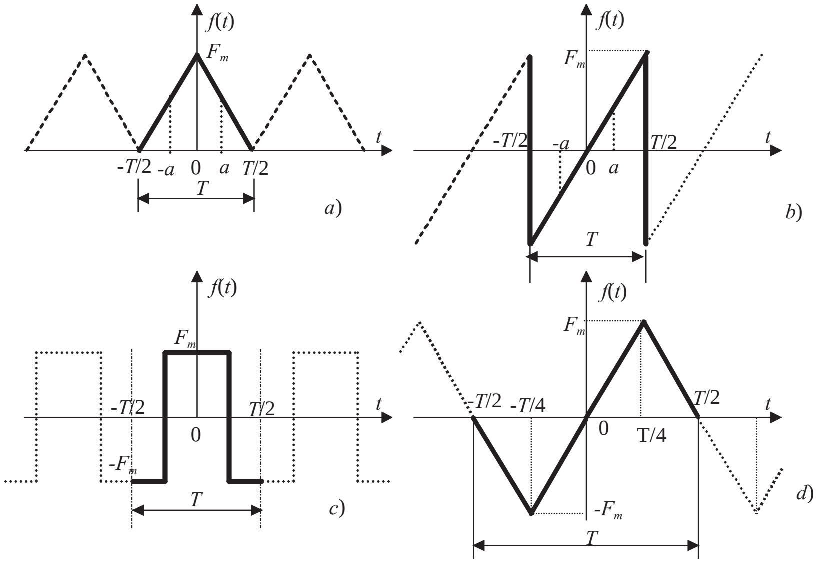


Figura A2-1. Ondas periódicas.

3. SERIES TRIGONOMÉTRICAS DE FOURIER

Fourier demostró que si se dispone de una función $f(t)$ periódica, se puede desarrollar en una serie infinita de funciones sinusoidales:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \cdots + a_n \cos n\omega_0 t + \cdots$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} \omega_0 t + \cdots + b_2 \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \cdots + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t + \cdots \quad (3)$$

o en forma más compacta:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad (4)$$

El primer término $a_0/2$ es una constante. Los términos seno y coseno de múltiplos enteros de ω_0 se denominan **armónicos**, siendo el factor $\boldsymbol{n}$ el orden del armónico. Los términos correspondientes a $n = 1$ se denominan de **primer armónico** o fundamental.

La resolución de la serie de Fourier requiere la determinación de los coeficientes a_n y b_n de las ecuaciones (3) o (4). Debe destacarse que las condiciones suficientes que debe cumplir $f(t)$ para que sea posible su representación o desarrollo en serie de Fourier son:

1. La función $f(t)$ debe ser continua en el período T, o a lo sumo debe ser finito el número de discontinuidades existentes en el intervalo correspondiente al período T.
2. La función $f(t)$ debe tener a lo sumo un número finito de máximos y mínimos en el período T.
3. La integral: $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)|\, dt$ debe ser finita. (5)

Las condiciones anteriores conocidas como **condiciones de Dirichlet** son solamente **suficientes**; en otras palabras si $f(t)$ las satisface, entonces admitirá un desarrollo en serie de Fourier. Sin embargo, estas condiciones no son necesarias: si $f(t)$ no las cumple, todavía puede existir un desarrollo en serie de Fourier.

4. ORTOGONALIDAD DEL SISTEMA TRIGONOMÉTRICO

Se dice que un conjunto de funciones $\Phi_k(t)$ es ortogonal en un intervalo $a \leq t \leq b$, si para dos funciones cualesquiera $\Phi_m(t)$ y $\Phi_n(t)$ pertenecientes a $\Phi_k(t)$ se cumple:

$$\int_a^b \Phi_m(t)\,\Phi_n(t)\,dt = \begin{Bmatrix} 0 \;\forall\; m \neq n \\ r_n \;\forall\; m = n \end{Bmatrix} \text{ donde } r_n \text{ representa un número real.} \tag{6}$$

Las funciones trigonométricas seno y coseno forman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $0 \leq t \leq T$. El lector puede comprobar mediante cálculos elementales que se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
&a)\quad \int_0^T \cos m\omega_0 t\,dt = 0;\; m\text{: entero}\\
&b)\quad \int_0^T \operatorname{sen} m\omega_0 t\,dt = 0;\; m\text{: entero}\\
&c)\quad \int_0^T \operatorname{sen} m\omega_0 t \cos n\omega_0 t\,dt = 0;\; m \text{ y } n\text{: enteros}\\
&d)\quad \int_0^T \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t\,dt = \begin{Bmatrix} 0 \;\forall\; m \neq n \\ T/2 \;\forall\; m = n \neq 0 \end{Bmatrix}\\
&e)\quad \int_0^T \operatorname{sen} m\omega_0 t \operatorname{sen} n\omega_0 t\,dt = \begin{Bmatrix} 0 \;\forall\; m \neq n \\ T/2 \;\forall\; m = n \neq 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

5. EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

Si se parte de la serie de Fourier (4) y se integran ambos miembros de la ecuación en un período de tiempo T resulta:

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T \frac{a_0}{2}\,dt + \int_0^T \left[\sum a_n \cos n\omega_0 t\right] dt + \int_0^T \left[\sum b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right] dt \tag{8}$$

y teniendo en cuenta las propiedades de ortogonalidad a) y b) de las ecuaciones (7) resulta:

$$\int_0^T f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\,T \tag{9}$$

de donde se desduce el término constante de la serie:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt \tag{10}$$

que representa en definitiva el valor medio de la función $f(t)$ y por ello se denomina **término de corriente continua**.

Para calcular los términos a_n del desarrollo de Fourier (4), multiplicaremos ambos miembros de esta ecuación por cos $n\omega_0 t$, y al integrar en el período T se obtiene:

$$\int_0^T f(t)\cos n\omega_0\, dt = \int_0^T \frac{a_0}{2}\cos n\omega_0 t\, dt + \int_0^T \left[\sum a_n \cos n\omega_0 t\right]\cos n\omega_0 t\, dt + \\ + \int_0^T \left[\sum b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t\right]\cos n\omega_0 t\, dt \qquad (11)$$

y teniendo en cuenta las propiedades a) y c) de las ecuaciones (7) resulta:

$$\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{T}{2}a_n \qquad (12)$$

que permite determinar el coeficiente a_n:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \qquad (13)$$

Obsérvese que la ecuación anterior es también válida para $n = 0$ y da lugar al resultado ya conocido y expresado en (10).

De un modo análogo se pueden obtener los coeficientes b_n del desarrollo en serie de Fourier, multiplicando ambos miembros de (4) por sen $n\omega_0 t$ e integrando en el período T, dando lugar a:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt \qquad (14)$$

El lector puede demostrar fácilmente que para calcular los coeficientes de Fourier, se pueden realizar las integrales anteriores (10), (13) y (14) en cualquier intervalo de tiempo, siempre que tenga la anchura T; es decir, se puede tomar como límite inferior un tiempo genérico t_0 y el superior debe ser $t_0 + T$, y de este modo las expresiones (13) y (14) se pueden escribir en general:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt \qquad (15)$$

6. SIMETRÍA DE LA FUNCIÓN $f(t)$

Cuando la función periódica $f(t)$ presenta ciertas simetrías, se puede simplificar enormemente el cálculo de los coeficientes de Fourier. Las simetrías más importantes a considerar son:

a) Función par

Se dice que $f(t)$ es una función par cuando se cumple la igualdad:

$$f(-t) = f(t) \qquad (16)$$

es decir, al sustituir t por $-t$ no cambia la función. Las Figuras A2.1a y 1c son un ejemplo de funciones pares. Obsérvese que una función par es simétrica respecto del eje vertical (eje de ordenadas).

b) Función impar

Se dice que $f(t)$ es una función impar cuando se cumple:

$$f(-t) = -f(t) \tag{17}$$

es decir, al sustituir t por $-t$ cambia únicamente el signo de la función. Las Figuras A2.1*b* y 1*d* son un ejemplo de funciones con simetría impar. Una función impar es antisimétrica respecto del eje vertical en el origen.

c) Simetría de media onda

Se dice que una función $f(t)$ tiene simetría de media onda cuando satisface la condición:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right) \tag{18}$$

Las Figuras A2.1*c* y 1*d* son un ejemplo de funciones con simetría de media onda. Se debe notar que la porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva, desplazada horizontalmente medio período.

7. COEFICIENTES DE FOURIER DE ONDAS SIMÉTRICAS

Las propiedades de simetría anteriores hacen más rápido el cálculo de los coeficientes de Fourier. Así, se demuestra fácilmente que si $f(t)$ es una función par, se cumple:

$$\int_{-a}^{+a} f(t)\, dt = 2\int_{0}^{+a} f(t)\, dt \tag{19}$$

lo que puede verse de un modo intuitivo en la Figura 1*a*, ya que el área que abraza la función entre $-a$ y 0 es la misma que entre 0 y a.

De un modo análogo, si $f(t)$ es un función impar se cumplirá:

$$\int_{-a}^{+a} f(t)\, dt = 0 \tag{20}$$

ya que el área entre $-a$ y 0 tiene el mismo valor que entre 0 y a, pero de signo contrario, lo que se hace evidente observando la función impar de la Figura A2.1*b*.

Para evaluar los coeficientes de Fourier se han de integrar, de acuerdo con (15), funciones de la forma:

$$g(t) = f(t) \cos n\omega_0 t \quad ; \quad h(t) = f(t) \text{ sen } n\omega_0 t \tag{21}$$

Si la función $f(t)$ es **par**, se cumplirá:

$$g(-t) = f(-t) \cos(-n\omega_0 t) = f(t) \cos n\omega_0 t = g(t) \tag{22}$$

$$h(-t) = f(-t) \text{ sen } (-n\omega_0 t) = -f(t) \text{ sen } n\omega_0 t = -h(t) \tag{23}$$

es decir, resulta una función *g(t)* de tipo par y la *h(t)* de tipo impar.

Si $f(t)$ es **impar**, resultará:

$$g(-t) = f(-t) \cos(-n\omega_0 t) = -f(t) \cos n\omega_0 t = -g(t) \tag{24}$$

$$h(-t) = f(-t) \text{ sen } (-n\omega_0 t) = f(t) \text{ sen } n\omega_0 t = h(t) \tag{25}$$

es decir, resulta $g(t)$ de tipo impar y $h(t)$ de tipo par.

De acuerdo con estas propiedades, la evaluación de los coeficientes de Fourier para las diferentes funciones será:

a) Funciones pares

Al aplicar (15) tomando $t_0 = -T/2$ se obtiene:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt \tag{26}$$

donde se ha tenido en cuenta que según (22) el integrando es par, por lo que se ha aplicado la propiedad (19) para obtener la expresión final de a_n.

Para los coeficientes b_n, al aplicar (15) con $t_0 = -T/2$, y teniendo en cuenta que según (23) se obtiene un integrando impar, la propiedad (20) nos da el resultado:

$$b_n = 0 \tag{27}$$

Es decir, el desarrollo en serie de Fourier de una función par **consiste únicamente de términos coseno**. Este resultado es aceptable intuitivamente: una onda de tipo coseno es par, por lo que la suma de términos coseno dará lugar a una $f(t)$ par.

b) Funciones impares

Al aplicar (15) tomando $t_0 = -T/2$, y teniendo en cuenta que según (24) se obtiene un integrando impar, la propiedad (20) nos indica que los coeficientes a_n son todos nulos:

$$a_n = 0 \tag{28}$$

Para los coeficientes b_n resulta:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t\, dt \tag{29}$$

donde se ha tenido en cuenta que según (25) el integrando es par, por lo que se ha aplicado la propiedad (19) para obtener la expresión final de b_n. En consecuencia, el desarrollo en serie de Fourier de una función impar **consiste únicamente de términos seno**. Este resultado es aceptable intuitivamente: una onda de tipo seno es impar, por lo que la suma de términos seno dará lugar a una función resultante $f(t)$ impar.

c) Funciones con simetría media onda

Estas funciones responden a la propiedad (18). Vamos a demostrar que su desarrollo en serie de Fourier solamente contiene armónicos impares. Si se aplica (15) tomando $t_0 = -T/2$, resulta:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t\, dt\right] \tag{30}$$

y cambiando la variable t por:

$$t = \tau - \frac{T}{2} \tag{31}$$

la ecuación (30) se convierte en:

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} f\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \cos n\omega_0 \left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt\right] \tag{32}$$

y teniendo en cuenta la propiedad (18) de estas funciones resulta:

$$a_n = \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} - f(\tau) \cos n\omega_0 \left(\tau - \frac{T}{2}\right) d\tau + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt\right] \tag{33}$$

que da lugar a:

$$a_n = 0 \qquad \text{para } n \text{ par}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \qquad \text{para } n \text{ impar} \tag{34}$$

Un desarrollo similar nos demuestra que los coeficientes b_n son:

$$b_n = 0 \qquad \text{para } n \text{ par}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \,\text{sen}\, n\omega_0 t \, dt \qquad \text{para } n \text{ impar}$$

De este modo, una función con simetría de media onda tiene un desarrollo en serie de Fourier que solamente contiene armónicos impares.

Si la función $f(t)$ es además par, el desarrollo en serie de Fourier tendrá solamente **armónicos impares tipo coseno**, lo que se justifica por la doble propiedad de **función par y además con simetría de media onda**. Análogamente, si $f(t)$ es una **función impar con simetría media onda**, su desarrollo en serie de Fourier tendrá **solamente armónicos impares tipo seno**.

Ejemplo de aplicación 1

Determinar el desarrollo en serie de Fourier de las ondas mostradas en la Figura A2.1.

Solución

a) La figura A2.1*a* tiene simetría par. La función $f(t)$ entre $0 < t < T/2$ responde a la ecuación de la recta:

$$f(t) = F_m\left(1 - \frac{2t}{T}\right) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y al aplicar (10), (26) y (27) resulta:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2F_m}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(1 - \frac{2t}{T}\right) dt = \frac{F_m}{2} \quad ;$$

$$a_n = \frac{4F_m}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(1 - \frac{2t}{T}\right)\cos n\omega_0 t\, dt = \frac{2F_m}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi) \quad ; \quad b_n = 0$$

De este modo el desarrollo (8) nos da:

$$f(t) = \frac{F_m}{2} + \frac{4F_m}{\pi^2}\left[\cos \omega_0 t + \frac{1}{9}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{25}\cos 5\omega_0 t + \cdots\right]$$

b) La Figura A2.1*b* tiene simetría impar. La función $f(t)$ entre $0 < t < T/2$ responde a la ecuación:

$$f(t) = \frac{2F_m}{T} t \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

y al aplicar (28) y (29) resulta:

$$a_n = 0 \quad ; \quad b_n = \frac{8F_m}{T^2}\int_0^{\frac{T}{2}} \text{sen } n\omega_0 t\, dt = \frac{2F_m}{n\pi}(-\cos n\pi)$$

que corresponde al desarrollo:

$$f(t) = \frac{2F_m}{\pi}\left[\text{sen } \omega_0 t - \frac{1}{2}\text{sen } 2\omega_0 t + \frac{1}{3}\text{sen } 3\omega_0 t - \frac{1}{4}\text{sen } 4\omega_0 t + \cdots\right]$$

c) La Figura A2.1*c* tiene simetría par y a la vez de media onda. El desarrollo en serie de Fourier contendrá únicamente armónicos impares tipo coseno. Al aplicar (26) y (27) resultará:

$$a_n = \frac{4F_m}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} \cos n\omega_0 t\, dt - \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos n\omega_0 t\, dt\right]$$

es decir: $a_n = \dfrac{4F_m}{n\pi}\text{sen } n\dfrac{\pi}{2}$; $b_n = 0$, lo que corresponde al desarrollo siguiente:

$$f(t) = \frac{4F_m}{\pi}\left[\cos \omega_0 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t + \cdots\right]$$

d) La Figura A2.1*d* tiene simetría impar y a la vez de media onda. La función $f(t)$ vale:

$$f(t) = \frac{4F_m}{T} t \quad \text{para} \quad 0 < t < T/4 \quad ; \quad f(t) = 2F_m\left(1 - \frac{2t}{T}\right) \quad \text{para} \quad T/4 < t < T/2$$

Al aplicar (28) y (29) resulta:

$$a_n = 0 \quad ; \quad b_n = \frac{4}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4F_m}{T} t \text{ sen } n\omega_0 t\, dt + \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} 2F_m\left(2 - \frac{2t}{T}\right)\text{sen } n\omega_0 t\, dt\right]$$

que operando da lugar a: $b_n = \dfrac{8F_m}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\, n\dfrac{\pi}{2}$, de donde resulta un desarrollo en serie:

$$f(t) = \frac{8F_m}{\pi^2}\left[\text{sen}\,\omega_0 t - \frac{1}{9}\,\text{sen}\,3\omega_0 t + \frac{1}{25}\,\text{sen}\,5\omega_0 t - \cdots\right]$$

Ejemplo de aplicación 2

En la Figura A2.2 se muestran tres tipos de onda de f.m.m. existentes en el entrehierro de diversas máquinas eléctricas. Determinar el desarrollo espacial de Fourier de las tres f.m.m.s.

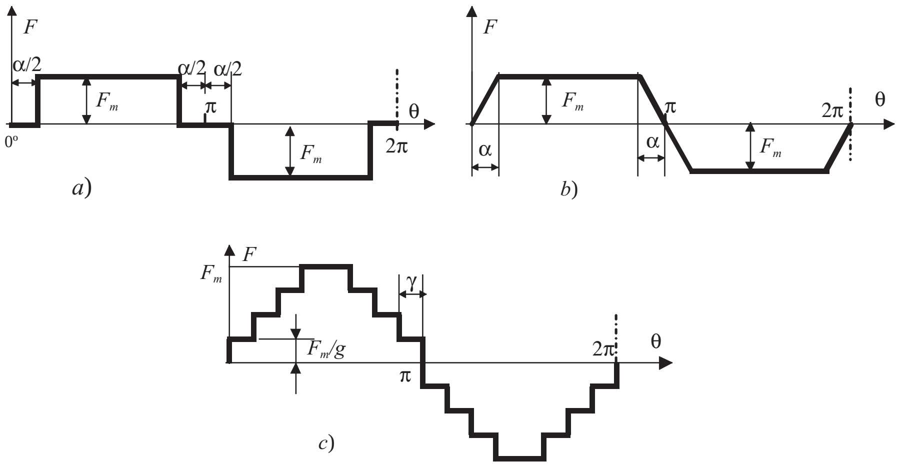


Figura A2-2. Ondas de f.m.m.

Solución

a) Las tres ondas tienen simetría impar y además de media onda, en consecuencia el desarrollo en serie de Fourier tendrá únicamente componentes armónicos impares tipo seno.

Para la onda de la Figura A2.2*a*, al aplicar (29) y haciendo $\omega_0 t = \theta$, resulta:

$$b_n = \frac{4}{2\pi}\int_{\alpha/2}^{\pi-\alpha/2} F_m\,\text{sen}\,n\theta\,d\theta = \frac{4F_m}{\pi}\,\frac{\cos\dfrac{n\alpha}{2}}{n}$$

y en consecuencia el desarrollo en serie de Fourier será:

$$F(\theta) = \frac{4F_m}{\pi}\sum \cos\frac{n\alpha}{2}\,\frac{\text{sen}\,n\theta}{n}$$

b) Para la onda de la Figura A2.2*b* se tiene:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\alpha}\frac{F_m}{\alpha}\,\theta\,\text{sen}\,n\theta\,d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha}F_m\,\text{sen}\,n\theta\,d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi}F_m\,\frac{\pi-\theta}{\alpha}\,\text{sen}\,n\theta\,d\theta\right]$$

cuyo resultado es:

$$b_n = \frac{4F_m}{n\pi} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{n\alpha}{2}}{\dfrac{n\alpha}{2}} \cos \frac{n\alpha}{2}$$

lo que da lugar a un desarrollo de Fourier:

$$F(\theta) = \frac{4F_m}{\pi\alpha} \left[\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 3\theta \frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{3^2} + \operatorname{sen} 5\theta \frac{\operatorname{sen} 5\alpha}{5^2} + \cdots \right]$$

c) Para la onda de la Figura A2.2*c*, en la que g representa el número de escalones, se tendrá:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\gamma} \frac{F_m}{g} \operatorname{sen} n\theta + \int_{\gamma}^{2\gamma} \frac{2F_m}{g} \operatorname{sen} n\theta \, d\theta \cdots + \int_{\pi-\gamma}^{\pi} \frac{F_m}{g} \operatorname{sen} n\theta \, d\theta \right]$$

dando lugar al siguiente resultado:

$$b_n = \frac{4F_m}{n\pi} \left[\frac{\operatorname{sen} \dfrac{gn\gamma}{2}}{g \operatorname{sen} \dfrac{n\gamma}{2}} \cos \frac{n(g-1)\gamma}{2} \right] = \frac{4F_m}{n\pi} K_d$$

donde K_d representa la cantidad encerrada entre corchetes y que corresponde al factor del devanado que produce el escalonamiento de la f.m.m. De este modo el desarrollo en serie que se obtiene es:

$$F(\theta) = \frac{4}{\pi} \frac{F_m}{n} K_d \sum \operatorname{sen} n\theta$$

APÉNDICE 3

El sistema por unidad

1. MAGNITUDES NORMALIZADAS. EL SISTEMA POR UNIDAD

Las magnitudes físicas se pueden expresar en función de sus unidades o en comparación con una referencia denominada **magnitud base**. Se dice que una magnitud se expresa en **por unidad** cuando se divide su valor por la magnitud base, que debe tener la misma dimensión. Por medio de esta operación, conocida con el nombre de **normalización**, las magnitudes carecen de dimensiones y sus valores por unidad son a menudo más significativos que sus valores absolutos.

Cuando se trabaja con transformadores, la normalización es particularmente útil, ya que se elimina la necesidad explícita de convertir los niveles de tensión de un transformador (reducción del secundario al primario y viceversa). En lugar de ello, las conversiones se manejan automáticamente por el método mismo, sin que el usuario deba preocuparse de la transformación de impedancias, siendo posible resolver fácilmente circuitos que contienen muchos transformadores, como es el caso de los sistemas eléctricos de potencia, con menores posibilidades de error.

El sistema por unidad tiene aún otra ventaja que es muy importante en las máquinas eléctricas: a medida que cambia el tamaño de una máquina, su impedancia interna varía ampliamente. Así, una reactancia de cortocircuito de 0,1 ohmio puede ser una cifra excesivamente elevada para un transformador o ridículamente baja para otro: todo depende de la tensión de la máquina y de su potencia. Sin embargo, resulta que en un sistema por unidad basado en los valores nominales del equipo, **las impedancias de las máquinas eléctricas varían dentro de rangos muy estrechos**. Esta propiedad puede servir para comprobar la solución de los problemas.

Es costumbre seleccionar las magnitudes base para definir un sistema por unidad, que son generalmente la tensión y la potencia aparente. Una vez seleccionados dichos valores, las restantes magnitudes base quedan ligadas con ellos mediante las leyes comunes de la teoría de los circuitos eléctricos.

En un sistema monofásico las relaciones son:

$$P_{base} = Q_{base} = S_{base} = V_{base}\, I_{base}$$

$$R_{base} = X_{base} = Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}} = \frac{V_{base}^2}{S_{base}} \qquad (1)$$

Una vez que se han elegido los valores base S_{base} y V_{base}, todos los demás valores pueden calcularse mediante las ecuaciones (1).

Si se consideran unas cantidades verdaderas $Z(\Omega)$, I, V y S, sus magnitudes expresadas por unidad serán:

$$Z\text{ (p.u.)} = \frac{Z(\Omega)}{Z_{base}} \quad ; \quad I\text{ (p.u.)} = \frac{I}{I_{base}} \quad ; \quad V\text{ (p.u.)} = \frac{V}{V_{base}} \quad ; \quad S\text{ (p.u.)} = \frac{S}{S_{base}} \tag{2}$$

Las ecuaciones anteriores nos permiten determinar las cantidades por unidad (p.u.) conociendo las magnitudes base y los valores verdaderos de las variables, o al contrario, si se conocen los valores p.u. se podrán calcular los valores verdaderos al haber fijado las magnitudes base.

Supóngase, por ejemplo, un circuito monofásico con los valores base siguientes:

$$S_{base} = 1.000\text{ VA (1 p.u.)} \; ; \; V_{base} = 200\text{ V (1 p.u.)} \tag{3}$$

Los valores base de la corriente y la impedancia serán según (1):

$$I_{base} = \frac{S_{base}}{V_{base}} = \frac{1.000}{200} = 5\text{ A (1 p.u.)} \quad ; \quad Z_{base} = \frac{V_{base}}{I_{base}} = \frac{200}{5} = 40\ \Omega\text{ (1 p.u.)} \tag{4}$$

Por consiguiente, si se tienen unos valores verdaderos de tensión, corriente e impedancia de 150 V, 4 A y 50 ohmios, respectivamente, corresponderán a los valores por unidad siguientes:

$$V\text{ (p.u.)} = \frac{150}{200} = 0{,}75 \quad ; \quad I\text{ (p.u.)} = \frac{4}{5} = 0{,}8 \quad ; \quad Z\text{ (p.u.)} = \frac{50}{40} = 1{,}25 \tag{5}$$

Como ya se ha indicado, el sistema por unidad tiene la ventaja de que con él hay menos posibilidades de equivocarse en los cálculos. Por ejemplo, si I es 0,8 p.u. (es decir, 4 A) y Z es 1,5 p.u. (es decir, 60 Ω), la tensión será:

$$V = Z \cdot I = 1{,}5 \cdot 0{,}8 = 1{,}2\text{ p.u.} \tag{6}$$

El valor de la tensión 1,2 p.u. con 200 V de tensión base representan:

$$1{,}2 \cdot 200 = 240\text{ V} \tag{7}$$

que en magnitudes absolutas corresponden al producto de la impedancia de 60 ohmios por la corriente de 4 amperios. El sistema por unidad es muy útil en el estudio de los sistemas eléctricos de potencia. En la forma convencional en la que se emplean voltios y amperios, la solución de una red de transporte con diferentes niveles de tensión requiere que todas las impedancias a sumar sean referidas a un mismo nivel de tensión. En el sistema por unidad, desaparecen completamente estos niveles y una red constituida por alternadores, transformadores y líneas de diferentes niveles de tensión se reduce a un sistema de impedancias simples. De hecho, en un sistema de potencia la tensión y la potencia base se seleccionan **en un punto específico del sistema**. Los transformadores no afectan la magnitud de la potencia aparente base del sistema, puesto que en ellos idealmente la potencia aparente es igual en la entrada que en la salida. Sin embargo, la tensión sí que cambia al pasar por un transformador, de tal suerte que la magnitud V_{base} varía con la relación de espiras de cada transformador instalado en la red. Como las magnitudes base cambian al pasar por un transformador, el proceso de referenciar las cantidades a un único nivel de tensión se realiza automáticamente durante la normalización.

Considérese, por ejemplo, un transformador monofásico de 2.000 VA, relación 200/400 V, con unas impedancias de primario y secundario de $j\,2\ \Omega$ y $j\,6\ \Omega$, respectivamente. En el **lado de baja tensión** (primario) se tendrán los siguientes valores base:

$$S_{base} = 2.000 \text{ VA} \quad ; \quad V_{base} = 200 \text{ V} \quad ; \quad I_{base} = \frac{2.000}{200} = 10 \text{ A} \quad ; \quad Z_{base} = \frac{200}{10} = 20\ \Omega \qquad (8)$$

mientras que en el **lado de alta tensión** (secundario) los valores serán:

$$S_{base} = 2.000 \text{ VA} \quad ; \quad V_{base} = 400 \text{ V} \quad ; \quad I_{base} = \frac{2.000}{400} = 5 \text{ A} \quad ; \quad Z_{base} = \frac{400}{5} = 80\ \Omega \qquad (9)$$

De este modo las impedancias del primario y secundario por unidad serán, respectivamente:

$$Z_1 \text{ (p.u.)} = \frac{j\,2}{20} = j\,0{,}1 \qquad (10)$$

$$Z_2 \text{ (p.u.)} = \frac{j6}{80} = j\,0{,}075 \qquad (11)$$

De acuerdo con la teoría de transformadores, estudiada en el Capítulo 3, la impedancia verdadera del transformador reducida al primario se obtiene aplicando la ecuación:

$$Z_{eq1} = Z_1 + m^2 Z_2 \quad ; \quad m = \frac{V_1}{V_2} = \frac{200}{400} = 0{,}5 \qquad (12)$$

y teniendo en cuenta los valores correspondientes resultará:

$$Z_{eq1} = j\,2 + 0{,}5^2\,(j\,6) = j\,2 + j\,1{,}5 = j\,3{,}5\ \Omega \qquad (13)$$

que corresponde a un valor por unidad:

$$Z_{eq1} \text{ (p.u.)} = \frac{j\,3{,}5}{20} = j\,0{,}175 \qquad (14)$$

Si se considera la impedancia verdadera del transformador reducida al secundario, se obtiene:

$$Z_{eq2} = Z_2 + \frac{Z_1}{m^2} \quad ; \quad m = \frac{V_1}{V_2} = \frac{200}{400} = 0{,}5 \qquad (15)$$

es decir:

$$Z_{eq2} = j\,6 + \frac{j\,2}{0{,}5^2} = j\,14\ \Omega \qquad (16)$$

que corresponde a un valor por unidad (en el lado de alta tensión o secundario):

$$Z_{eq2} = \frac{j\,14}{80} = j\,0{,}175 \qquad (17)$$

Se deduce, pues, que la impedancia del transformador expresada en valores por unidad es $j\,0{,}175$, que vemos que es independiente del lado desde el cual se mire [obsérvense las expresiones (14) y (17)]. Es más, la impedancia equivalente del transformador en valor por unidad es la suma de las impedancias por unidad de los devanados primario y secundario. Comprobémoslo: Si se parte de las expresiones (10) y (11) se observa que:

$$Z_1 \text{ (p.u.)} + Z_2 \text{ (p.u.)} = j\,0{,}1 + j\,0{,}075 = j\,0{,}175 \qquad (18)$$

que nos da directamente la impedancia equivalente del transformador en valores por unidad, haciendo innecesaria la predeterminación de los valores absolutos, expresados por las ecuaciones (12), (13) y (14) cuando se partía de los valores referidos a primario, o de las ecuaciones (15), (16) y (17) cuando se partía de los valores referidos a secundario.

2. CAMBIO DE BASE

Ordinariamente el constructor de una máquina eléctrica expresa sus características en tanto por uno, utilizando como base la potencia aparente y la tensión nominal. Si se han de hacer cálculos en un sistema con varias máquinas de diferentes valores nominales, es conveniente expresar las características de una máquina en función de los valores de otra, o bien expresar las características de cada una de ellas en función de algún sistema de cantidades base elegido arbitrariamente. Sin embargo, si se cambia la base, la impedancia por unidad de la máquina toma un nuevo valor.

Supóngase que se dispone de dos sistemas base definidos por los valores S_{b1}, V_{b1} y S_{b2}, V_{b2}, respectivamente. Las corrientes e impedancias base para cada sistema, de acuerdo con (1), serán:

$$I_{b1} = \frac{S_{b1}}{V_{b1}} \quad ; \quad Z_{b1} = \frac{V_{b1}^2}{S_{b1}} \quad ; \quad I_{b2} = \frac{S_{b2}}{V_{b2}} \quad ; \quad Z_{b2} = \frac{V_{b2}^2}{S_{b2}} \tag{19}$$

Si se parte de unos valores verdaderos S, V, I y Z (Ω) se tendrán, de acuerdo con (2), unos valores por unidad referidos en cada fase:

$$S_{p.u.1} = \frac{S}{S_{b1}} \quad ; \quad V_{p.u.1} = \frac{V}{V_{b1}} \quad ; \quad I_{p.u.1} = \frac{I}{I_{b1}} \quad ; \quad Z_{p.u.1} = \frac{Z(\Omega)}{Z_{b1}} \tag{20}$$

$$S_{p.u.2} = \frac{S}{S_{b2}} \quad ; \quad V_{p.u.2} = \frac{V}{V_{b2}} \quad ; \quad I_{p.u.2} = \frac{I}{I_{b2}} \quad ; \quad Z_{p.u.2} = \frac{Z(\Omega)}{Z_{b2}} \tag{21}$$

Al dividir las ecuaciones (20) por las ecuaciones (21) se obtienen las siguientes expresiones que relacionan los valores por unidad entre las dos bases.

$$S_{p.u.2} = S_{p.u.1}\frac{S_{b1}}{S_{b2}} \quad ; \quad V_{p.u.2} = V_{p.u.1}\frac{V_{b1}}{V_{b2}} \quad ; \quad I_{p.u.2} = I_{p.u.1}\frac{I_{b1}}{I_{b2}} = I_{p.u.1}\frac{S_{b1}}{S_{b2}}\frac{V_{b2}}{V_{b1}}$$

$$Z_{p.u.2} = Z_{p.u.1}\frac{Z_{b1}}{Z_{b2}} = Z_{p.u.1}\frac{V_{b1}^2}{V_{b2}^2}\frac{S_{b2}}{S_{b1}} \tag{22}$$

que nos dan las expresiones de las magnitudes por unidad en la base 2 respecto a las magnitudes por unidad en la base 1.

Ejemplo de aplicación 1

En la Figura A3.1 se muestra el esquema unifilar de un sistema eléctrico de potencia, constituido por dos generadores G_a y G_b de 250 V, cuyo valor se toma como tensión base. Se dispone de un transformador elevador T_A que eleva la tensión a 800 V. Al final de la línea existe un transformador reductor T_B que, como es evidente, no fue diseñado para esta instalación en particular, ya que sus tensiones nominales son superiores a las necesarias; sin embargo, su relación de espiras es apropiada para proporcionar la tensión adecuada a la carga de 400 V. Las impedancias de las máquinas se dan por

unidad referidas a sus valores nominales. La impedancia de la línea se da en valores absolutos. Si se toma como potencia base una potencia aparente de 5.000 VA, determinar el esquema equivalente eléctrico de la Figura A3.1 en valores por unidad.

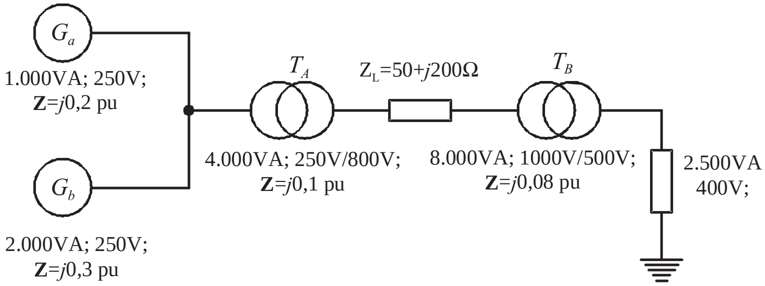


Figura A3-1.

Solución

Las magnitudes base **nuevas** a las que se han de referir todas las del sistema serán:

$$S_{b2} = 5.000 \text{ VA} \quad ; \quad V_{b2} = 250 \text{ V}$$

a) Para la máquina G_a se tiene respecto a su propia base (base 1):

$$Z_{a\,p.u.1} = j\,0,2 \quad ; \quad S_{b1} = 1.000 \text{ VA} \quad ; \quad V_{b1} = 250 \text{ V}$$

y por consiguiente al aplicar (22) resulta una impedancia respecto a la base 2:

$$Z_{a\,p.u.2} = j\,0,2 \cdot \frac{250^2}{250^2} \cdot \frac{5.000}{1.000} = j\,1$$

b) Para la máquina G_b se tiene respecto a su propia base (base 1):

$$Z_{b\,p.u.1} = j\,0,3 \quad ; \quad S_{b1} = 2.000 \text{ VA} \quad ; \quad V_{b1} = 250 \text{ V}$$

que según (22) corresponde en la nueva base 2 a:

$$Z_{b\,p.u.2} = j\,0,3 \cdot \frac{250^2}{250^2} \cdot \frac{5.000}{2.000} = j\,0,75$$

c) Para el transformador T_A se tiene respecto a su propia base:

$$Z_{A\,p.u.1} = j\,0,1 \quad ; \quad S_{b1} = 4.000 \text{ VA} \quad ; \quad V_{b1} = 250 \text{ V (primario)}$$

por lo que respecto a la nueva base 2 dará una impedancia:

$$Z_{A\,p.u.2} = j\,0,1 \frac{250^2}{250^2} \frac{5.000}{4.000} = j\,0,125$$

d) Para la línea de transporte, la impedancia está referida al lado de 800 V, por lo que al aplicar (1) y (2) resulta un valor por unidad:

$$Z_{b2} = \frac{800^2}{5.000} \quad ; \quad Z_{L\,p.u.2} = \frac{50 + j\,200}{800^2}\,5.000 = 0,39 + j\,1,56$$

El subíndice 2 en la impedancia anterior significa en principio que está referida al secundario del transformador (aunque al expresarla por unidad será independiente del lado del transformador a que se refiera). Podemos hacer este cálculo más «lentamente» para corroborarlo, calculando la impedancia referida al primario y expresándola en valores por unidad, es decir:

$$Z_L \text{ (reducida al primario)} = m^2 Z_L = \left(\frac{250}{800}\right)^2 (50 + j\,200\,) = 4{,}88 + j\,19{,}53\ \Omega$$

y como quiera que la impedancia base referida al primario es, según (1):

$$Z'_{b2} = \frac{250^2}{5.000} = 12{,}5\ \Omega$$

se obtendrá, de acuerdo con (2):

$$Z_{L\,p.u.2} = \frac{Z_L}{Z'_{b2}} = \frac{4{,}88 + j\,19{,}53}{52{,}5} = 0{,}39 + j\,1{,}56$$

que coincide con el valor calculado antes de una forma más directa, sin necesidad de tener que reducir la impedancia de la línea (situada en el secundario del transformador T_A) del secundario al primario.

e) Para el transformador T_B se tiene:

$$Z_{B\,p.u.1} = j\,0{,}08 \quad ; \quad S_{b1} = 8.000 \text{ VA} \quad ; \quad V_{b1} = 1.000 \text{ V (primario)}$$

y al aplicar (22) resulta:

$$Z_{B\,p.u.2} = j\,0{,}08\,\frac{1.000^2}{800^2}\,\frac{5.000}{8.000} = j\,0{,}078$$

Téngase en cuenta que para este transformador la tensión base $V_{b2} = 250$ V se transforma en el lado de alta tensión en $V'_{b2} = 800$ V.

f) La potencia de la carga en valores por unidad es:

$$S_{2p.u.} = \frac{2.500}{5.000} = 0{,}5$$

En la Figura A3.2 se representa el esquema unifilar del circuito referido al lado (base) de 250 V y con una potencia base de 5.000 VA. Reconocerá el lector la enorme simplificación que se obtiene de la red original. Este esquema admite una simplificación mayor si se asocian las impedancias conectadas en serie.

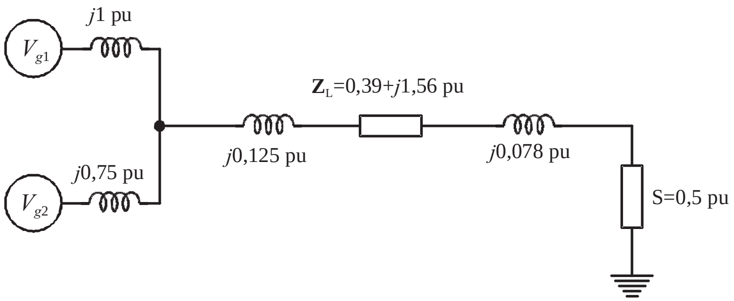


Figura A3-2.

En general, el procedimiento a seguir para realizar un análisis de un sistema eléctrico complejo en valores por unidad es el siguiente:

1. Elegir una potencia aparente base para todo el conjunto.
2. Elegir una tensión base arbitraria. Relacionar todas las otras tensiones base por medio de las relaciones de transformación de cada transformador.
3. Calcular las impedancias base en las diferentes secciones.
4. Dibujar el diagrama de impedancias del conjunto y resolver el problema en valores por unidad.
5. Convertir los resultados obtenidos en valores por unidad en valores absolutos.

3. SISTEMAS TRIFÁSICOS. ANÁLISIS POR UNIDAD

Los estudios anteriores de cantidades por unidad se limitaron a sistemas monofásicos. Dicho análisis puede generalizarse a los sistemas trifásicos eligiendo adecuadamente las bases trifásicas. Parece evidente elegir:

$$S_b \text{ (trifásica)} = 3S_b \quad ; \quad V_b \text{ (línea)} = \sqrt{3}V_b \tag{23}$$

donde S_b representa la potencia base del sistema monofásico equivalente y V_b la tensión simple del sistema trifásico (monofásico equivalente). S_b (trifásica) representa la potencia trifásica y V_b (línea) representa la tensión compuesta de la red trifásica.

Si se parte de una potencia trifásica S (trifásica) a la tensión compuesta V (línea) se tendrán unos valores por unidad:

$$S_{p.u.} \text{ (trifásica)} = \frac{S \text{ (trifásica)}}{S_b \text{ (trifásica)}} = \frac{3S}{3S_b} = S_{p.u.} \text{ (monofásica)} \tag{24}$$

donde S representa la potencia por fase. Obsérvese que la potencia por unidad trifásica coincide con la monofásica por unidad.

De un modo análogo, la tensión trifásica (de línea) por unidad será:

$$V_{p.u.} \text{ (trifásica)} = \frac{V \text{ (línea)}}{V_b \text{ (línea)}} = \frac{\sqrt{3}V}{\sqrt{3}V_b} = V_{p.u.} \text{ (monofásica)} \tag{25}$$

donde V representa la tensión simple. Los resultados (24) y (25) nos indican que al resolver un problema trifásico en valores por unidad es indiferente utilizar valores por fase o valores trifásicos. Los ingenieros eléctricos no necesitan especificar si una tensión por unidad es fase-fase (de línea o compuesta) o fase-neutro (simple). Si la tensión es 1 p.u., significa que la tensión de línea verdadera es igual a la tensión base de línea o que la tensión simple verdadera es igual a la tensión base simple. Los mismos resultados se obtienen al tratar las impedancias. Nótese que la impedancia base trifásica es:

$$Z_b \text{ (trifásica)} = \frac{V_b^2 \text{ (línea)}}{S_b \text{ (trifásica)}} = \frac{(\sqrt{3}V_b)^2}{3S_b} = \frac{V_b^2}{S_b} = Z_b \text{ (monofásica)} \tag{26}$$

es decir, coincide con la monofásica.

Ejemplo de aplicación 2

Considerar el esquema unifilar de la Figura A3.3, en la que se presentan los valores nominales de los transformadores. Las reactancias de los mismos se dan en valores por unidad. Las impedancias de la línea y la carga se expresan en ohmios. Las tensiones se miden en valores de línea. Calcular: corriente suministrada por el generador, corriente en la red de alta tensión, corriente en la carga, tensión en la carga, potencia aparente en la carga.

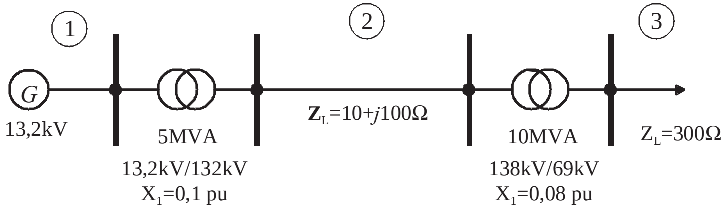


Figura A3-3.

Solución

De acuerdo con el proceso señalado al final del problema 1 resuelto antes, se tendrá:

PASO 1: Elegir una potencia base para todo el sistema. Tomaremos: $S_b = 10$ MVA.
PASO 2: Elegir una tensión base, por ejemplo en la sección 2: $V_{b2} = 138$ kV; que de acuerdo con las relaciones de transformación de los transformadores situados a principio y final de línea, corresponden a los valores base en las zonas 1 y 3 siguientes: $V_{b1} = 13{,}8$ kV; $V_{b3} = 69$ kV.
PASO 3: Calculamos las impedancias base para las tres secciones:

$$Z_{b3} = \frac{(69 \cdot 10^3)^2}{10 \cdot 10^6} = 476\ \Omega \quad \Rightarrow \quad Z_L\ (\text{carga}) = \frac{300}{476} = 0{,}63 \text{ p.u.}$$

$$Z_{b2} = \frac{(138 \cdot 10^3)^2}{10 \cdot 10^6} = 1.904\ \Omega \quad \Rightarrow \quad Z_{línea} = \frac{10 + j\,100}{1.904} = 5{,}25 \cdot 10^{-3}\ (1 + j\,10) \text{ p.u.}$$

Los valores de las reactancias de los transformadores referidos a estos valores base, de acuerdo con (22), serán:

$$X_1\ (\text{nuevo}) = 0{,}1 \left(\frac{13{,}2}{13{,}8}\right)^2 \left(\frac{10}{5}\right) = 0{,}183 \text{ p.u.} \quad ; \quad X_2\ (\text{nuevo}) = 0{,}08 \left(\frac{138}{138}\right)^2 \left(\frac{10}{10}\right) = 0{,}08 \text{ p.u.}$$

La tensión de línea del generador en valor por unidad es:

$$V_g = \frac{13{,}2}{13{,}8} = 0{,}96 \text{ p.u.}$$

PAS0 4: El esquema equivalente del circuito es el que se muestra en la Figura A3.4, en el que se expresan todas las magnitudes por unidad. Se ha tomado como referencia de fases la tensión del generador.

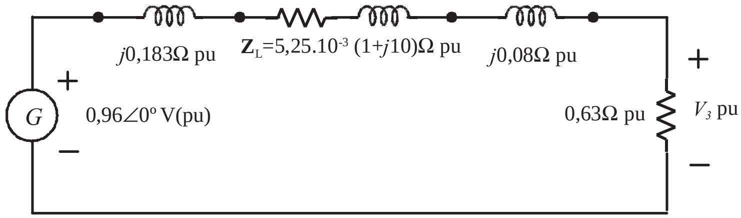


Figura A3-4.

Aplicando el 2.º Lema de Kirchhoff a la malla formada se obtiene:

$$I\ (\text{p.u.}) = \frac{0{,}96}{Z_{TOTAL}} = \frac{0{,}96}{0{,}70 \angle\ 26{,}4°} = 1{,}35 \angle -26{,}4°$$

La tensión en la carga será:

$$V_3\ (\text{p.u.}) = 0{,}63 \cdot I\ (\text{p.u.}) = 0{,}8505 \angle -26{,}4°$$

y la potencia en la carga:

$$\mathbf{S}_L\ (\text{p.u.}) = \mathbf{V}\ (\text{p.u.})\ \mathbf{I}^*\ (\text{p.u.}) = 0{,}8505 \angle -26{,}4° \cdot 1{,}35 \angle\ 26{,}4° = 1{,}148$$

PASO 5: Los valores de las corrientes base en las diversas secciones son:

$$I_{b1} = \frac{S_b}{V_{b1}} = \frac{10 \cdot 10^6}{3} \frac{1}{13{,}8 \cdot 10^3/\sqrt{3}} = 418{,}4\ \text{A} \quad ; \quad I_{b2} = \frac{13{,}2}{132}\ 418{,}4 = 41{,}84\ \text{A}$$

$$I_{b3} = \frac{138}{69}\ 41{,}84 = 83{,}67\ \text{A}$$

Por consiguiente, la corriente del generador y en la red de alta tensión serán, respectivamente:

$$|I_1| = 1{,}35 \cdot 418{,}4 = 584{,}8\ \text{A} \quad ; \quad |I_2| = 1{,}35 \cdot 41{,}84 = 58{,}48\ \text{A}$$

y la corriente en la carga será:

$$|I_3| = 1{,}35 \cdot 83{,}67 = 112{,}95\ \text{A}$$

La tensión verdadera en la carga y la potencia aparente en la misma corresponderán a unos valores:

$$|V_3| = 0{,}85055 \cdot 69 = 58{,}68\ \text{kV} \quad ; \quad S_L = 1{,}148 \cdot 10 = 11{,}48\ \text{MVA}$$

que son los valores solicitados en el enunciado.

Índice alfabético

Índice biográfico

máquinas eléctricas

La excelente acogida que se ha venido dispensando a las anteriores ediciones de esta obra, obligaban necesariamente a preparar esta nueva impresión, en la que se ha hecho un gran esfuerzo editorial para mejorar su calidad y presentación. Dirigido a estudiantes de ingeniería, es el texto ideal para un curso de máquinas eléctricas, como continuación de una asignatura de electromagnetismo y circuitos eléctricos y que se incluyen como disciplinas independientes o asociadas en los heterogéneos Planes de Estudio que se desarrollan en las diversas Escuelas Técnicas de Ingeniería Superior e Ingeniería Técnica. Un aspecto peculiar del libro es el capítulo dedicado a los accionamientos eléctricos, en el que se reflejan los avances tecnológicos en relación con la regulación electrónica de las máquinas eléctricas, por lo que puede ser muy interesante como obra de consulta para los ingenieros que trabajan en la industria, que alejados de las aulas deben adaptarse a una tecnología en continua transformación.

A lo largo del texto se presentan gran cantidad de ejemplos de aplicación totalmente resueltos y en cada capítulo se incluyen de veinte a treinta problemas propuestos, en los que únicamente se da la respuesta final, lo que supone un total de más de trescientos problemas que facilitan el autoaprendizaje del alumno. El libro contiene numerosos comentarios prácticos y anécdotas diversas, que son puntos sugerentes de reflexión, que incentivan la lectura del texto. También se han incorporado diversas secciones de ampliación de conocimientos, en las que se complementan algunos temas, para satisfacer a aquellos lectores más sagaces que buscan una mayor perfección en su formación. Asimismo al final de cada capítulo se han escrito las biografías de científicos e ingenieros, que contribuyeron con sus teorías al avance de esta disciplina y a los que la humanidad les debe por ello respeto y gratitud. También se incluye un apéndice dedicado a la historia de las máquinas eléctricas, que consideramos de interés para que los estudiantes conozcan la evolución de esta tecnología y completen de este modo su necesaria formación humanística.

Online LearningCenter

Este libro dispone de OLC, Online Learning Center, página web asociada, lista para su uso inmediato y creada expresamente para facilitar la labor docente del profesor y el aprendizaje de los alumnos.
Se incluyen contenidos adicionales al libro y recursos para la docencia.

www.mhe.es/fraile6

www.mcgraw-hill.es

The McGraw-Hill Companies